

目 录

GRE 数学考试的基本说明	1
第一章 GRE 数学考试知识点精讲精练	4
第一节 算术 (Arithmetic)	4
1.1 整数	4
综合训练	7
1.2 分数	19
综合训练	20
1.3 幂指数和根	23
综合训练	25
1.4 小数	32
综合训练	33
1.5 实数	35
综合训练	36
1.6 比率	40
综合训练	40
1.7 百分比	43
综合训练	44
第二节 代数 (Algebra)	49
2.1 代数式运算	49
综合训练	50
2.2 指数运算法则	59
综合训练	60
2.3 解线性方程	66
综合训练	68
2.4 解一元二次方程	72
综合训练	73
2.5 解线性不定式	75
综合训练	76

2.6	函数	79
	综合训练	79
2.7	应用题	83
	综合训练	89
2.8	坐标几何	106
	综合训练	110
2.9	函数图像	119
	综合训练	121
第三节	几何 (Geometry)	123
3.1	直线和角	123
	综合训练	125
3.2	多边形	126
	综合训练	127
3.3	三角形	128
	综合训练	131
3.4	四边形	135
	综合训练	137
3.5	圆	140
	综合训练	143
3.6	三维图形	148
	综合训练	150
第四节	资料分析	153
4.1	描述数据的图形方法	153
	综合训练	160
4.2	描述数据的数值方法	193
	综合训练	199
4.3	统计方法	215
	综合训练	219
4.4	概率	228
	综合训练	232
4.5	资料分布, 随机变量和概率分布	237
	综合训练	244
4.6	数据分析示例	247

第二章 综合能力测试	252
第一套	252
第二套	260
第三套	268
第四套	277
第五套	285
第三章 综合能力测试答案解析	293
第一套答案解析	293
第二套答案解析	303
第三套答案解析	313
第四套答案解析	323
第五套答案解析	332
附录 GRE 数学词汇汇总	341

GRE 数学考试的基本说明

1. GRE 数学主要考查学生以下三种能力

- 基本数学技能
- 对基本数学概念的理解
- 定量推理，建模以及利用定量法解决问题的能力

2. GRE 数学基本注意事项

GRE 数学考试中使用的数学符号、术语和定律与高中阶段的标准用法相同，例如，数轴的正方向为右，距离不能为负，质数大于 1。如果题目中涉及非标准用法，则会附有详细说明。除了定律之外，GRE 数学部分还运用一些关于上面列出的数量和几何图形的重要假设：

- 所有使用的数字都是实数。
- 除非特殊说明，所有图示都应认为是在同一平面内。
- 几何图形，如线形、圆形、三角形及四边形等，并不一定按比例绘制。也就是说，长度和角度之类的数量与它们在图中显示的可能并不一致。但是，考生要知道，显示为直线的线条确实是直线，线上的点也按顺序显示，并且所有的几何对象都处于所显示的相对位置。对于那些与几何图形相关的问题，考生应该基于几何推理得到答案，而不是凭目测估计、比较数量或者通过度量来得出。
- 坐标系，例如平面直角坐标系(xy-plane)和实数线(中国习惯称为数轴(number line))，都是按比例绘制的。因此，考生可以通过目测或者度量来对这些图示进行阅读、估算或比较数量。
- 图形数据展示，例如条形图、圆形图和线性图，都是按比例绘制的。因此，考生可以通过目测或度量来对这些图示进行阅读、估算或比较数量。

3. GRE 数学的题目数量

GRE 数学一共包含 4 种题目类型，每个 section 共计 20 个题：

- 数量比较大小题(Quantitative Comparison Question)
- 单项选择题(Multiple-choice questions—Select One Answer Choice)
- 不定项选择题(Multiple-choice questions—Select One or More Answer Choices)
- 数字填入题(Numeric Entry questions)

注意：所有的题目都是单个题目或者资料分析题中的一系列题目（一般一个图对应 3 个小题）。在考试中，考生可以使用屏幕上自带的计算器。

(1) 数量比较大小题详细描述

这种类型的题目会让你比较两个数量—Quantity A 和 Quantity B—然后决定哪个选项描述了正确的大小关系。

- Quantity A is greater. (数量 A 更大)
- Quantity B is greater. (数量 B 更大)
- The two quantities are equal. (数量 A 和数量 B 相等)
- The relationship cannot be determined from the information given. (根据题目信息无法判断数量 A 和数量 B 的大小关系)

例：Quantity A Quantity B

56% of 380 210

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.

译：380 的 56% 和 210 谁大？

解：数量 A 是 $56\% \times 380 = 212.8 > 210$ ，因此数量 A 更大，所以答案选 A 选项。

答：A

(2) 单项选择题详细描述

这种类型的题目会有五个选项，然后题目要求你从五个选项中只选出一个选项。

例：If $5x + 30 = 2 - 2x$, what is the value of x ?

- A. -4
- B. -3
- C. 4
- D. 7
- E. 12

译：如果 $5x + 30 = 2 - 2x$ ，那么 x 的值是多少？

解：移项得 $7x = -28$ ，所以 $x = -4$ ，所以答案选 A 选项。

答：A

(3) 不定项选择题详细描述

这种类型的题目要求你选择一个或者更多的选项。注意正确答案可能只有一个，无论选项有多少个；另外，多选，少选，错选这个题都不给分。

例：Which of the following integers are multiples of both 2 and 3?

Indicate all such integers.

- A. 8
- B. 9
- C. 10
- D. 18
- E. 21
- F. 36

译：下面哪些整数是 2 和 3 的公倍数？选出所有这样的整数。

解：8 是 2 的倍数，但是不是 3 的倍数，所以 A 选项错误；9 是 3 的倍数，但不是 2 的倍数，所以 B 选项错误；10 是 2 的倍数，但不是 3 的倍数，所以 C 选项错误；18 既是 2 的倍数，也是 3 的倍数，所以 D 选项正确；21 是 3 的倍数，但不是 2 的倍数，所以 E 选项错；36 既是 2 的倍数也是 3 的倍数，所以 F 选项正确。

答：DF

(4) 数字填入图详细描述

这种类型的题目要求你在一个方框中填入一个整数或小数，或者要求你在两个方框中填入分数的分子和分母，用电脑的鼠标和键盘进行数字输入。

注意事项：

- 正确答案的相同形式的数字也算对，例如 2.5 和 2.50 都是对的；
- 分数不要求约分，但是需要保证数字填入方框中。

第一章 GRE 数学考试知识点精讲精练

第一节 算术(Arithmetic)

1.1 整数 (Integers)

1.11 整数 (Integers)

定义：整数(integer)就是数字 1, 2, 3 等等，还有它们的负数形式 -1 , -2 , -3 和 0 。因此，整数的集合为 $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ 。正整数大于 0 ，负整数小于 0 ， 0 既不是正数也不是负数，当整数之间进行加减乘的时候，所得的结果依然是整数。

整数基本词汇总结：正整数(positive integer)，负整数(negative integer)。整数运算的词汇总结：加(add, plus)，减(minus, subtract)，乘(multiply)，除(divide)，和(sum)，差(difference)，乘积(product)，商(quotient)。

三条基本性质：

- 两个正整数的乘积是一个正整数。
- 两个负整数的乘积是一个正整数。
- 一个正整数和一个负整数的乘积是一个负整数。

1.12 因数，因子和倍数 (Factor, Divisor and multiple)

定义：当一些整数相乘，每一个相乘的整数都被称为最终乘积的因数(factor)或者因子(divisor)。例如， $2 \times 3 \times 10 = 60$ ，那么 2, 3, 10 都是 60 的因数。另外 $(-2) \times (-3) = 6$ ，所以我们也把 -2 和 -3 称为 6 的因数。反过来我们也可以说 60 是 2, 3 和 10 的倍数(multiple)。下面是一些关于因数和倍数的例子：

- 100 的正因数是 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100。
- 25 是 6 个整数的倍数：1, 5, 25, -1 , -5 , -25 。
- 20 的倍数有无穷多个：20, 40, 60, 80...；而且每一个非 0 整数都有无数个倍数。
- 1 是每一个整数的因数：1 只能是 1 和 -1 的倍数而不能是别的整数的倍数。
- 0 是每一个整数的倍数；0 只是 0 的因数而不能是别的整数的因数。

1.13 最小公倍数和最大公约数 (Least common multiple and Greatest common divisor)

最小公倍数(least common multiple): 两个非零整数 a 和 b 的最小公倍数指的是 a 和 b 的共同倍数中最小的正整数。例如, 30 和 75 的共同倍数有 150, 300, 450..., 但是这其中最小的是 150, 所以我们说 150 是 30 和 75 的最小公倍数。

最大公约数(greatest common divisor or greatest common factor): 两个非零整数 a 和 b 的最大公约数是指 a 和 b 的共同的约数(divisor)中最大的正整数。例如 30 和 75 的共同约数有 15, 5, 3, 1, 而在这其中最大的是 15, 所以我们说 15 是 30 和 75 的最大公约数。

最小公倍数求法:

- ① 所有的数分别表示为各自的质因数的乘积;
- ② 如果所有的乘积中有公因数, 则将式子中相同的因子都提出来, 且只保留指数较大的一个因子作为公因数, 去掉其他乘积中指数较小的公因数;
- ③ 将剩下的乘积中的所有因数乘起来, 得到最小公倍数。

最大公约数求法:

- ① 所有的数分别表示为各自的质因数的乘积;
- ② 将式子中相同的质因子都提出来, 并取幂指数较小的一个作为其相应的公因数;
- ③ 将取出的公因数相乘, 就得到了最大公约数。

例: 求 64 和 72 的最小公倍数和最大公约数。

解: $64=2^6$, $72=2^3 \cdot 3^2$

所以最小公倍数 $=2^6 \times 3^2=576$, 最大公约数 $=2^3=8$ 。

1.14 商和余数 (Quotient and Remainder)

当两个整数相除且除不尽的时候, 结果可以写成一个分数, 也可以写成商(quotient)和余数(remainder)的形式, 且商和余数都必须是整数。在除法运算中, 我们有一个运算法则: 被除数 \div 除数 = 商 $\cdots \cdots$ 余数或被除数 = 除数 \times 商 + 余数。在这个算式中, 余数不能大于除数。所以我们可以说 $10 \div 3 = 3 \cdots \cdots 1$ 但是不能说 $10 \div 3 = 2 \cdots \cdots 4$ 。

补充: be divided by 和 be divisible by 的区别

很多学生在读到题目中有 be divided by 和 be divisible by 的时候容易搞混两个词组的用法, 一般来说无论是说 A is divided by B 还是说 A is divisible by B, 表达形式都是 $A \div B$ 。不过 A is divided by B 只是 A 除以 B, 但是无法知道是否除得尽, 但是 A is divisible by B 这种表达方式则表示 A 能够被 B 整除。

1.15 奇数和偶数 (Odd and Even Integer)

如果一个整数能够被 2 整除，那么这个数是偶数(even integer)；如果一个整数不能够被 2 整除，那么这个数是奇数(odd integer)，注意 0 是偶数。

其他注意事项：

- 两个偶数的和是一个偶数。
- 两个奇数的和是一个偶数。
- 一个偶数一个奇数的和是一个奇数。
- 两个偶数的乘积是一个偶数。
- 两个奇数的乘积是一个奇数。
- 一个偶数和一个奇数的乘积是一个偶数。

推论：

- 奇数个奇数相加减其结果必为奇数。
- 偶数个偶数相加减其结果必为偶数。
- 任意多个偶数相加减其结果必为偶数。
- 两个连续的正整数相乘必然为 2 的倍数，三个连续的正整数相乘必为 6 的倍数。

1.16 质数和合数 (Prime and Composite Number)

质数(prime number)指的是有且只有两个正因数(1 和数字本身)的正整数。前 10 个质数分别是 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29。合数(composite number)指的是正因数至少有 3 个的正整数，例如 4, 6, 8, 9, 10 这些数字的正因数都至少有 3 个。注意质数合数只研究正整数，负数和 0 不涉及这个概念；另外，1 既不是质数也不是合数。然后 ETS 还会经常考察这样一个概念：2 是唯一既是质数又是偶数的数字。

每一个比 1 大的正整数要不然是个质数要不然可以表达成几个质因数(prime factors or prime divisors)相乘的形式，这种把一个合数写成几个质因数相乘的形式的表达方式叫质因数分解(prime factorization)。例如： $36 = (2)(2)(3)(3) = 2^2 3^2$ ； $800 = (2)(2)(2)(2)(2)(5)(5) = 2^5 5^2$ 。

推论：任何一个大于 2 的偶数都可以表示为两个质数的和。

综合训练

1. $y < -6$

Quantity A: y Quantity B: -5

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

2. x is an integer greater than 3.

Quantity A: The number of even factors of $2x$ Quantity B: The number of odd factors of $3x$

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

3. What is the sum of the integers between -90 and 95 , inclusive?

- A. 5
 B. 185
 C. 465
 D. 4,275
 E. 4,560

1. 已知 $y < -6$, $A = y$, $B = -5$ 。

解: 因为 $y < -6$, 且 $-6 < -5$, 所以 $y < -5$ 。

答: B

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

2. 已知 x 是一个大于 3 的整数, A: $2x$ 的偶因数的个数, B: $3x$ 的奇因数的个数。

解: 本题我们通过举例的方法进行判断。令 $x=4$, 那么 $2x=8$, 其偶因数有 ± 2 , ± 4 和 ± 8 , 即 $A=6$; $3x=12$, 其奇因数有 ± 1 和 ± 3 , 即 $B=4$, 所以 $A > B$ 。令 $x=5$, 那么 $2x=10$, 其偶因数有 ± 2 和 ± 10 , 即 $A=4$; $3x=15$, 其奇因数有 ± 1 , ± 3 , ± 5 , ± 15 , 即 $B=8$, 所以 $A < B$ 。所以 A 和 B 的大小关系不确定。

答: D

3. -90 到 95 之间所有整数(包括 -90 和 95)的和是多少?

解: 本题不用将 186 个整数全部加起来进行计算, 我们发现从 -90 到 90 这之间所有整数加起来的和是等于 0 的, 所以我们只需要计算 $91+92+93+94+95=465$ 。

答: C

4. n is an odd integer between 2 and 10, and n is not a prime number.

Quantity A: n

Quantity B: 9

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

5. Quantity A: The number of different prime factors of 500

Quantity B: The number of different prime factors of 360.

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

6. When the positive integer x is divided by 42, the remainder is 19.

What is the remainder when x is divided by 7?

- A. 0
 B. 2
 C. 3
 D. 4
 E. 5

4. 已知 n 是 2 到 10 之间的一个奇数, 而且 n 不是质数, $A=n$, $B=9$ 。

解: 我们首先列举出 2 到 10 之间的奇数: 3, 5, 7, 9, 其中 3, 5, 7 均为质数, 9 不是质数, 即 $A=n=9$ 。

答: C

5. A: 500 的质因数的个数, B: 360 的质因数的个数。

解: 我们首先对 500 进行质因数分解, 得到 $500=2^2 \times 5^3$, 所以 500 一共有两个质因数 2 和 5, 所以 $A=2$ 。

对 360 进行质因数分解, 得到 $360=2^3 \times 3^2 \times 5$, 所以 360 一共有三个质因数 2, 3 和 5, 所以 $B=3$ 。综上 $B > A$ 。

答: B

6. 已知 x 除以 42 余数是 19, 那么 x 除以 7 的余数是多少?

解: 我们可以用表达式 $x=42k+19$ 来表示 x 除以 42 的余数为 19, 其中 k 为整数。 $x=42k+19=7 \cdot 6k+14+5=7 \cdot 6k+7 \times 2+5=7(6k+2)+5$, 其中 $(6k+2)$ 为整数, 所以 x 除以 7 的余数为 5。

答: E

7. Of the total number of students enrolled at University U in the fall of 2008, $\frac{3}{8}$ were sophomores and $\frac{1}{50}$ were biology majors. Which of the following could be the total number of students enrolled at University U in the fall of 2008?

Indicate all such numbers.

- A. 7000
- B. 7040
- C. 7050
- D. 7100
- E. 7125
- F. 7200

8. If n is any prime number greater than 2, which of the following CANNOT be a prime number?

- A. $n-4$
- B. $n-3$
- C. $n-1$
- D. $n+2$
- E. $n+5$

9. How many positive integers less than 100 have a remainder of 2 when divided by 13?

- A. 6
- B. 7
- C. 8
- D. 9
- E. 10

7. 在所有 2008 年秋季进入 U 大学学习的学生中 $\frac{3}{8}$ 的学生是大二的学生, $\frac{1}{50}$ 的学生学习生物专业。下列选项中, 哪些可能是 2008 年秋季 U 大学的入学人数?

请选择所有正确的选项。

解: 我们假设 2008 年秋季 U 大学的入学人数为 x , 由于学生人数一定是整数, 那么 $\frac{3}{8}x$ 和 $\frac{1}{50}x$ 一定为整数, 所以 x 一定既是 8 的倍数也是 50 的倍数, 即 x 一定是 8 和 50 最小公倍数的倍数。 $8=2^3$, $50=2 \times 5^2$, 所以 8 和 50 的最小公倍数就是 $2^3 \times 5^2 = 200$ 。通过计算, 我们可以得到 7000 和 7200 是 200 的倍数, 符合要求。

答: AF

8. 已知 n 是以大于 2 的质数, 那么下列选项中哪个不可能是质数?

解: 我们知道大于 2 的质数都是奇数, 即 n 大于等于 3, 所以 $n+5$ 是不小于 8 的偶数, 一定不是质数。 $n=7$ 时, 排除 A; $n=5$ 时排除 B; $n=3$ 时排除 C; $n=3$ 时排除 D。

答: E

9. 在小于 100 的整数中, 有多少整数除以 13 的余数是 2?

解: 除以 13 且余数是 2 的整数有 2, 15, 28, 41, 54, 67, 80, 93 共 8 个。

答: C

10. If x is an odd negative integer and y is an even integer, which of the following statements must be true?

- I. $(3x - 2y)$ is odd.
 - II. xy^2 is an even negative integer.
 - III. $(y^2 - x)$ is an odd negative integer.
- A. I only
B. II only
C. I and II
D. I and III
E. II and III

11. If x and y are positive integers, and 1 is the greatest common divisor of x and y , what is the greatest common divisor of $2x$ and $3y$?

- A. Cannot be determined
B. 1
C. 2
D. 5
E. 6

12. x and y are prime numbers and $x + y = 18$

Quantity A: xy

Quantity B: 70

- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.

10. 已知 x 是负奇数, y 是偶数。那么下列说法中哪些一定是正确的?

- I. $3x - 2y$ 是奇数
- II. xy^2 是负偶数
- III. $y^2 - x$ 是负奇数

解: I: 因为 x 是奇数, 那么 $3x$ 是奇数; 因为 y 是偶数, 那么 $2y$ 是偶数; 所以 $3x - 2y$ 是奇数, I 正确。

II: 当 $y=0$ 时, II 说法错误。

III: y^2 是正的, $-x$ 是正的, 所以 $y^2 - x$ 是正的。

综上, A 正确。

答: A

11. 已知 x 和 y 均为正整数, 且 1 是 x 和 y 的最大公因数, 那么 $2x$ 和 $3y$ 的最大公约数是多少?

解: 我们通过举例子说明: 当 $x=2$, $y=3$ 时, $2x=4$, $3y=9$, 所以最大公约数仍为 1; 当 $x=3$, $y=2$ 时, $2x=3y=6$, 即最大公约数为 6, 所以无法确定。

答: A

12. 已知 x 和 y 均是质数, 且 $x + y = 18$, $A = xy$, $B = 70$ 。

解: 这两个质数可能是 5 和 13 或者 7 和 11, 所以 xy 可能是 $5 \times 13 = 65$ 或者 $11 \times 7 = 77$, 所以 A 和 B 大小关系不确定。

答: D

13. Quantity A: Number of primes between 50 and 60

Quantity B: Number of primes between 80 and 90

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.

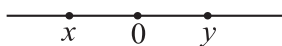
14. Quantity A: The number of prime numbers divisible by 13

Quantity B: The number of prime numbers divisible by 2

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.

15. **Note:** Figure not drawn to scale
If x and y are numbers on the number line above, which of the following statements must be true?

- I. $|x+y| < y$
 - II. $x+y < 0$
 - III. $xy < 0$
- A. I only
 - B. III only
 - C. I and II
 - D. I and III
 - E. II and III



13. A: 50 到 60 之间质数的个数; B: 80 到 90 之间质数的个数。

解: A 中有 53 和 59, B 中有 83 和 89, 都是两个, 所以 $A=B$ 。

答: C

14. A: 能被 13 整除的质数的个数; B: 能被 2 整除的质数的个数。

解: 能被 13 整除的质数只有 13, 能被 2 整除的质数只有 2, 所以 $A=B$ 。

答: C

15. **注意:** 下图不是按比例给出。

下面的数轴给出了 x 和 y , 下列说法哪个是正确的?

- I. $|x+y| < y$
- II. $x+y < 0$
- III. $xy < 0$

解: 我们通过数轴只能看出 x 和 y 的正负, 看不出 x 和 y 的具体数值, 所以 I 和 II 错误: 例如 $x=-8, y=2$, I 错误; $x=-2, y=2$, II 错误; 而通过数轴我们可以看出 $x < 0, y > 0$, 所以 $xy < 0$ 一定成立。

答: B

16. If k is the greatest positive integer such that 3^k is a divisor of $15!$, then $k =$
- A. 3 B. 4
C. 5 D. 6
E. 7

17. a and b are primes. $a+b=12$
- Quantity A: b
Quantity B: 8
- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.

18. n is an even integer.
- Quantity A: The number of prime factors of n
Quantity B: The number of prime factors of $\frac{n}{2}$
- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.

16. 如果 k 是使得 3^k 是 $15!$ 的因数最大的正整数, 那么 k 的值是多少?

解: 如果我们分解 $15!$, 会得到 3^6 这一项, 因为 $15!$ 中包括 3, 6, 9, 12, 15, 其中 $9=3^2$, 所以 $k=6$ 。

答: D

17. 已知 a 和 b 均为质数, 且 $a+b=12$ 。
A= b , B=8。

解: 我们假设 $b \geq 8$, 又因为 b 为质数, 所以 b 只能为 11, 此时 $a=1$ 不是质数, 所以 b 一定小于 8。根据试算, 我们可以得到 b 等于 5 或 7, 均小于 8, 也验证了我们的推论。

答: B

18. 已知 n 是一个偶数, A: n 的质因数的个数, B: $\frac{n}{2}$ 的质因数的个数。

解: 当 n 为 4 的倍数时, 两者相同: 令 $n=4k=2^2 \cdot k$, 所以 n 的质因数有: 2, k 的所有质因数; $\frac{n}{2}=2 \cdot k$, 所以 $\frac{n}{2}$ 的质因数也是有: 2, k 的所有质因数, 即 n 和 $\frac{n}{2}$ 的质因数是完全一样的, $A=B$ 。但如果 n 不是 4 的倍数时, 我们令 $n=2 \cdot k$ (k 为奇数), 所以 n 的质因数有: 2, k 的所有质因数; 而 $\frac{n}{2}$ 的质因数只有 k 的所有质因数, 少了一个质因子 2, 所以 $A > B$ 。所以 A 和 B 的大小关系不确定。

答: D

19. Quantity A: The number of primes that are divisible by 9

Quantity B: The number of primes that are divisible by 19

A. Quantity A is greater.

B. Quantity B is greater.

C. The two quantities are equal.

D. The relationship cannot be determined from the information given.

20. In a certain medical group, Dr. Schwartz schedules appointments to begin 30 minutes apart, Dr. Ramirez schedules appointments to begin 25 minutes apart, and Dr. Wu schedules appointments to begin 50 minutes apart. All three doctors schedule their first appointments to begin at 8:00 in the morning, which are followed by their successive appointments throughout the day without breaks. Other than at 8:00 in the morning, at what times before 1:30 in the afternoon do all three doctors schedule their appointments to begin at the same time?

Indicate all such times

A. 9:30 in the morning

B. 10:30 in the morning

C. 11:30 in the morning

D. 12:00 noon

E. 1:00 in the afternoon

19. A: 被 9 整除的质数的数量, B: 被 19 整除的质数的数量。

解: 被 9 整除的质数即是 9 的倍数的质数, 那么 9 的倍数的因数至少有 1, 3, 9 这三个, 根据质数的定义, 这样的质数是不存在的, 即不存在被 9 整除的质数, $A=0$ 。因为 19 本身就为质数, 且 19 是本身的倍数 ($19 \times 1 = 19$), 那么 19 本身就是被 19 整除的质数, 即 $B=1$, 所以 $B > A$ 。

答: B

20. 在一个医疗组中, 医生 Schwartz 每 30 分钟有一次预约, 医生 Ramirez 每 25 分钟有一次预约, 医生 Wu 每 50 分钟有一次预约。三位医生都从 8 点开始预约, 之后开始不间断不休息地进行预约。除了早晨 8 点这一时间点, 在下列给出的时间点上, 还有哪些时间点三位医生同时进行预约? 请选择所有正确的答案。

A. 早上 9:30

B. 早上 10:30

C. 早上 11:30

D. 中午 12:00

E. 中午 1:00

解: 我们首先计算这三个时间的最小公倍数, 也就是 150 分钟。也就是说每 2.5 小时这三个医生会同时开始一项新的预约。在选项中, 10:30 和 13:00 这两个时间点他们三个会同时开始新的预约。

答: BE

21. A student made a conjecture that for any integer n , the integer $4n + 3$ is a prime number. Which of the following values of n could be used to disprove the student's conjecture?

Indicate all such values.

- A. 1
- B. 3
- C. 4
- D. 6
- E. 7

22. On a radio tower, a red light flashes every 6 seconds and a blue light flashes every 10 seconds. If both lights flash together at a certain time, how many seconds later will both lights flash together the next time?

21. 解：有一个学生做出了一个假设：对于任意整数 n ，整数 $4n + 3$ 是一个质数。那么下列 n 的值中，哪些可以用来反驳该学生的假设？选出所有正确答案。

解：我们把每个选项代入求出 $4n + 3$ 不是质数即可。 $n = 1$ 时， $4n + 3 = 7$ 是质数； $n = 3$ 时， $4n + 3 = 15$ 不是质数； $n = 4$ 时， $4n + 3 = 19$ 是质数； $n = 6$ 时， $4n + 3 = 27$ 不是质数； $n = 7$ 时， $4n + 3 = 31$ 是质数。

答：BD

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

22. 在一无线电塔上，红色的灯每 6 秒闪一次，蓝色的灯每 10 秒闪一次。如果某一时间点亮灯同时闪烁，那么多少秒之后两个灯会再次同时闪烁？

解：本题就是寻找 6 和 10 的最小公倍数。我们对 6 和 10 进行质因数分解： $6 = 2 \times 3$ ， $10 = 2 \times 5$ ，所以 6 和 10 的最小公倍数为 $2 \times 3 \times 5 = 30$ ，所以 30 秒后亮灯会再次同时闪烁。

答：30

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

23. If x and y are integers and $x = \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13}{39y}$, which

of the following could be the value of y ?

- A. 15
- B. 28
- C. 38
- D. 64
- E. 143

23. 已知 x 和 y 均是整数, 且 $x = \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13}{39y}$, 那么下列

选项中哪一项可能是 y 的值?

解: $x = \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13}{39y} =$

$\frac{2 \times 4 \times 5 \times 7 \times 11}{y}$, 所以 y 一定是 2

$\times 4 \times 5 \times 7 \times 11$ 的因子。接下来我们对选项注意分析:

A. 15 是 3 的倍数, 而 $2 \times 4 \times 5 \times 7 \times 11$ 中不含 3 这个因子, 所以 A 选项错误;

B. $28 = 4 \times 7$, 所以 28 是 $2 \times 4 \times 5 \times 7 \times 11$ 的因子, 所以 B 选项正确;

C. $38 = 2 \times 19$, $2 \times 4 \times 5 \times 7 \times 11$ 中不含 19 这一因子, 所以 C 选项错误;

D. $64 = 4 \times 16$, $2 \times 4 \times 5 \times 7 \times 11$ 中不含 16 这一因子, 所以 D 选项错误;

E. $143 = 11 \times 13$, $2 \times 4 \times 5 \times 7 \times 11$ 中不含 13 这一因子, 所以 E 选项错误。

答: B

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

24. Two different positive integers x and y are selected from the odd integers that are less than 10. If $z = x + y$ and z is less than 10, which of the following integers could be the sum of x , y , and z ? Indicate all such integers.

- A. 8
- B. 9
- C. 10
- D. 12
- E. 14
- F. 15
- G. 16
- H. 18

25. What is the least positive integer that is not a factor of $25!$ and is not a prime number?

- A. 26
- B. 28
- C. 36
- D. 56
- E. 58

24. 从小于 10 的奇数中选出两个不同的正整数 x 和 y , 如果 $z = x + y$, 且 $z < 10$, 那么下列选项中哪些可能是 x , y 和 z 的和? 请选择所有正确的答案。

解: $x + y + z = 2z$, 因为 x 和 y 均是奇数, 所以 $z = x + y$ 是偶数, 所以 $2z$ 一定是 4 的倍数, 所以 BCEFH 选项排除。

A. 令 $x = 1, y = 3, z = 4$, 此时 $x + y + z = 8$, A 选项成立;

D. 令 $x = 1, y = 5, z = 6$, 此时 $x + y + z = 12$, D 选项成立;

G. 令 $x = 1, y = 7, z = 8$, 此时 $x + y + z = 16$, G 选项成立;

答: ADG

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

25. 最小的既不是 $25!$ 的因数也不是质数的正整数是多少?

解: 观察选项我们看出五个选项都是合数, 所以我们只关注第一个条件即可。我们把每个选项都进行分解, 如果分解掉的数字都出现在 $1 - 25$ 中且不重复, 那就不符合条件。 $26 = 2 \times 13$, $28 = 2 \times 14$, $36 = 3 \times 12$, $56 = 7 \times 8$ 这四项都不符合条件, $58 = 2 \times 29$, 其中 29 不在 $1 - 25$ 中符合要求, 即 E 正确。

答: E

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

26. If j and k are even integers and $j < k$, which of the following equals the number of even integers that are greater than j and less than k ?

- A. $(k-j-2)/2$
- B. $(k-j-1)/2$
- C. $(k-j)/2$
- D. $k-j$
- E. $k-j-1$

27. If $2x=3y=4z=20$, then $12xyz=$

- A. 16,000
- B. 8,000
- C. 4,000
- D. 800
- E. 10

28. If $a < b < 0$, which of the following numbers must be positive?

Indicate all such numbers.

- A. $a-b$
- B. a^2-b^2
- C. ab
- D. a^2b
- E. a^2b+ab^2

26. 已知 j 和 k 都是偶数, 且 $j < k$, 那么下列选项中哪一项代表 j 和 k 之间的偶数的数量?

解: 因为 j 和 k 都是偶数, 那么 $\frac{j}{2}$ 和 $\frac{k}{2}$ 均为整数。求 j 和 k 之间的偶数的数量就等于求 $\frac{j}{2}$ 和 $\frac{k}{2}$ 之间整数的数量 (不包括 $\frac{j}{2}$ 和 $\frac{k}{2}$), 那么一共有 $\frac{k}{2} - \frac{j}{2} - 1 = \frac{k-j-2}{2}$ 。

答: A

27. 已知 $2x=3y=4z=20$, 那么 $12xyz$ 的值是多少?

解: 因为 $2x=3y=4z=20$, 所以 $2x \cdot 3y \cdot 4z = 24xyz = 20^3 = 8000$, 所以 $12xyz = \frac{1}{2} \cdot 24xyz = \frac{1}{2} \times 8000 = 4000$ 。

答: C

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

28. 已知 $a < b < 0$, 那么下列选项哪些一定为正? 请选出所有正确答案。

解: 因为 $a < b$, 所以 $a-b < 0$, A 选项错误;
因为 $a < b < 0$, 所以 $|a| > |b|$, 所以 $a^2 > b^2$, 所以 $a^2 - b^2 > 0$, B 选项正确;
因为 a 和 b 均为负数, 所以 $ab > 0$, C 选项正确;
因为 $a < 0$, 所以 $a^2 > 0$; 又因为 $b <$

29. If x and y are integers, and $w = (x^2)y + x + 3y$, which of the following statements must be true?

Indicate all such statements.

- A. If w is even, then x must be even.
- B. If x is odd, then w must be odd.
- C. If y is odd, then w must be odd.
- D. If w is odd, then y must be odd.

0, 所以 $a^2b < 0$, 所以 D 选项错误;
 $a^2b + ab^2 = ab(a+b)$, 因为 $ab > 0$,
 $a + b < 0$, 所以 $a^2b + ab^2 = ab(a+b) < 0$, E 选项错误。

答: BC

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

29. 如果 x 和 y 都是整数, 且 $w = (x^2)y + x + 3y$, 那么下列选项哪些是正确的? 请选择所有正确的答案。

- A. 如果 w 是偶数, 那么 x 一定是偶数。
- B. 如果 x 是奇数, 那么 w 一定是奇数。
- C. 如果 y 是奇数, 那么 w 一定是奇数。
- D. 如果 w 是奇数, 那么 y 一定是奇数。

解: 原式可以化简为 $w = (x^2 + 3)y + x$, 分类讨论即可。

若 x 为奇数, 那么 $x^2 + 3$ 为偶数, 所以 $(x^2 + 3)y$ 为偶数, 则 w 为奇数;

若 x 为偶数, 那么 $x^2 + 3$ 为奇数;

当 y 为偶数时, $(x^2 + 3)y$ 为偶数, w 为偶数;

当 y 为奇数时, $(x^2 + 3)y$ 为奇数, w 为奇数。

根据上述讨论结果, ABC 均正确。

答: ABC

1.2 分数 (Fraction)

分数(fraction)就是 $\frac{a}{b}$ 这样一个数字, 其中 a 和 b 都是整数且 $b \neq 0$ 。整数 a 被称为分子(numerator), 整数 b 被称为分母(denominator)。例如 $\frac{7}{5}$ 是一个分数, 7是分子, 5是分母, 这种分数也是有理数(rational number)。

如果 $\frac{a}{b}$ 的分子和分母同时乘以一个相等的非零整数(nonzero integer), 那么最终的分数与 $\frac{a}{b}$ 是相等的。例如 $\frac{7}{5} = \frac{7 \times 4}{5 \times 4} = \frac{28}{20}$ 。

如果 $\frac{a}{b}$ 的分子或者分母有一个是负数, 那么负号可以移到分数的前面, 例如 $-\frac{7}{5} = -\frac{7}{5} = \frac{7}{-5}$ 。如果分数的分子和分母有一个共同的因数, 那么分子分母可以约分(reduce)到一个相等的分数, 例如 $\frac{30}{40} = \frac{4 \times 10}{3 \times 10} = \frac{3}{4}$ 。

分数运算法则:

1. 加法 (Addition)

如果两个分数的分母相等, 那么直接把分子相加, 分母保持不变。例如 $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$ 。如果两个分数的分母不相等, 那么要先找公分母(common denominator), 公分母就是分母的公倍数, 一般就是习惯用最小公倍数然后把两个分数都变成分母为公分母的分数, 再把分子相加。例如 $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{1 \times 5}{3 \times 5} + \frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15}$ 。

2. 减法 (Subtraction)

分数减法的运算法则和加法完全一致。

3. 乘法 (Multiplication)

两个分数相乘, 直接把两个分数的分子相乘作为最终的分子, 分母相乘作为最终的分母。例如 $\frac{10}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{10 \times 1}{7 \times 3} = \frac{10}{21}$; $\frac{7}{3} \times \frac{8}{3} = \frac{7 \times 8}{3 \times 3} = \frac{56}{9}$ 。

4. 除法 (Division)

两个分数相除等于第一个分数乘以第二个分数的倒数(reciprocal), 然后再按照分数的乘法进行下一步运算。例如 $\frac{4}{13} \div \frac{4}{5} = \frac{4}{13} \times \frac{5}{4} = \frac{4 \times 5}{13 \times 4} = \frac{5}{13}$ 。如果一个分数既有整数部分又有分数部分, 那么这个分数叫带分数(mixed number)。例如 $4\frac{3}{8} = 4 + \frac{3}{8}$ 。

综合训练

1. If $\frac{3x}{2} = \frac{5}{7y}$ and $\frac{3y}{5} = \frac{a}{x}$, what is the value of a ?

Give your answer as a fraction.

$a = -$

2. Which of the following pairs of integers have reciprocals whose sum is either less than $\frac{1}{3}$ or greater than $\frac{1}{2}$? Indicate all such answers.

- A. 1, 14
B. 3, 12
C. 5, 10
D. 7, 8

1. 如果 $\frac{3x}{2} = \frac{5}{7y}$ 而且 $\frac{3y}{5} = \frac{a}{x}$, 那么 a 等于多少?

请用分数形式给出答案。 $a = -$

解: 我们利用交叉相乘法处理两个等式。

$$\frac{3x}{2} = \frac{5}{7y} \rightarrow 21xy = 10, \text{ 即 } xy = \frac{10}{21}.$$

$$\frac{3y}{5} = \frac{a}{x} \rightarrow 3xy = 5a, \text{ 即 } xy = \frac{5a}{3}, \text{ 所以}$$

$$\frac{5a}{3} = \frac{10}{21}, \text{ 解得 } a = \frac{2}{7}.$$

2. 下面给出的整数对中, 哪些整数对它们的倒数之和小于 $\frac{1}{3}$ 或者大于 $\frac{1}{2}$?

选择所有正确的答案。

解: 本题我们只需要把每个选项都进行计算即可。

A. $\frac{1}{1} + \frac{1}{14} = \frac{15}{14} > \frac{1}{2}$, 符合条件。

B. $\frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12} \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, 不符合条件。

C. $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10} < \frac{1}{3}$, 符合条件。

D. $\frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{15}{56} < \frac{1}{3}$, 符合条件。

答: ACD

3. s , t , and u are integers, and $10 \leq s < t < u \leq 20$.

Quantity A: $s + \frac{t}{u}$

Quantity B: 11

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

4. Of the students in a certain group, 22 percent are juniors and 26 percent are seniors.

Quantity A: The ratio of the number of juniors in the group to the number of seniors in the group.

Quantity B: $\frac{4}{5}$

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

3. 已知 s , t , u 均是整数, 而且 $10 \leq s < t < u \leq 20$ 。

A: $s + \frac{t}{u}$, B: 11

解: 本题我们可以通过举例的方法进行计算。令 $s=10$, $t=11$, $u=12$, 那么 $s + \frac{t}{u} = 10 + \frac{11}{12} < 11$, 即 $A < B$ 。令 $s=11$, $t=12$, $u=13$, 那么 $s + \frac{t}{u} = 11 + \frac{12}{13} > 11$, 即 $A > B$ 。综上, 我们可以知道 A, B 大小关系不确定。

答: D

4. 在一组学生中, 有 22% 是大三的学生, 有 26% 是大四的学生。A: 大三学生人数与大四学生人数的比值, B: $\frac{4}{5}$ 。

解: 我们令这组学生共有 x 人, 那么大三学生共有 $22\%x$ 人, 大四学生共有 $26\%x$ 人, 所以 $A = \frac{22\%x}{26\%x} = \frac{11}{13} \approx 0.84 > \frac{4}{5}$, 即 $A > B$ 。

答: A

5. In year Y, the population of Colorado was approximately half that of New Jersey, and the land area of Colorado was approximately 14 times that of New Jersey. The population density (number of persons per unit of land area) of Colorado in year Y was approximately how many times the population density of New Jersey?

- A. $\frac{1}{28}$
- B. $\frac{1}{14}$
- C. $\frac{1}{7}$
- D. $\frac{1}{4}$
- E. $\frac{1}{2}$

6. If $0 < a < 1 < b$, which of the following is true about the reciprocals of a and b ?

- A. $1 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
- B. $\frac{1}{a} < 1 < \frac{1}{b}$
- C. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 1$
- D. $\frac{1}{b} < 1 < \frac{1}{a}$
- E. $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 1$

5. 在 Y 年, Colorado 的人口数量大约是 New Jersey 的一半, Colorado 的土地面积大约是 New Jersey 的 14 倍。那么 Colorado 的人口密度是 New Jersey 的多少倍?

解: 设 New Jersey 人口数量为 x , 土地面积为 y , 所以 New Jersey 的人口密度是 $\frac{x}{y}$; Colorado 的人口数量是 $\frac{1}{2}x$, 土地面积为 $14y$, 所以 Colo-

rado 的人口密度是 $\frac{\frac{1}{2}x}{14y} = \frac{x}{28y}$ 。所以 Colorado 的人口密度是 New Jersey 的 $\frac{\frac{x}{28y}}{\frac{x}{y}} = \frac{1}{28}$ 倍。

答: A

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

6. 已知 $0 < a < 1 < b$, 那么下列关于 a 和 b 的倒数哪一项是正确的?

解: 一个分数中, 当分子相同, 且分母均为正数时, 分母越大该分数越小。因为 $0 < a < 1 < b$, 所以 $\frac{1}{b} < 1 < \frac{1}{a}$, 即 D 选项正确。

答: D

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

7. Runner A ran $\frac{4}{5}$ kilometer and

Runner B ran 800 meters.

Quantity A: The distance that A ran

Quantity B: The distance that B ran

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

8. Which of the following operations carried out on both the numerator and the denominator of a fraction will always produce an equivalent fraction?

Indicate all such operations.

- A. Adding 2
 B. Multiplying by 5
 C. Dividing by 100

7. 已知 A 跑了 $\frac{4}{5}$ 公里, B 跑了 800 米。

A: A 跑的距离;

B: B 跑的距离。

解: 1 公里 = 1000 米, 所以 A 跑了 $1000 \times \frac{4}{5} = 800$ 米, 即 A 和 B 跑的距离相等。

答: C

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

8. 下列运算中, 如果同时对分子和分母进行这样的运算, 分数的大小不改变? 请选择所有正确答案。

- A. 加 2
 B. 乘 5
 C. 除以 10

解: 我们知道分数中分子和分母同时进行乘除运算不改变分数大小, 所以 BC 选项正确。

答: BC

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

1.3 幂指数和根 (Exponents and Roots)

幂指数(exponents)用来表示一个数字重复相乘。例 $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$ 。而 $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$ 。在 5^3 这个表达式中, 5 被称为底数(base), 3 被称为幂指数。当幂指数为 2 的时候, 我们一般称为平方(process squaring), 例如 $6^2 = 6 \times 6 = 36$ 。

负数的偶数次幂(even power)是正数; 负数的奇数次幂(odd power)是负数。例如 $(-3)^2 = 9$, $(-3)^3 = -27$ 。另外注意, $-3^2 = -9 \neq (-3)^2$, $-3^3 = (-3)^3 = -27$ 。

一些重要的性质:

- 对于任何非零数字 a , $a^0 = 1$, 0^0 是没有意义的。

• 对于任何非零数字 a , $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$, 以此类推。 $a \times a^{-1} = a \times \frac{1}{a} = 1$ 。

补充: ETS 比较爱考的整数 n 次幂的个位数特征

- 个位数为 2 的数的幂的个位数一定以 2, 4, 6, 8 循环。
- 个位数为 3 的数的幂的个位数一定以 3, 9, 7, 1 循环。
- 个位数为 4 的数的幂的个位数一定以 4, 6 循环。
- 个位数为 6 的数的幂的个位数一定是 6。
- 个位数为 7 的数的幂的个位数一定以 7, 9, 3, 1 循环。
- 个位数为 8 的数的幂的个位数一定以 8, 4, 2, 6 循环。
- 个位数为 9 的数的幂的个位数一定以 9, 1 循环。

例: 3^{283} 的个位数字是几?

解: $283 = 280 + 3 = 4 \times 70 + 3$, 说明刚好是在 70 个 3, 9, 7, 1 的循环之后的第三个数字, 所以个位数应该是 7。

非零数字 n 的平方根(square root)指的是数字 r 能够使得 $r^2 = n$ 。例如 4 是 16 的平方根, 因为 $4^2 = 16$ 。

补充:

- 所有正数都有两个平方根, 一个正的一个负的。
- 0 的唯一平方根是 0。

例如 $\sqrt{100} = 10$, $-\sqrt{100} = -10$, $\sqrt{0} = 0$ 。

下面是一些重要的平方根运算法则, 其中 $a > 0$, $b > 0$ 。

- $(\sqrt{a})^2 = a$
- $\sqrt{a^2} = a$
- $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$
- $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

例如: $(\sqrt{3})^2 = 3$, $\sqrt{3^2} = 3$, $\sqrt{3}\sqrt{4} = \sqrt{12}$, $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$

$\sqrt[n]{n}$ 表示 n 的平方根, 类似有 $\sqrt[3]{n}$ 表示 n 的立方根(cube root), $\sqrt[4]{n}$ 表示 n 的四次方根(fourth root)。

- 负数有且仅有一个奇数次方根。例如 $\sqrt[3]{-8} = -2$ 。
- 负数没有偶数次方根。例如 $\sqrt[2]{-8}$ 在实数范围内是没有意义的。
- 整数有且只有一个奇数次方根。例如 $\sqrt[3]{8} = 2$ 。

- 正数有两个偶数次方根。例如 $\sqrt[2]{4}=2$, $-\sqrt[2]{4}=-2$, 因为 $(\pm 2)^2=4$ 。

综合训练

1. $R=2^{16} \times 5^{34} \times N^{50}$

N is a positive integer

Quantity A: \sqrt{R}

Quantity B: $\frac{R}{10}$

1. $R=2^{16} \times 5^{34} \times N^{50}$, N 是正整数。 $A = \sqrt{R}$, $B = \frac{R}{10}$ 。

解: $A = \sqrt{R} = \sqrt{2^{16} \times 5^{34} \times N^{50}} = 2^8 \times 5^{17} \times N^{25}$

$$B = \frac{R}{10} = \frac{2^{16} \times 5^{34} \times N^{50}}{10} = 2^{15} \times 5^{33} \times N^{50}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{2^{15} \times 5^{33} \times N^{50}}{2^8 \times 5^{17} \times N^{25}} = 2^7 \times 5^{16} \times N^{25}$$

因为 N 是正整数, 所以 $\frac{B}{A} =$

$$\frac{2^{15} \times 5^{33} \times N^{50}}{2^8 \times 5^{17} \times N^{25}} = 2^7 \times 5^{16} \times N^{25} > 1.$$

所以 $B > A$ 。

答: B

2. Which of the following equals to

(8)(72)⁻⁵?

A. 8⁻⁴

B. 8⁻⁵

C. $\frac{(72)^{-4}}{9}$

D. $\frac{(72)^{-5}}{8}$

E. $\frac{(72)^{-6}}{9}$

2. 下列哪个选项与 8×72^{-5} 大小相等?

解: 显然, 我们能够看出 A、B 选项是错误的。我们把 C、D、E 选项写成类似题目中表达式的形式。

$$C: \frac{(72)^{-4}}{9} = \frac{8^{-4} \times 9^{-4}}{9} = 8^{-4} \times 9^{-5} \\ = 8 \times 8^{-5} \times 9^{-5} = 8 \times 72^{-5}$$

$$D: \frac{(72)^{-5}}{8} = \frac{8^{-5} \times 9^{-5}}{8} = 8^{-6} \times 9^{-5} \\ = 8^{-1} \times 72^{-5} \neq 8 \times 72^{-5}$$

$$E: \frac{(72)^{-6}}{9} = \frac{8^{-6} \times 9^{-6}}{9} = 8^{-6} \times 9^{-7} \\ = 8^{-1} \times 9^{-2} \times (72)^{-5} \neq (8)(72)^{-5}$$

答: C

3. If n is a positive odd integer and $k = n^3 + 2n$, what is the value of $(-1)^k - (-1)^{k+1}$?

- A. -2
- B. -1
- C. 0
- D. 1
- E. 2

4. What is the remainder when 3^{283} is divided by 5?

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3
- E. 4

5. Quantity A: 27^{-8}

Quantity B: 81^{-6}

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.

6. m and n are integers.

Quantity A: $(\sqrt{10^{2m}})(\sqrt{10^{2n}})$

Quantity B: 10^{mn}

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.

3. 已知 n 是正奇数, $k = n^3 + 2n$, 那么 $(-1)^k - (-1)^{k+1}$ 等于多少?

解: 因为 n 是正奇数, 所以 n^3 为奇数, 所以 $2n$ 为偶数, 所以 k 为奇数, $k+1$ 为偶数, 所以 $(-1)^k = -1$, $(-1)^{k+1} = 1$, 所以 $(-1)^k - (-1)^{k+1} = -2$ 。

答: A

4. 3^{283} 除以 5 的余数是多少?

解: 我们应该已经熟练地掌握了 3 的次方的个位数的规律, 3^{283} 的个位数为 7, 7 被 5 除后余数是 2。

答: C

5. $A = 27^{-8}$, $B = 81^{-6}$ 。

解: 显然 27 和 81 都是 3 的幂次方, 所以我们将 A 和 B 都改写为以 3 为底数的形式。 $27^{-8} = (3^3)^{-8} = 3^{-24}$, $81^{-6} = (3^4)^{-6} = 3^{-24}$, 显然 A 和 B 相等。

答: C

6. 已知 m 和 n 均为整数, $A = (\sqrt{10^{2m}})(\sqrt{10^{2n}})$, $B = 10^{mn}$ 。

解: $A = (\sqrt{10^{2m}})(\sqrt{10^{2n}}) = 10^m \cdot 10^n = 10^{m+n}$, 因为 $m+n$ 与 mn 的大小不确定, 所以 A 与 B 的大小关系不确定。

答: D

7. If x is a positive integer such that the units digit of x^3 is 3, what is the units digit of x^{15} ?

- A. 1
- B. 3
- C. 5
- D. 7
- E. 9

8. Quantity A: $(-1)^n(-1)^{n+2}$
Quantity B: 1

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.

9. Which of the following are equal to $(1/560)^{-4}$?

Indicate all correct answers.

- A. $(560^5 - 560^4)/559$
- B. $560^{-8}/560^2$
- C. $70^4 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{-4}$
- D. $(560^{16})^{0.5}$

7. 已知 x 是正整数, 而且 x^3 的个位数是 3, 那么 x^{15} 的个位数是多少?

解: $x^{15} = (x^3)^5$, 所以 x^{15} 的个位数就是 $(x^3)^5$ 的个位数也就是 3^5 的个位数。我们知道 3^n 的个位数排列顺序依次为 3, 9, 7, 1, 那么 3^5 的个位数也就是 3。

答: B

8. 已知 n 是一个整数, $A = (-1)^n(-1)^{n+2}$, $B = 1$ 。

解: $A = (-1)^n(-1)^{n+2} = (-1)^{n+(n+2)} = (-1)^{2n+2}$, 因为 n 为整数, 所以 $2n+2$ 为偶数, A 恒为 1, 即 $A = B$ 。

答: C

9. 下列选项中, 哪些等于 $(1/560)^{-4}$? 请选择所有正确答案。

解: $(1/560)^{-4} = 560^4$,

$$A = (560^5 - 560^4)/559 = \frac{560^4(560-1)}{559} = 560^4, \text{ 所以 A 选项}$$

正确;

$$B = 560^{-8}/560^2 = 560^{-10} \neq 560^4, \text{ B 选项错误;}$$

$$C = 70^4 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{-4} = 70^4 \cdot 8^4 = 560^4,$$

C 选项正确;

$$D = (560^{16})^{0.5} = 560^{16 \times 0.5} = 560^8, \text{ D 选项错误。}$$

答: AC

10. r and t are consecutive integers and $p=r^2+t$

Quantity A: $(-1)^p$

Quantity B: -1

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

11. Quantity A: $\frac{3^{-1}}{4^{-1}}$

Quantity B: $\frac{4}{3}$

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

12. Which of the following is closest to $\sqrt{2.3 \times 10^9}$?

- A. 50,000
 B. 150,000
 C. 500,000
 D. 1,500,000
 E. 5,000,000

10. r 和 t 是连续的整数, 且 $p=r^2+t$, $A=(-1)^p$, $B=-1$ 。

解: 假设 r 是奇数, 那么 t 是偶数。奇数的平方仍为奇数, 所以 $p=r^2+t=$ 奇+偶=奇, 所以 $(-1)^p=-1$ 。如果 r 是偶数, 那么 t 是奇数, 偶数的平方仍为偶数, 所以 $p=r^2+t=$ 偶+奇=奇, 所以 $(-1)^p=-1$ 。综上所述, $A=B$ 。

答: C

11. $A=\frac{3^{-1}}{4^{-1}}$, $B=\frac{4}{3}$ 。

解: $A=\frac{3^{-1}}{4^{-1}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}=B$ 。

答: C

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

12. 下列选项中, 那一项最接近 $\sqrt{2.3 \times 10^9}$?

解: $\sqrt{2.3 \times 10^9} = \sqrt{2.3 \times 10^8 \times 10} = 10^4 \times \sqrt{23} \approx 4.86 \times 10^4 = 48,600$, 所以最接近的是 50,000。

答: A

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

13. $N = 824^x$, where x is a positive integer.

Quantity A: the number of possible values the units digit of N

Quantity B: 4

A. Quantity A is greater.

B. Quantity B is greater.

C. The two quantities are equal.

D. The relationship cannot be determined from the information given.

14. If n is an integer, what is the least possible value of $3^n + 3 \times 3^{-n}$

A. 1

B. 2

C. 3

D. $3\frac{1}{3}$

E. 4

13. 已知 $N = 824^x$, 且 x 是正整数。A: N 的不同的个位数的数量, B: 4。

解: 824^x 的个位数等价于 4^x 的个位数, 我们知道 4^x 的个位数是 4, 6 交替的, 所以 824^x 的个位数只有两个 (the number of 问的是个数), 即 $A < B$ 。

答: B

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

14. 已知 n 是整数, 那么表达式 $3^n + 3 \times 3^{-n}$ 的最小值是多少?

解: 在这里我们介绍一个常用的不等式: 当 a, b 均大于 0 时, $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 。这个不等式的证明非常简单, 当 a, b 均大于 0 时, $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, 展开后得到 $a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$ 即 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, 当且仅当 $a = b$ 时取得等号。我们在此题中运用这一不等式, $3^n + 3 \times 3^{-n} \geq 2\sqrt{3^n \cdot 3 \times 3^{-n}} = 2\sqrt{3} \approx 3.4$, 观察选项可以看出 A、B、C、D 都是小于 3.4 的, 所以答案只可能是 E。

当然本题也可以通过列举几项找出规律:

$n=0$ 时, $3^n + 3 \times 3^{-n} = 3^0 + 3 \times 3^0 = 1 + 3 = 4$;

$n=1$ 时, $3^n + 3 \times 3^{-n} = 3^1 + 3 \times 3^{-1} = 3 + 1 = 4$;

$n \geq 2$ 时, $3^n \geq 9$, 所以 $3^n + 3 \times 3^{-n} > 4$, 即 $n \geq 2$ 时 $3^n + 3 \times 3^{-n}$ 无法取得最小值;

$n \leq -1$ 时, $-n \geq 1$, $3^{-n} \geq 3$, $3 \times 3^{-n} \geq 9$, 所以 $3^n + 3 \times 3^{-n} > 4$, 即 $n \leq -1$ 时 $3^n + 3 \times 3^{-n}$ 无法取得最小值。综上在 $n=0$ 或 1 时 $3^n + 3 \times 3^{-n}$ 取得最小值, 最小值为 4。

答: E

15. Quantity A:

$$\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}}{4}$$

Quantity B: 21。

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

16. $m = 10^{32} + 2$, when m is divided by 11, the remainder is r .

Quantity A: r

Quantity B: 3

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

$$15. A = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}}{4},$$

B = 21。

$$\text{解: } A = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}}{4} = \frac{4 + 16 + 64}{4} = 21, \text{ 所以 } A = B.$$

答: C

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

16. $m = 10^{32} + 2$, 当 m 除以 11 时, 余数为 r 。A = r , B = 3。

解: $10^{32} + 2 = 999 \cdots 99 + 3$, 前面的 $999 \cdots 99$ 中共有 32 个 9, 它是 11 的倍数, 那么 $10^{32} + 2$ 除以 11 的余数为 3。即 $A = B$ 。

答: C

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

17. $r = 2, s = -7$

Quantity A: $(r-s)^4$

Quantity B: $r^4 - s^4$

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

18. Quantity A: $\sqrt[3]{270} - \sqrt[3]{10}$

Quantity B: $\sqrt[3]{80}$

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

19. If
- c
- and
- d
- are odd positive integers, which of the following could be odd?

Indicate all such expressions.

- A. c^d
 B. c^{d+1}
 C. $(c+1)^{c+1}$
 D. $(c+d)^{c+d}$
 E. c^d/d^c

17. 已知 $r=2, s=-7, A=(r-s)^4, B=r^4-s^4$ 。

解: $A=(r-s)^4=(2-(-7))^4=9^4=6561, B=r^4-s^4=2^4-(-7)^4=16-2401<0$; 所以 $A>B$ 。

答: A

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

18. $A=\sqrt[3]{270}-\sqrt[3]{10}, B=\sqrt[3]{80}$ 。

解: $\sqrt[3]{270}-\sqrt[3]{10}=\sqrt[3]{27\times 10}-\sqrt[3]{10}=\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{10}=(\sqrt[3]{27}-1)\sqrt[3]{10}=2\sqrt[3]{10}=\sqrt[3]{80}$, 所以 $A=B$ 。

答: C

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

19. 如果
- c
- 和
- d
- 都是正奇数, 那么下列选项中哪些可能是奇数? 请选择
- 所有
- 正确答案。

解: 由于 c 和 d 都是正奇数, c 和 d 的次方也一定是奇数, 所以 A 和 B 选项一定是奇数。而 $c+1$ 和 $c+d$ 都是偶数, 偶数的次方也一定是偶数, 所以 C 和 D 选项也一定是偶数, 所以 CD 选项错误。关于 E 选项, 当 $c=d=1$ 时, E 为奇数, 即 E 选项正确。

答: ABE

20. If N is an integer and $99 < N^2 < 200$, then N could have at most how many values?

- A. Two
- B. Four
- C. Six
- D. Eight
- E. Ten

20. 已知 N 为整数, 且 $99 < N^2 < 200$, 那么 N 最多可以取多少个值?

解: 注意 N 可取正数也可取负数, $10^2 = 100$, $14^2 = 196$, 所以 N 能取的值有 $-14, -13, -12, -11, -10, 10, 11, 12, 13, 14$, 共十个。

答: E

1.4 小数 (Decimals)

GRE 考试的小数是基于十进制, 而且 GRE 不要求掌握二进制等其他计数法。例如一个数字 4,321.567 中, 各个数字的数位表达如下:

4,	3	2	1.	5	6	7
千位	百位	十位	个位	十分位	百分位	千分位

各个数位在英文表达如下: 千位 (thousands), 百位 (hundreds), 十位 (tens), 个位 (ones or units), 十分位 (tenths), 百分位 (hundredths), 千分位 (thousandths)。例: $4,321.567 = 4 \times (1000) + 3 \times (100) + 2 \times (10) + 1 \times (1) + 5 \times \left(\frac{1}{10}\right) + 6 \times \left(\frac{1}{100}\right) + 7 \times \left(\frac{1}{1000}\right)$ 。

有限小数还可以和分数进行转换, 例如 $3.3 = 3 + \frac{3}{10} = \frac{33}{10}$, $80.17 = 80 + \frac{17}{100} = \frac{8017}{100}$ 。当一个分数的分子和分母都是整数的时候, 这个分数写成小数的时候可能是有限小数 (terminating decimal), 也可能是循环小数 (repeating decimal)。例如 $\frac{1}{4} = 0.25$ 是一个有限小数, $\frac{1}{9} = 0.\overline{1111}$ 是一个循环小数。注意 GRE 数学中, 循环小数习惯在所循环的数字上面加一个横线, 例如 $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ 。

有理数 (rational numbers) 都可以表示为一个有限小数或循环小数, 反之也成立。所以无论这个分数的分子分母数字多大, 只要分子分母都是整数, 那么这个数字一定是有理数。例如 $\frac{929}{437}$ 这个数字一定是有理数。

不是所有的小数都可以用有限小数或循环小数来表示, 也存在无限且不循环的小数, 例如 $\sqrt{2} = 1.4221356237\dots$, 这就是一个无限不循环的小数, 这种无限且不循环的小数也叫无理数 (irrational numbers)。常见的无理数包括 π , $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ 等。

科学计数法 (Scientific Notation)

科学计数法(scientific notation)指的是把一个数字表示成一个1到10之间的数字乘以一个以10为底数的数字的形式。

例如： $0.0000487 = 4.87 \times 10^{-5}$ ， $8,245,000 = 8.245 \times 10^6$ 。

综合训练

1. If n is a positive integer, then $n+$ denotes a number such that $n < n+ < n+1$.

Quantity A: $\frac{20+}{4+}$

Quantity B: $5+$

- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.

2. k is a digit in the decimal $1.3k5$, and $1.3k5$ is less than 1.33 .

Quantity A: k

Quantity B: 1

- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.

1. 定义 $n+$: n 为正整数时, $n < n+ < n+1$ 。A: $\frac{20+}{4+}$, B: $5+$ 。

解: 设 $4+ = 4.1$, 当 $20+ = 20.1$ 时, $A < 5+$; 当 $20+ = 20.9$ 时, A 和 $5+$ 的大小无法判断。

答: D

2. k 是小数 $1.3k5$ 中的一位, 且 $1.3k5$ 小于 1.33 。A= k , B= 1 。

解: 因为 $1.3k5$ 小于 1.33 , 所以 $k < 3$ 。 k 可以是 $0, 1, 2$, 所以 A 和 B 大小关系不确定。

答: D

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

3. \bar{b} represents the decimal in which the digit b is repeated without end.

Quantity A: $\overline{0.3} + \overline{0.7}$

Quantity B: 1.0

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

4. D is the decimal form of the fraction $\frac{4}{11}$.

Quantity A: The 25th digit to the right of the decimal point in D

Quantity B: 4

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

5. When the decimal point of a certain positive decimal number is moved six places to the right, the resulting number is 9 times the reciprocal of the original number. What is the original number?

3. \bar{b} 代表的是 b 无限循环的小数。A = $\overline{0.3} + \overline{0.7}$, B = 1.0。

解: $\overline{0.3} > 0.3$, $\overline{0.7} > 0.7$, 所以 $A = \overline{0.3} + \overline{0.7} > 0.3 + 0.7 = 1.0$, 所以 $A > B$ 。

答: A

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

4. D 是分数 $\frac{4}{11}$ 的小数形式。A: D 的小数点后的第 25 位; B: 4。

解: $\frac{4}{11} = 0.3636\dots$ 即 D 是一个无限循环小数, 循环节为 36。25 = 2 × 12 + 1, 所以 D 的小数点后第 25 位是 3, 即 A = 3。所以 A < B。

答: B

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

5. 一个大于 0 的小数的小数点向右移动了 6 位, 得到的数是原来小数的倒数的 9 倍, 那么原来该小数是多少?

解: 设原来的小数为 x , 小数点向右移动了 6 位后得到了 $1000000x$, 由题目可知: $1000000x = \frac{9}{x}$, 解得 $x = 0.003$ 。

答: 0.003

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

6. If $1/[(2^{11}) \cdot (5^{17})]$ is expressed as a terminating decimal, how many nonzero digits will the decimal have?
- A. One
 B. Two
 C. Four
 D. Six
 E. Eleven

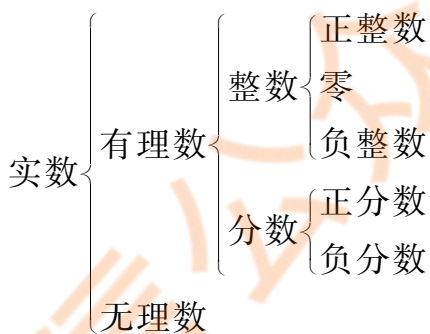
6. 如果 $1/[(2^{11}) \cdot (5^{17})]$ 用有限小数形式表示, 那么该小数有多少位不是 0?

解: $1/[(2^{11}) \cdot (5^{17})] = 10^{-11} \times (0.2)^6$, 因为 $2^6 = 64$, 所以非零位一共有两位。

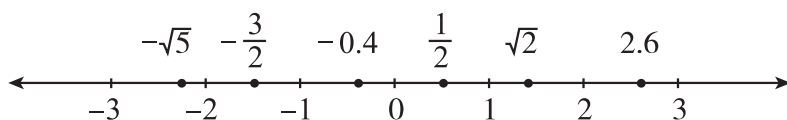
答: B
 [出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

1.5 实数 (Real Numbers)

实数的分类图



实数 (real numbers) 包括有理数和无理数。当然也可以说实数包括所有的整数, 分数和小数。实数可以用数轴 (real number line) 来表示。



每一个实数在数轴中都有一个对应的点, 反之每一个在数轴中的点都对应一个实数。在 GRE 数学中我们默认右边为正方向, 所以在 0 左边的都是负数, 在 0 右边的都是正数。在数轴上, 左边的点一定小于右边的点。例如 $-\sqrt{5} < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < 2.6$, $2.6 > \sqrt{2}$ 。

当我们说一个实数是在 2 和 3 之间 (不包括 2 和 3), 也就是说 $x > 2$ 且 $x < 3$, 我们还可以用一个双不等式 (double inequality) $2 < x < 3$ 来表示。所以在 2 和 3 之间的实数的集合被称为间距 (interval), 或者我们也可以用等式 $2 < x < 3$ 来表示这个间距。有时候我们也会把端点包含在不等式里面, 所以我们有四种方式表达间距。

$$2 < x < 3$$

$$2 \leq x < 3$$

$$2 < x \leq 3$$

$$2 \leq x \leq 3$$

数字 x 在数轴上离原点 O 的距离被称为绝对值 (absolute value), 写为 $|x|$ 。一般来说, 正数的绝对值等于它的本身, 例如 $|4| = 4$; 负数的绝对值等于它的相反数, 例如 $|-4| = 4$; 0 的绝对值等于 0, $|0| = 0$ 。

下面是一些实数常用的性质 (a, b, c 都是实数):

- $a+b=b+a, ab=ba, (a+b)+c=a+(b+c), (ab)c=a(bc), a(b+c)=ab+ac, a+0=a, (a)(0)=0, (a)(1)=a$ 。
- 如果 $ab=0$, 那么 $a=0$ 或 $b=0$ 或 $a=b=0$ 。
- 0 不能做除数。
- 如果 a 和 b 都是正数, 那么 $a+b$ 和 ab 都是正数。
- 如果 a 和 b 都是负数, 那么 $a+b$ 是负数而 ab 是正数。
- 如果 a 是正数 b 是负数, 那么 ab 是负数。
- $|a+b| \leq |a| + |b|$, 这就是三角不等式 (triangle inequality)。
- $|a| |b| = |ab|$ 。
- 如果 $a > 1$, 那么 $a^2 > a$; 如果 $0 < b < 1$, 那么 $b^2 < b$ 。

综合训练

1. How many integer values of n satisfy the inequality $|3-n| \leq 4$?

1. 满足 $|3-n| \leq 4$ 的整数 n 有多少个?

解: 因为 $|3-n| \leq 4$, 所以 $-4 \leq 3-n \leq 4$, 所以 $-4 \leq n-3 \leq 4$, 所以 $-1 \leq n \leq 7$, 因为 n 为整数, 所以 n 可以取 $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ 共 9 个整数。

答: 9

2. Which of the following is equivalent to $0 < x < 2$?

- A. $x = 1$
- B. $|x| < 1$
- C. $|x| < 2$
- D. $|x+1| < 1$
- E. $|x-1| < 1$

3. If $6 \cdot |4 - k/3| > 12$, which of the following could be the value of k ? Indicate all such answers.

- A. -15
- B. -10
- C. -5
- D. 0
- E. 5
- F. 10
- G. 15
- H. 20

4. If $|z| \leq 1$, which of the following statements must be true?

- Indicate all such statements.
- A. $z^2 \leq 1$
 - B. $z^2 \leq z$
 - C. $z^3 \leq z$

2. 下列哪个表达式与 $0 < x < 2$ 等价?

解: 这题我们需要对选项进行逐一分析。

A 显然不正确。

B: $|x| < 1 \rightarrow -1 < x < 1$, 不正确。

C: $|x| < 2 \rightarrow -2 < x < 2$, 不正确。

D: $|x+1| < 1 \rightarrow -2 < x < 0$, 不正确。

E: $|x-1| < 1 \rightarrow 0 < x < 2$, 正确。

答: E

3. 如果 $6 \cdot |4 - k/3| > 12$, 那么下列选项哪些可能是 k 的值? 请选出所有正确答案。

解: 解该不等式可以得到 $k > 18$ 或者 $k < 6$, 所以 ABCDEH 正确。

答: ABCDEH

4. 已知 $|z| \leq 1$, 那么下列选项哪些一定正确? 请选择所有正确的答案。

解: $|z| \leq 1$ 两边同时平方得到 $z^2 \leq 1$, 即 A 选项正确。BC 选项当 z 为负数是都不满足, 所以不正确。

答: A

5. X is the set of all integers n that satisfy the inequality $2 \leq |n| \leq 5$.

Quantity A: The absolute value of the greatest integer in X

Quantity B: The absolute value of the least integer in X

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

6. If $x + |x| + y = 7$ and $x + |y| - y = 6$, then $x + y =$

- A. -1
 B. 1
 C. 3
 D. 5
 E. 13

5. 集合 X 是由满足不等式 $2 \leq |n| \leq 5$ 的所有整数组成的。A: 集合 X 中最大的数的绝对值; B: 集合 X 中最小的数绝对值。

解: $2 \leq |n| \leq 5$, 解得: $-5 \leq n \leq 2$ 或者 $2 \leq n \leq 5$; 所以集合 X 中最大的数是 5 , 最小的数为 -5 ; 所以最大的数和最小的数绝对值相等。

答: C

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

6. 如果 $x + |x| + y = 7$ 且 $x + |y| - y = 6$, 那么 $x + y =$

解: 我们从第二个式子入手, 假设 y 是正的, 那么 $|y| = y$, 所以 $x = 6$ 。将 $x = 6$ 代入第一个式子, 那么解得 $y = -5$, 与假设矛盾。所以 y 一定是非正的。把 $y \leq 0$ 代入第一个式子, 得到 x 一定是正数, 所以 $2x + y = 7$, $x - 2y = 6$, 解得 $x = 4$, $y = -1$, 所以 $x + y = 4 - 1 = 3$ 。

答: C

7. $s = |t - 2|$

Quantity A: $s + 2$ Quantity B: $|t|$

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

8. If
- $|t + 3| > 5$
- , which of the following could be the value of
- t
- ?

Indicate all such values.

- A. -9
 B. -6
 C. -2
 D. 0
 E. 2
 F. 3

9. How many values of
- x
- are there such that
- x
- is an integer and
- $|3x - 2| < 8$
- ?

- A. One
 B. Two
 C. Three
 D. Four
 E. Five

7. 已知 $s = |t - 2|$, $A = s + 2$, $B = |t|$ 。

解: 因为 $s = |t - 2|$, $A = s + 2$, 所以 $A = |t - 2| + 2$, 当 $t \geq 2$ 时, $A = t - 2 + 2 = t$; 此时, $B = |t| = t$, 所以 $t \geq 2$ 时, $A = B$ 。当 $0 \leq t < 2$ 时, $A = 2 - t + 2 = 4 - t > 2$; $B = t < 2$, 所以 $0 \leq t < 2$ 时, $A > B$ 。这时我们已经能够对本题做出选择了, 即 A 和 B 大小关系不确定。为了能够给大家提供本类题的完整分析, 我们接下来将继续考虑 $t < 0$ 的情况。 $t < 0$ 时, $A = 2 - t + 2 = 4 - t > 4$; $B = -t > 0$, $A > B$ 。

答: D

8. 已知
- $|t + 3| > 5$
- , 那么下列选项中哪些可能是
- t
- 的值? 请选择
- 所有
- 正确答案。

解: 因为 $|t + 3| > 5$, 所以 $t + 3 > 5$ 或者 $t + 3 < -5$, 解得 $t > 2$ 或者 $t < -8$, 选项中只有 AF 两项符合要求。

答: AF

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

9. 满足
- $|3x - 2| < 8$
- 的整数
- x
- 有多少个?

解: 因为 $|3x - 2| < 8$, 所以 $-8 < 3x - 2 < 8$, 所以 $-6 < 3x < 10$, 所以 $-2 < x < \frac{10}{3}$, 所以 x 可取的整数有 -1, 0, 1, 2, 3 共 5 个。

答: E

1.6 比率 (Ratio)

比率(ratio)是用来表示一个数量和另外一个数量的相对大小,经常表示成一个分数的形式,第一个数字是分子而第二个数字是分母。例如 s 比 t 可写成 $\frac{s}{t}$ 或 “ s to t ” 或 $s:t$ 。比率也可能是 3 个或 3 个以上数字之间的关系。例如 “ r to s to t ” 表示 $r:s:t$ 。举个实例,如果一个篮子里有 50 个苹果,30 个梨和 20 个橙子,那么三者数量的比例就是 $5:3:2$ 。比例(proportion)是有两个比率的一个等式;例如, $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ 。要解一个关于比率的问题,我们可以写成一个比例,然后再交叉相乘(cross multiplication)。

例: If $\frac{x}{49} = \frac{3}{21}$, then what is the value of x ?

解: 交叉相乘可得 $21x = 49 \times 3$, 解这个方程得 $x = \frac{3 \times 49}{21} = 7$ 。

综合训练

1. A certain bag contains red balls, green balls, and blue balls and no other balls. The ratio of the number of red balls to the number of blue balls is 2:3, and the ratio of the number of blue balls to the number of green balls is 4:3. The number of blue balls in the bag is what fraction of the total number of balls in the bag?

- A. $3/8$
- B. $12/29$
- C. $7/13$
- D. $15/23$
- E. $12/17$

1. 已知包里有红色、绿色和蓝色的球。红色球和蓝色球的数量之比是 $2:3$, 蓝色球和绿色球的数量之比是 $4:3$ 。那么包里蓝色球的数量占总量的多少?

解: 我们假设包里红色球的数量为 x , 那么蓝色球的数量为 $\frac{3}{2}x$, 那么绿色球的数量为 $\frac{9}{8}x$, 那么包里球总数为

$$x + \frac{3}{2}x + \frac{9}{8}x = \frac{29}{8}x, \text{ 那么蓝色球占}$$

$$\text{总数的} \frac{\frac{3}{2}x}{\frac{29}{8}x} = \frac{12}{29}。$$

答: B

2. On a certain map, 1 centimeter represents 5 kilometers. On the map, region X has an area of 6.4 square centimeters.

Quantity A: The actual area of region X

Quantity B: 150 square kilometers

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.

3. Aisha's income in 2004 was 20 percent greater than her income in 2003. What is the ratio of Aisha's income in 2004 to her income in 2003?

- A. 1 to 5
- B. 5 to 6
- C. 6 to 5
- D. 5 to 1
- E. 20 to 1

2. 在一张地图里, 地图中的 1 厘米代表实际上的 5 千米。在这张地图中, 区域 X 的面积为 6.4 平方厘米。A: 区域 X 实际的面积, B: 150 平方公里。

解: 因为 1cm 代表实际的 5km, 所以地图中的 $1\text{ cm}^2 (1\text{ cm} \times 1\text{ cm})$ 就代表实际上的 $5\text{ km} \times 5\text{ km} = 25\text{ km}^2$, 所以 6.4 平方厘米代表实际上的 $6.4 \times 25 = 160\text{ km}^2 > 150\text{ km}^2$, 即 $A > B$ 。

答: A

3. Aisha 在 2004 的收入比 2003 高出 20%, 那么 Aisha 2004 年的收入与 2003 的之比是多少?

解: Aisha 2004 年的收入与 2003 的之比是 $(1 + 20\%) : 1 = 1.2 : 1 = 6 : 5$ 。

答: C

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

4. A car dealer received a shipment of cars, half of which were black, with the remainder consisting of equal numbers of blue, silver, and white cars. During the next month, 70 percent of the black cars, 80 percent of the blue cars, 30 percent of the silver cars, and 40 percent of the white cars were sold. What percent of the cars in the shipment were sold during that month?

- A. 36%
- B. 50%
- C. 55%
- D. 60%
- E. 72%

5. Which of the following represents the total dollar amount that a customer would have to pay for an item that costs s dollars plus a sales tax of 8 percent, in terms of s ?

- A. $\frac{s}{0.08}$
- B. $\frac{s}{1.08}$
- C. $\frac{s}{8}$
- D. $0.08s$
- E. $1.08s$

4. 一汽车经销商收到一批汽车，其中一半是黑色，剩下的有蓝色、银色和白色，这三种颜色数量相同。下个月内，70%的黑色汽车、80%的蓝色汽车、30%的银色汽车、40%的白色汽车会售出。那么下个月售出的车占这一批车的多少？

解：设这批车总量为 x ，那么黑色汽车有 $0.5x$ 辆，剩下三种颜色都有 $\frac{x}{6}$ 辆，所以下个月会卖出 $0.5x \cdot 70\% + \frac{x}{6} \cdot 80\% + \frac{x}{6} \cdot 30\% + \frac{x}{6} \cdot 40\% = 0.6x$ ，所以下个月卖出的汽车总数占到了 60%。

答：D

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

5. 一件商品价值 s 美元，销售税是其价格的 8%。那么消费者一共要为这件商品花费多少钱？

解：该商品的销售税是 $8\% \cdot s = 0.08s$ ，所以一共要花费 $s + 0.08s = 1.08s$ 。

答：E

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

6. According to surveys at a company, 20 percent of the employees owned cell phones in 1994, and 60 percent of the employees owned cell phones in 1998. From 1994 to 1998, what was the percent increase in the fraction of employees who owned cell phones.

- A. 3%
- B. 20%
- C. 30%
- D. 200%
- E. 300%

7. The ratio of $\frac{1}{3}$ to $\frac{3}{8}$ is equal to the ratio of

- A. 1 to 8
- B. 8 to 1
- C. 8 to 3
- D. 8 to 9
- E. 9 to 8

6. 根据对某公司的调查, 在 1994 年 20% 的职工有手机, 在 1998 年 60% 的职工有手机。从 1994 到 1998 年间, 有手机的那部分员工增加了多少?

解: 增加的百分比为 $\frac{60\% - 20\%}{20\%} = 200\%$ 。

答: D

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

7. $\frac{1}{3}$ 与 $\frac{3}{8}$ 之比是多少?

解: $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{3} \times \frac{8}{3} = \frac{8}{9} = 8 : 9$ 。

答: D

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

1.7 百分比 (Percent)

百分比(percent)指的是每一百(per hundred)或百分之一(hundredth), 具体来说就是把整体当成一百份之后所代表的份数。

例: 1 percent 表示在 100 份当中的 1 份, 或者写成 $\frac{1}{100}$; 35 percent

表示在 100 份中占 35 份, 或者写成 $\frac{35}{100}$; 50 percent 表示在 100

份当中的 50 份, 或者写成 $\frac{50}{100}$ 或者 $\frac{1}{2}$ 。

注意: “总体”一般写成分母, 而部分一般写成分子。百分比通常用“%”这个符号来表示, 分数和小数也可以用来表示百分比, 它们之间可以换算。例如

$$1\% = \frac{1}{100} = 0.01, \quad 32\% = \frac{32}{100} = 0.32, \quad 0.3\% = \frac{0.3}{100} = 0.003.$$

综合训练

1. $0 < x < y$

Quantity A: x percent of y Quantity B: y percent of x

A. Quantity A is greater.

B. Quantity B is greater.

C. The two quantities are equal.

D. The relationship cannot be determined from the information given.

1. 已知 $0 < x < y$, A: y 的百分之 x , B: x 的百分之 y 。

$$\text{解: } A = x\% \cdot y = \frac{x}{100} \cdot y = \frac{xy}{100}, \quad B = y\% \cdot x = \frac{y}{100} \cdot x = \frac{xy}{100}, \quad \text{即 } A=B.$$

答: C

2. x and y are integers greater than 5. x is y percent of x^2 .Quantity A: x

Quantity B: 10

A. Quantity A is greater.

B. Quantity B is greater.

C. The two quantities are equal.

D. The relationship cannot be determined from the information given.

2. 已知 x 和 y 均是大于 5 的整数, x 是 x^2 的百分之 y . A= x , B=10。

解: 根据题意列出不等式: $x = x^2 \cdot \frac{y}{100}$, 得 $xy=100$ 。因为 x 和 y 均是大于 5 的整数, 所以只能是 $x=y=10$, 所以 $A=B$ 。

答: C

3. Quantity A: 22 percent of x Quantity B: $\frac{2}{9}$ of x

A. Quantity A is greater.

B. Quantity B is greater.

C. The two quantities are equal.

D. The relationship cannot be determined from the information given.

3. A: x 的 22%, B: x 的 $\frac{2}{9}$ 。

解: 由于不知道 x 是正是负, 所以无法判断 A 和 B 的大小关系。当 $x=0$ 时, A 和 B 相等; 当 x 为正数时, 因为 $22\% > \frac{2}{9}$, 所以 $A > B$; 当 x 为负数时, $A < B$; 所以 A 和 B 的大小关系不确定。

答: D

4. Quantity A: 0.05 percent of 4000
Quantity B: $1/200$ of 4000
- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.

4. A: 4000 的 0.05%; B: 4000 的 $1/200$ 。

解: $4000 \times 0.05\% = 2$, $4000 \times \frac{1}{200} = 20$,

所以 $B > A$ 。

答: B

5. By weight, liquid A makes up 8 percent of solution R and 18 percent of solution S. If 3 grams of solution R are mixed with 7 grams of solution S, then liquid A accounts for what percent of the weight of the resulting solution?
- A. 10%
B. 13%
C. 15%
D. 19%
E. 26%

5. 在溶液 R 和溶液 S 中, 液体 A 分别占了重量的 8% 和 18%。如果现在把 3g 溶液 R 和 7g 溶液 S 进行混合, 液体 A 的重量占了混合溶液总量的多少?

解: 混合溶液中液体 A 的重量为 $3 \times 8\% + 7 \times 18\% = 1.5\text{g}$, 那么液体 A 占总重为 $\frac{1.5}{3+7} = 15\%$ 。

答: C

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

6. Alice earns d dollars and has t percent of what she earns deducted for taxes. How much of what she earns does Alice have left after taxes?
- A. $d(1-100t)$ dollars
B. $d(1-10t)$ dollars
C. $d(1-t)$ dollars
D. $d(1-0.1t)$ dollars
E. $d(1-0.01t)$ dollars

6. Alice 收入 d 美元并扣除了 $t\%$ 的税。那么交完税 Alice 收入剩余多少?

解: 交完税 Alice 收入剩余 = 总收入 - 税
 $= d - d \cdot t\% = d(1-t\%) = d(1-0.01t)$ 。

答: E

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

7. During a one-year study, biologists observed the number of fish in a certain pond as well as the percent of the fish that were catfish. At the beginning of the year, there were 300 fish in the pond, of which 15 percent were catfish; and at the end of the year, there were 400 fish in the pond, of which 10 percent were catfish. From the beginning of the year to the end of the year, the number of catfish in the pond
- A. decreased by more than 5%
 B. decreased by 5%
 C. did not change
 D. increased by 5%
 E. increased by more than 5%

8. Geoff used \$630 to buy a new guitar. This amount was 15 percent of his earnings last summer.
- Quantity A: The amount of Geoff's earnings last summer not used to buy the new guitar
- Quantity B: \$3,570
- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

7. 在一项为期一年的研究中,生物学家观察某一池塘里鱼的数量并且记录其中鲶鱼所占百分比。在年初,池塘内共有 300 只鱼,其中 15% 是鲶鱼;在年末,池塘内有 400 只鱼,其中 10% 是鲶鱼。那么从年初到年末,鲶鱼的数量发生了怎样的变化?
- A. 减少了超过了 5%
 B. 减少了 5%
 C. 不变
 D. 增加了 5%
 E. 增加了超过 5%

解: 年初鲶鱼的数量为 $300 \times 15\% = 45$, 年末鲶鱼的数量为 $400 \times 10\% = 40$, 所以鲶鱼的数量减少了 $\frac{45-40}{45} \times 100 \approx 11\%$, 即减少了超过 5%。

答: A

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

8. Geoff 用了 \$630 买了一把吉他,这笔钱是他去年夏天收入的 15%。A: Geoff 去年夏天没有用来买吉他的钱; B: \$3,570

解: Geoff 去年夏天的收入一共是 $\frac{630}{15\%} = 4,200$, 所以没有买吉他的钱一共是 $4,200 - 630 = 3570$, 所以 A=B。

答: C

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

9. In 2009 the property tax on each home in Town X was p percent of the assessed value of the home, where p is a constant. The property tax in 2009 on a home in Town X that had an assessed value of \$125,000 was \$2,500.

Quantity A: The property tax in 2009 on a home in Town X that had an assessed value of \$160,000

Quantity B: \$3,000

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.

10. Emma spent \$75 buying a used bicycle and \$27 repairing it. Then she sold the bicycle for 40 percent more than the total amount she spent buying and repairing it.

Quantity A: The price at which Emma sold the bicycle

Quantity B: \$140

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.

9. 2009年, X镇上每间房子的不动产税是这间房子评估价值的 $p\%$, p 是一常数。在 X 镇中有一间评估价值为 \$125,000 的房子的不动产税为 \$2,500。A: 在 X 镇中一间估值为 \$160,000 的房子的不动产税; B: \$3,000。

解: 由题目可知: $125000 \cdot p\% = 2500$, 解得: $p=2$ 。那么估值为 \$160,000 的房子的不动产税为: $160000 \times 2\% = 3200 > 3000$, 即 $A > B$ 。

答: A

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

10. Emma 花 \$75 买了一辆二手自行车并且花 \$27 修了这辆自行车。之后她卖出了这辆自行车, 卖出的价格比她买车加修车所花的钱多出 40%。A: 自行车卖出的价格, B: \$140。

解: Emma 买车、修车一共花费了 $75 + 27 = \$102$, 所以自行车卖出的价格是 $102 \times (1 + 40\%) = 142.8$, 即自行车卖出的价格高于 \$140。所以 $A > B$ 。

答: A

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

11. If 55 percent of a group of people have brown hair and 80 percent of the same group do not have red hair, what fraction of those who do not have brown hair have red hair?

- A. $1/4$
- B. $4/11$
- C. $4/9$
- D. $5/9$
- E. $4/5$

12. If $x > 0$, which of the following is equal to 1.25 percent of x ?

- A. $\frac{x}{80}$
- B. $\frac{x}{8}$
- C. $\frac{x}{4}$
- D. $\frac{5x}{8}$
- E. $\frac{3x}{4}$

11. 一群人中有 55% 是棕色头发，80% 不是红色头发。那么在那些不是棕色头发的人中有多少是红色头发？

解：这群人中 45% 不是棕色头发，20% 是红色头发。显然这 20% 红色头发的人全部属于 45% 不是棕色头发的人中，所以在不是棕色头发的人群中，有 $\frac{20\%}{45\%} = 4/9$ 的人是红色头发。

答：C

12. 已知 $x > 0$ ，那么下列选项哪一个等于 x 的 1.25%？

解： $1.25\% \cdot x = \frac{1.25x}{100} = \frac{x}{80}$ 。

答：A

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

第二节 代数(Algebra)

2.1 代数式运算 (Algebraic Expression Operation)

代数式(algebraic expression)是指有一个或多个变量且能够写成一个单一项或多个项之和的表达式。下面是一些代数式的例子： $2x$ ， $y - \frac{1}{3}$ ， $w^3z + 5z^2 - y$ ， $\frac{6}{n+p}$ 。在这些例子当中， $2x$ 只有一项， $y - \frac{1}{3}$ 有两项， $w^3z + 5z^2 - y$ 有三项， $\frac{6}{n+p}$ 只有一项。如果一个代数式中有两项的变量相同且变量的指数也相同，那么这两项被称为同类项(like terms)，没有变量的项被称为常数项(constant term)，例如在代数式 $3x^2 + 4 - 2x^2$ 中， $3x^2$ 与 $-2x^2$ 是同类项，4是常数项。变量 x 前面的数字被称为系数(coefficient)，例如3就是 $3x^2$ 这一项的系数。

同类项可以进行合并，合并的规则也很简单，就是将同类项前面的系数进行加减运算。例如 $2x + 5x = 7x$ ， $w^3z + 5z^2 - z^2 + 6 = w^3z + 4z^2 + 6$ ， $3xy + 2x - xy - 3x = 2xy - x$ 。

各个项中相同数字和变量可以提出来，例如 $4x + 12 = 4(x + 3)$ ， $15y^2 - 9y = 3y(5y - 3)$ ， $\frac{7x^2 + 14x}{2x + 4} = \frac{7x(x + 2)}{2(x + 2)} = \frac{7x}{2}$ ($x \neq -2$ ，因为分母不能为0)。

代数式的乘法运算法则：用一个代数式的每一项去分别乘以另外一个代数式的每一项。例如 $(x + 2)(3x - 7) = x(3x) + x(-7) + 2(3x) + 2(-7) = 3x^2 - 7x + 6x - 14 = 3x^2 - x - 14$ 。

两个代数式对于所有的变量都恒相等，这样的等式叫恒等式(identity)。前面举例当中的等式都是恒等式，下面几个恒等式使我们在代数运算中比较常见的。

- 完全平方公式： $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ， $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- 完全立方公式： $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ， $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- 平方差公式： $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

以上公式可以用来解决一些多项代数式运算的问题，例如

$$\frac{x^2 - 9}{4x - 12} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{4(x - 3)} = \frac{x + 3}{4} \quad (x \neq 3)$$

两个代数式形成一个等式且只有某些变量的值才能满足这个等式，这就被称为方程(equation)，满足这个等式的变量的值称为这个方程的解(solutions of the equation)，下面是一些常用的方程：

- $3x+5=2$ (一个未知数的线性方程)
- $x-3y=10$ (两个未知数的线性方程)
- $20y^2+6y-17=0$ (一个未知数的一元二次方程)

综合训练

1. $a \neq 0$ Quantity A: $a+1$ Quantity B: $\frac{1}{a}-1$

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

2. $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{b}$ $ab \neq 0$ Quantity A: a Quantity B: b

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

3. $1/2 < r < 1$ Quantity A: $2r$ Quantity B: $1/r$

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

1. 已知 $a \neq 0$, $A = a+1$, $B = \frac{1}{a}-1$ 。解: 本题我们可以采取取几个 a 的特殊值代入的方法。令 $a = -1$, 则 $A = 0$, $B = -2$, 所以 $A > B$;令 $a = -3$, 则 $A = -2$, $B = -\frac{4}{3}$,所以 $A < B$ 。综上, A 和 B 的大小关系不确定。

答: D

2. 已知 $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{b}$, $ab \neq 0$, $A = a$, $B = b$ 。解: 我们首先对给出的分数等式进行交叉相乘得到: $a^2b = ab^2$ 。因为 $ab \neq 0$, 所以等式两边同时除以 ab , 得到 $a = b$, 即 $A = B$ 。

答: C

3. 已知 $1/2 < r < 1$, $A = 2r$, $B = 1/r$ 。解: $\frac{A}{B} = \frac{2r}{\frac{1}{r}} = 2r^2 \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$, 所以 A 和 B 的大小关系不确定。我们还可以通过任取 r 的几个值来进行判断。令 $r = \frac{2}{3}$, 则 $A = \frac{4}{3}$, $B = \frac{3}{2}$, 即 $A < B$;

令 $r = \frac{3}{4}$, 则 $A = \frac{3}{2}$, $B = \frac{4}{3}$, 即 A

$>$, 综上 A 和 B 大小关系不确定。

答: D

4. $x \neq 0$

Quantity A: x^2

Quantity B: $x(x+5)$

A. Quantity A is greater.

B. Quantity B is greater.

C. The two quantities are equal.

D. The relationship cannot be determined from the information given.

4. 已知 $x \neq 0$, $A = x^2$, $B = x(x+5)$ 。

解: $A - B = x^2 - x(x+5) = -5x$, 由于 x 正负不确定, 那么 A 和 B 的大小关系不确定, 那么我们选取几个值来验证我们的想法。

令 $x = -1$, 则 $A = 1$, $B = -1 \times 4 = -4$, 即 $A > B$;

令 $x = 1$, 则 $A = 1$, $B = 1 \times 6 = 6$, 即 $B > A$, 综上 A 和 B 的大小关系不确定。

答: D

5. A certain brand of dishwashing liquid was sold in two different bottle sizes. The small bottle was sold with $\frac{2}{5}$ as many ounces of liquid as the large bottle and was sold at a price that was $\frac{1}{2}$ the price of the large bottle.

Quantity A: The price per ounce of the liquid in the small bottle

Quantity B: The price per ounce of the liquid in the large bottle

A. Quantity A is greater.

B. Quantity B is greater.

C. The two quantities are equal.

D. The relationship cannot be determined from the information given.

5. 某品牌的洗洁精有两种不同的规格。较小的规格含洗洁精的量(盎司)是较大规格的 $\frac{2}{5}$, 售价为较大规格的 $\frac{1}{2}$ 。

A = 较小规格的洗洁精每盎司的价格

B = 较大规格的洗洁精每盎司的价格

解: 我们设较大的规格含洗洁精 x 盎司, 售价为 y , 则每盎司价格为 $\frac{y}{x}$ 。那么

较小规格含洗洁精 $\frac{2}{5}x$, 售价为 $\frac{1}{2}y$,

则每盎司售价为 $\frac{\frac{1}{2}y}{\frac{2}{5}x} = \frac{5}{4} \cdot \frac{y}{x} > \frac{y}{x}$,

即 $A > B$ 。

答: A

6. $x^2 + 6x = 7$

Quantity A: $(x+3)^2$

Quantity B: 16

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

7. $x - y = 5$

Quantity A: $x^2 - y^2$

Quantity B: 5

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

8. A bookcase has s shelves with n books on each shelf, where n is a multiple of both s and $s-1$. If all of the books on the highest shelf were removed and redistributed equally among the other shelves, which of the following represents the number of books that would be on each of the other shelves?

- A. $\frac{ns}{s-1}$ B. $\frac{n(s+1)}{s}$
 C. $\frac{(n+1)s}{s-1}$ D. $\frac{(n-1)s}{s-1}$
 E. $\frac{(n+1)(s-1)}{s}$

6. 已知 $x^2 + 6x = 7$, $A = (x+3)^2$, $B = 16$ 。

解: $A = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9 = 7 + 9 = 16 = B$ 。

答: C

7. 已知 $x - y = 5$, $A = x^2 - y^2$, $B = 5$ 。

解: $A = (x+y)(x-y)$, 由于不知道 $(x+y)$ 的大小, 所以无法进行比较我们可以取几个值验证我们的猜测:
 令 $y = 1$, 则 $A = 35 > 5$, 即 $A > B$;
 令 $y = -3$, 则 $A = -5$, 即 $A < B$ 。

答: D

8. 已知一个书架有 s 层, 每层上有 n 本书, n 是 s 和 $s-1$ 的倍数。如果把在最高层的所有的书平均分配到其他各层, 那么下列选项中哪个能够代表移动后每层中书的数量?

解: 移动后每层增加 $\frac{n}{s-1}$ 本书, 移动前每层有 n 本书, 所以移动后每层有 $n + \frac{n}{s-1} = \frac{n(s-1) + n}{s-1} = \frac{ns}{s-1}$ 。

答: A

9. Jacob's weekly take-home pay is n dollars. Each week he uses $\frac{4n}{5}$ dollars for expenses and saves the rest. At those rates, how many weeks will it take Jacob to save \$500, in terms of n ?

- A. $\frac{500}{n}$ B. $\frac{2500}{n}$
 C. $\frac{n}{625}$ D. $\frac{n}{2500}$
 E. $625n$

10. $x < 1$ and $x \neq 0$

Quantity A: $x^2 + 1$

Quantity B: $x^3 + 1$

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

11. $s \cdot t = \sqrt{10}$

Quantity A: s^2

Quantity B: $\frac{10}{t^2}$

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

9. Jacob 每周税后工资是 n 美元。每周他花掉 $\frac{4n}{5}$ 美元，剩下的全部存起来。按这个速度，Jacob 多少周能存够 500 美元？

解：每周收入 n 美元，花掉 $\frac{4n}{5}$ 美元，能够存下来 $\frac{n}{5}$ 美元。那么存够 500 美元需要 $\frac{500}{\frac{n}{5}} = \frac{2500}{n}$ 周。

答：B

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

10. 已知 $x < 1$ 且 $x \neq 0$ ， $A = x^2 + 1$ ， $B = x^3 + 1$ 。

解： $B - A = (x^3 + 1) - (x^2 + 1) = x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$ 。因为 $x \neq 0$ ，所以 $x^2 > 0$ ；因为 $x < 1$ ，所以 $x - 1 < 0$ ，所以 $x^2(x - 1) < 0$ ，即 $B - A < 0$ ，所以 $B < A$ 。

答：A

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

11. 已知 $s \cdot t = \sqrt{10}$ ， $A = s^2$ ， $B = \frac{10}{t^2}$ 。

解：因为 $s \cdot t = \sqrt{10}$ ，所以 $A = s^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{t}\right)^2 = \frac{10}{t^2} = B$ 。

答：C

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

12. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

In the sequence above, each term after the first term is equal to the preceding term plus the constant c . If $a_1 + a_3 + a_5 = 27$, what is the value of $a_2 + a_4$?

13. The sequence of numbers $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ is defined by $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$ for each integer $n \geq 1$. What is the sum of the first 20 terms of this sequence?

- A. $\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{20}$
 B. $\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{22}\right)$
 C. $1 - \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{22}\right)$
 D. $1 - \frac{1}{22}$
 E. $\frac{1}{20} - \frac{1}{22}$

12. 在数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 中, 第一项之后每一项都等于前一项加上常数 c 。如果 $a_1 + a_3 + a_5 = 27$, 那么 $a_2 + a_4$ 的值是多少?

解: $a_2 = a_1 + c, a_3 = a_2 + c = a_1 + 2c, a_4 = a_3 + c = a_1 + 3c, a_5 = a_4 + c = a_1 + 4c$, 所以 $a_1 + a_3 + a_5 = a_1 + a_1 + 2c + a_1 + 4c = 3a_1 + 6c = 27, a_2 + a_4 = a_1 + c + a_1 + 3c = 2a_1 + 4c = \frac{2}{3}(3a_1 + 6c) = \frac{2}{3} \times 27 = 18$ 。

答: 18

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

13. 数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 是这样定义的: $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$ 对于每一个大于 1 的整数 n 成立, 那么该数列中前 20 项的和是多少?

解: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{22}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{22}\right)$ 。

答: B

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

14. If $y=3x$ and $z=2y$, what is $x+y+z$ in terms of x ?

- A. $10x$
- B. $9x$
- C. $8x$
- D. $6x$
- E. $5x$

15. The relationship between temperature C , in degrees Celsius, and temperature F , in degrees Fahrenheit, is given by the formula $F = \frac{9}{5}C + 32$. If a recipe calls for an oven temperature of 210 degrees Celsius, what is the oven temperature in degrees Fahrenheit?

- A. 320
- B. 350
- C. 410
- D. 420
- E. 500

14. 已知 $y=3x$ 且 $z=2y$, 那么 $x+y+z$ 用 x 表示是多少?

解: $z=2y=2 \cdot 3x=6x$, 所以 $x+y+z = x+3x+6x=10x$ 。

答: A

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

15. 摄氏度 C 和华氏度 F 之间的关系式是 $F = \frac{9}{5}C + 32$ 。现在一份食谱中要求烤箱的温度达到 210 摄氏度, 那么烤箱温度是多少华氏度?

解: $F = \frac{9}{5}C + 32 = \frac{9}{5} \times 210 + 32 = 410$ 华氏度。

答: C

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

16. At a club meeting, there are 10 more club members than non-members. The number of club members at the meeting is c .

Quantity A: The total number of people at the club meeting

Quantity B: $2c-10$

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.

17. A group of 5,000 investors responded to a survey asking whether they owned stocks and whether they owned bonds. Of the group, 20 percent responded that they owned only one of the two types of investments. If r is the number of investors in the group who owned stocks but not bonds, which of the following represents the number of investors in the group who owned bonds but not stocks, in terms of r ?

- A. 5,000
- B. $1,000-r$
- C. $r-1,000$
- D. $1,000r$
- E. $(0.2) \cdot (5,000-r)$

16. 在某个俱乐部会议上, 会员的人数比不是会员的人数多出 10 个。参加该会议的俱乐部会员数为 c 。A: 参加俱乐部会议的总人数; B: $2c-10$ 。

解: 根据题意, 参加会议中不是会员的人数等于 $c-10$, 所以参加会议的总人数等于 $c+c-10=2c-10$ 。

答: C

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

17. 一项调查统计了 5000 位投资者是否持有股票和债券。在这 5000 人中, 20% 只持有这两种投资方式中的一种。如果在这组人中, 只持有股票不持有债券的人数是 r , 那么下列选项哪一个表示只持有债券不持有股票的人数?

解: 只有一种投资方式的人数是 $5000 \times 20\% = 1000$ 。这 1000 人由只持有股票不持有债券的人和只持有债券不持有股票的人组成, 其中只持有股票不持有债券的人数是 r , 那么只持有债券不持有股票的人数就是 $1000-r$ 。

答: B

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

18. The total cost of 8 bagels at a bakery is x dollars. At this cost per bagel, which of the following represents the total cost, in dollars, of y bagels?

- A. $\frac{8}{xy}$ B. $\frac{8}{xy}$
 C. $\frac{8y}{x}$ D. $\frac{xy}{8}$
 E. $\frac{x}{8y}$

19. $(4x-2y)(6x+3y)=18$

Quantity A: $4x^2 - y^2$

Quantity B: 6

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

20. Quantity A: $|m+25|$

Quantity B: $25-m$

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

18. 某面包房中 8 个面包圈的总价是 x 美元。若面包圈的单价不变, 那么下列选项是 y 个面包圈的总价?

解: 该面包房中面包圈的单价是 $\frac{x}{8}$, 那么 y 个面包的总价是 $\frac{x}{8} \cdot y = \frac{xy}{8}$ 。

答: D

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

19. 已知 $(4x-2y)(6x+3y)=18$, $A=4x^2-y^2$, $B=6$ 。

解: $(4x-2y)(6x+3y)=2(2x-y) \cdot 3(2x+y)=6(2x-y)(2x+y)=6(4x^2-y^2)=18$, 所以 $4x^2-y^2=3$ 。

答: B

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

20. $A=|m+25|$, $B=25-m$ 。

解: 我们不知道和 m 相关的任意信息, 所以代入几个数值进行计算。

令 $m=1$, 则 $A=|m+25|=26$, $B=25-m=24$, 所以 $B < A$;

令 $m=0$, 则 $A=|m+25|=25$, $B=25-m=25$, 所以 $B=A$ 。

所以 A 和 B 的大小关系不确定。

答: D

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

21. At the beginning of a trip, the tank of Diana's car was filled with gasoline to half of its capacity. During the trip, Diana used 30 percent of the gasoline in the tank. At the end of the trip, Diana added 8 gallons of gasoline to the tank. The capacity of the tank of Diana's car was x gallons. Which of the following expressions represent the number of gallons of gasoline in the tank after Diana added gasoline to the tank at the end of the trip?

Indicate all such expressions.

- A. $\frac{x}{2} - \frac{3}{20}x + 8$
 B. $\frac{7}{20}x + 8$
 C. $\frac{3}{20}x + 8$
 D. $\frac{x}{2} + \frac{3}{20}x - 8$
 E. $\frac{7}{20}x - 8$

21. 旅途开始之前, Diana 汽车的油箱装载着容量一半的汽油。在旅途中, Diana 使用了油箱中 30% 的汽油。旅途结束后, Diana 向油箱内加了 8 加仑的汽油。Diana 的汽车油箱容量是 x 加仑, 那么下列表达式中哪一个代表 Diana 加完油后油箱内汽油的量? 请选择所有正确答案。

解: 旅途开始之前油箱内有 $\frac{x}{2}$ 加仑的汽油, 在路途中使用了 $\frac{x}{2} \cdot 30\% = \frac{3x}{20}$, 所以还剩余 $\frac{x}{2} - \frac{3x}{20}$ 。在旅途结束后又向油箱内假如 8 加仑的汽油, 则一共有 $\frac{x}{2} - \frac{3x}{20} + 8 = \frac{7}{20}x + 8$ 加仑的汽油。

答: AB

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

22. If $-1 < x < y < 0$, which of the following show the expression xy , x^2y , and xy^2 listed in order from least to greatest?

- A. xy , x^2y , xy^2
 B. xy , xy^2 , x^2y
 C. xy^2 , xy , x^2y
 D. xy^2 , x^2y , xy
 E. x^2y , xy^2 , xy

23. $(2x+1)^2 - (2x-1)^2 =$

- A. 2
 B. $8x$
 C. $4x-1$
 D. $4x+1$
 E. $8x+2$

22. 已知 $-1 < x < y < 0$, 那么下列选项将表达式 xy , xy^2 , x^2y 从小到大排列, 哪一个的排列顺序是正确的?

解: 因为 $x < y < 0$, 所以 $xy > 0$, $xy^2 < 0$, $x^2y < 0$. 所以三项中 xy 最大, 排除 ABC 选项。 $\frac{xy^2}{x^2y} = \frac{y}{x}$, 因为 $x < y < 0$, 因为 xy^2 和 x^2y 都是负数, 所以 $xy^2 > x^2y$, 所以 E 选项正确。

答: E

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

解: 我们只需要利用完全平方公式将上面的式子化简即可。

$$(2x+1)^2 - (2x-1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 - (4x^2 - 4x + 1) = 8x。$$

答: B

2.2 指数运算法则 (Exponent Algorithm)

在代数式 x^a 这个表达式中, x 被称为底数 (base), a 被称为指数 (exponent), 对于一些包含底数和指数的等式来说, 下面这条性质非常重要: 如果 $x^a = x^b$, 那么 $a = b$, (x 是正整数且 $x \neq 1$)。例如, 如果 $2^y = 2^6$, 那么则有 $y = 6$ 。

下面是一些指数的基本运算法则, 其中 x 和 y 都是非零实数且指数 a 和 b 都是整数。

- $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$, 例: $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$, $x^{-10} = \frac{1}{x^{10}}$, $\frac{1}{2^{-a}} = 2^a$
- $(x^a)(x^b) = x^{a+b}$, 例: $(3^2)(3^4) = 3^{2+4} = 3^6 = 729$, $(y^3)(y^{-1}) = y^{3-1} = y^2$
- $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} = \frac{1}{x^{b-a}}$, 例: $\frac{5^7}{5^4} = 5^{7-4} = 5^3 = 125$, $\frac{t^3}{t^8} = t^{3-8} = \frac{1}{t^5}$
- $x^0 = 1$, 例: $7^0 = 1$, $(-3)^0 = 1$, 注意 0^0 是没有意义的。
- $(x^a)(y^a) = (xy)^a$, 例: $(2^3)(3^3) = 6^3 = 216$, $(10z)^3 = 10^3 z^3 = 1,000 z^3$
- $\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$, 例: $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$, $\left(\frac{r}{4t}\right)^3 = \frac{r^3}{64 t^3}$

- $(x^a)^b = x^{ab}$, 例: $(2^2)^5 = 2^{10} = 1,024$, $(3x^6)^2 = (3^2)(x^6)^2 = 9x^{12}$

除了这些恒等式, 下面是一些大家经常误用的公式。

- $(x^a)(y^b) \neq (xy)^{a+b}$, 例: $(2^3)(3^2) \neq 6^5$
- $(x^a)^b \neq (x^a)(x^b)$, 例: $(2^2)^3 \neq (2^2)(2^3)$
- $(x+y)^a \neq x^a + y^a$, 例: $(2+3)^4 \neq 2^4 + 3^4$
- $-x^2 = (-x)^2$, 例 $-4^2 \neq (-4)^2$
- $\sqrt{x^2 + y^2} \neq x + y$, 例: $\sqrt{3^2 + 4^2} \neq 3 + 4$
- $\frac{a}{x+y} \neq \frac{a}{x} + \frac{a}{y}$, 例: $\frac{4}{2+3} \neq \frac{4}{2} + \frac{4}{3}$

综合训练

1. $xy > 0$

Quantity A: $x^4 y^3$

Quantity B: 0

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

2. Quantity A: The least integer x that satisfies the inequality $x^3 > -30$

Quantity B: -3

1. 已知 $xy > 0$, $A = x^4 y^3$, $B = 0$ 。

解: 由 $xy > 0$ 可以判断出 x 、 y 均大于 0 或者均小于 0, 当 x 、 y 均大于 0 时, $x^4 y^3 > 0$, 当 x 、 y 均小于 0 时, $x^4 y^3 < 0$, 因此 A 和 B 大小关系不确定。

答: D

2. A: 最小的满足不等式 $x^3 > -30$ 的整数, B: -3 。

解: $(-3)^3 = -27$, $(-4)^3 = -64$, 所以 $A = -3 = B$ 。

答: C

3. $z \cdot 10^k = 6 \cdot 10^m$

$m = k + 2$

Quantity A: z

Quantity B: 60

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

4. $a > 0$

Quantity A: $(a + a^{-1})^2$ Quantity B: $a^2 + a^{-2}$

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

5. $x = 2, y = 3, z = 5$

Quantity A: $x^{-1}yz^{-2}$ Quantity B: $\left(\frac{xz}{y}\right)^{-2}$

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

3. 已知 $z \cdot 10^k = 6 \cdot 10^m, m = k + 2, A = z, B = 60$ 。

解: $z = \frac{6 \cdot 10^m}{10^k} = 6 \cdot 10^{m-k} = 6 \times 10^2 = 600$, 所以 $A = 600 > 60 = B$ 。

答: A

4. 已知 $a > 0, A = (a + a^{-1})^2, B = a^2 + a^{-2}$ 。

解: $A = (a + a^{-1})^2 = a^2 + a^{-2} + 2 = B + 2 > B$ 。

答: A

5. 已知 $x = 2, y = 3, z = 5, A = x^{-1}yz^{-2}, B = \left(\frac{xz}{y}\right)^{-2}$ 。

解: $A = x^{-1}yz^{-2} = 2^{-1} \times 3 \times 5^{-2} = \frac{3}{50} = 0.06$;

$B = \left(\frac{xz}{y}\right)^{-2} = \left(\frac{2 \times 5}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{10}\right)^2 = 0.09 > 0.06$, 所以 $B > A$ 。

答: B

6. If a , b , x , and y are positive integers, and $13^a \cdot 13^b = (13^x)^y = 13^{13}$, what is the average (arithmetic mean) of a , b , x , and y ?

6. 如果 a , b , x 和 y 都是正整数, 且 $13^a \cdot 13^b = (13^x)^y = 13^{13}$, 那么 a , b , x 和 y 的算术平均值是多少?

解: $13^a \cdot 13^b = 13^{a+b} = 13^{13}$, 即 $a+b=13$; $(13^x)^y = 13^{xy} = 13^{13}$, 即 $xy=13$, 因为 x , y 均为正整数, 且 13 为质数只有 1 和 13 两个因子, 那么 $x+y=1+13=14$ 。所以 a , b , x 和 y 的算术平均值 $= \frac{13+14}{4} = \frac{27}{4} = 6.75$ 。

7. If $a < b < 0$, which of the following numbers must be positive?

7. 已知 $a < b < 0$, 那么下列选项中哪些一定是大于 0 的, 请选择所有正确的答案。

Indicate all such numbers.

- A. $a-b$
- B. a^2-b^2
- C. ab
- D. a^2b
- E. a^2+ab^2

解: $a < b$, 所以 $a-b$ 一定是小于 0 的; $a < b < 0$, 所以 a 的绝对值大于 b 的绝对值, 所以 a^2 大于 b^2 , 即 $a^2-b^2 > 0$; a 和 b 均小于 0, 所以 ab 大于 0; a^2 是正的, b 是负的, a^2b 是小于 0 的; a^2 是正的, ab^2 是负的, 但是他们的绝对值大小无法判断, 所以 a^2+ab^2 正负是无法判断的。

答: BC

8. $x^y > 0$, $xy^2 < 0$

Quantity A: x

Quantity B: y

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.

8. 已知 $x^y > 0$, $xy^2 < 0$, A= x , B= y 。

解: 从 $xy^2 < 0$ 我们可以得出 $x < 0$, y 只要是不等于 0 的偶数就可以。找特殊值就可以得出结论, 比如 $x = -2$, $y = 2$ 或者 -2 都满足第一个式子, 所以 A 和 B 的大小关系不确定。

答: D

9. s and t are positive integers, and $32^s = 2^t$

Quantity A: $\frac{s}{t}$

Quantity B: $\frac{1}{5}$

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

10. If $n = 2^3$, then $n^n =$

- A. 2^6 B. 2^{11}
 C. 2^{18} D. 2^{24}
 E. 2^{27}

11. x and m are positive numbers, and m is a multiple of 3.

Quantity A: $\frac{x^m}{x^3}$

Quantity B: $x^{m/3}$

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

9. s 和 t 都是正整数, 且 $32^s = 2^t$ 。A = $\frac{s}{t}$, B = $\frac{1}{5}$ 。

解: $32^s = (2^5)^s = 2^{5s} = 2^t$, 所以 $5s = t$, 所以 $\frac{s}{t} = \frac{s}{5s} = \frac{1}{5}$ 。

答: C

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

10. 如果 $n = 2^3$, 那么 n^n 的值是多少?

解: $n^n = (2^3)^{2^3} = 2^{3 \times 2^3} = 2^{24}$ 。

答: D

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

11. x 和 m 都是正数, 且 m 是 3 的倍数。

A = $\frac{x^m}{x^3}$, B = $x^{m/3}$ 。

解: A = $\frac{x^m}{x^3} = x^{m-3}$, 我们只知道 m 是正数, 不知道 m 的具体数值, 所以无法判断 $m-3$ 和 $m/3$ 的大小, 而且不知道 x 的大小, 即无法判断 A 和 B 大小关系。我们可以举几个例子验证一下:

令 $x=2$, $m=3$, 所以 $A=2^{3-3}=2^0=1$, $B=2^{3/3}=2^{1}=2$, 所以 $A < B$ 。
 令 $x=2$, $m=9$, 所以 $A=2^{9-3}=2^6$, $B=2^{9/3}=2^3$, 所以 $A > B$ 。

答: D

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

12. Which of the following is equivalent to $\frac{x(x^2)^3}{x^2}$?

- A. x^2
- B. x^3
- C. x^4
- D. x^5
- E. x^6

13. Which of the following is equal to $\frac{2^{x-y}}{2^{x+y}}$ for all integers x and y ?

- A. 4^{-x}
- B. 4^{-y}
- C. 4^{xy}
- D. 4^x
- E. 4^y

14. If 10^x equals 0.1 percent of 10^y , where x and y are integers, which of the following must be true?

- A. $y = x + 2$
- B. $y = x + 3$
- C. $x = y + 3$
- D. $y = 1,000x$
- E. $x = 1,000y$

12. 下列选项中哪个与 $\frac{x(x^2)^3}{x^2}$ 相等?

解: $\frac{x(x^2)^3}{x^2} = \frac{x \cdot x^6}{x^2} = \frac{x^7}{x^2} = x^5$ 。

答: D

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

13. 对于所有整数 x 和 y , 下列哪项和 $\frac{2^{x-y}}{2^{x+y}}$ 相等?

解: $\frac{2^{x-y}}{2^{x+y}} = 2^{x-y-(x+y)} = 2^{-2y} = 4^{-y}$ 。

答: B

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

14. 如果 10^x 等于 10^y 的百分之 0.1, 且 x 和 y 均是整数, 那么下列哪一项一定正确?

解: $10^x = 10^y \times 0.1\% = 10^y \times \frac{1}{1000} = 10^y \cdot 10^{-3} = 10^{y-3}$, 所以 $x = y - 3$, 即 $y = x + 3$ 。

答: B

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

15. If t is an integer and $8m = 16^t$, which of the following expresses m in terms of t ?

- A. 2^4
- B. 2^{t-3}
- C. $2^{3(t-3)}$
- D. 2^{4t-3}
- E. $2^{4(t-3)}$

16. $x > 0$ and $x \neq 1$

Quantity A: $(2x^{-4}) \cdot 3x^2$

Quantity B: $\frac{24x}{4x^2}$

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.

15. 已知 t 是一整数, 且 $8m = 16^t$, 那么下列用 t 表示 m 的表达式哪项是正确的?

解: $8m = 16^t$, 所以 $2^3 \cdot m = (2^4)^t$, $m = \frac{(2^4)^t}{2^3} = \frac{2^{4t}}{2^3} = 2^{4t-3}$ 。

答: D

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

16. $x > 0$ 且 $x \neq 1$

$A = (2x^{-4}) \cdot 3x^2$, $B = \frac{24x}{4x^2}$ 。

解: $A = (2x^{-4}) \cdot 3x^2 = 6x^{-2}$, $B = \frac{24x}{4x^2}$

$= 6x^{-1}$ 。 $\frac{A}{B} = \frac{6x^{-2}}{6x^{-1}} = \frac{1}{x}$, 我们不知道 x 和 1 的大小关系, 所以无法判断 A 和 B 的大小关系。

答: D

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

17. x is a negative integer.

Quantity A: 2^x

Quantity B: 3^{x+1}

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

17. x 是一负整数, $A=2^x$, $B=3^{x+1}$ 。

解: $\frac{B}{A} = \frac{3^{x+1}}{2^x} = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x$,

当 $x=-1$ 时, $\frac{B}{A} = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = 2 >$

1, 所以 $B > A$;

当 $x=-2$ 时, $\frac{B}{A} = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{4}{3} >$

1, 所以 $B > A$;

当 $x=-3$ 时, $\frac{B}{A} = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \frac{8}{9} <$

1, 所以 $B < A$;

关于 x 的函数 $3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x$ 是一单调递

增函数, 由上面的分析我们可以看

出 $x \leq -3$ 时, $3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x < 1$; 当 $x >$

-3 时, $3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x > 1$ 。所以 A 和 B

的大小关系不确定。

答: D

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

2.3 解线性方程 (Solve an equation)

解方程(solve an equation)就是去寻找能够让等式成立的未知数的值。两个有相同解的方程叫等价方程(equivalent equations)。例如: $x+1=3$ 和 $2x+1=5$ 的解都是 $x=2$, 所以这两个方程被称为等价方程。解方程最核心的步骤就是不断简化方程, 然后让方程的解变得显而易见。下面的定律对于解方程来说至关重要。

- 方程两边同时加上或者减去同一个数后, 方程的解不变。
- 方程两边同时乘或除以一个非零数之后, 方程的解不变。

线性方程(linear equation)指的是一个包含一个或多个未知数, 且每一项或者是常数, 或者是一个一次项的方程。注意未知数指数大于等于 2 的方程以及有两个未知数相乘的方程不能叫线性方程。例如 $2x+1=7$ 以及 $10x-2y-z=7$ 都是线性方程, 但 $x-y^2=1$ 和 $xz=3$ 不是线性方程。

解含有一个未知数的线性方程的方法：我们会通常会结合使用合并同类项和移项的方式来进行。

$$\begin{aligned} \text{例：} & 11x - 4 - 8x = 3(x + 2) - 2x \\ & 3x - 4 = x + 6 \text{ (合并同类项)} \\ & 3x - x = 6 + 4 \text{ (移项)} \\ & 2x = 10 \text{ (合并同类项)} \\ & x = 5 \end{aligned}$$

解完方程之后大家可以把最后结果代入原方程来进行检验，例如把 $x=5$ 代入 $11x - 4 - 8x = 3(x + 2) - 2x$ ，则有 $11 \times 5 - 4 - 8 \times 5 = 3 \times (5 + 2) - 2 \times 5$ ，化简得左边 11，右边 11，所以 $x=5$ 验证无误。

另外，线性方程有可能无解，例如方程 $2x + 3 = 2(5 + x)$ 就无解，因为化简之后可得 $3 = 10$ ，这明显是不成立的。

解含有两个未知数的线性方程的方法：含有两个未知数 ($x \neq y$) 的线性方程可以写成如下形式： $ax + by = c$ (a, b 是实数，且 a 和 b 都不等于 0)。

例如， $3x + 2y = 8$ 就是一个含有两个未知数的线性方程。这种方程的解都是一个有序数对 (ordered pair)，写成 (x, y) 。这意味着当把有序数对的数代入方程之后，能够满足整个方程。例如， $(2, 1)$ 和 $(4, -2)$ 都是方程 $3x + 2y = 8$ 的解，但是 $(2, 2)$ 却不是该方程的解。

一个含有两个未知数的线性方程有无数多的解。如果另外一个有同样未知数的方程也同样满足，那么我们得到一个联立方程组 (system of equations)，在方程组里的两个方程被称为联立方程 (simultaneous equations)，解联立方程组也就是找同时满足两个方程的解。常用的解二元一次方程组的方法包括换元法 (substitution) 和消元法 (elimination)。

• 换元法 (Substitution)

换元法就是用其中一个方程改写成用一个未知数表示另外一个未知数，例如方程组 $\begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$ ，我们可以把第二个方程改写成 $x = \frac{5 - 3y}{2}$ ，然后把这个式子代入第一个方程可得 $10 - 6y + 3y = 7$ ，推出 $y = 1$ ，然后再推出 $x = 1$ 。

• 消元法 (Elimination)

消元法的目标是把同一个未知数的系数进行转换使得可以通过加法或减法来消掉一个未知数，例如在方程组 $\begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$ ，这个式子中，我们可以把第二个方程左右两边同时乘以 2 得到 $4x + 6y = 10$ ，然后再用这个式子去减去第一个式子得

到 $3y=3$, 所以 $y=1$, 再推出 $x=1$ 。我们再举一个例子 $\begin{cases} 4x+3y=7 \\ -2x+3y=1 \end{cases}$, 我们可以把第二个式子左右两边同时乘以 2 得到 $-4x+6y=2$, 再用这个式子加上第一个式子得到 $9y=9$, 所以 $y=1$, 再推出 $x=1$ 。

换元法和消元法都可以用来解二元一次方程组, 所得结果也必然相同, 在选取的时候注意多观察数字特征, 选取最方便的方法。一般来说在 ETS 考察的题目中, 消元法更常用。

综合训练

1. A total of 1,500 boxes are stored in four warehouses. The number of boxes stored in the individual warehouses are x , y , z and w , respectively, where $w=2x$ and $z=2y$.
Quantity A: $x+y$
Quantity B: 500
A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
1. 四个仓库中一共存储了 1500 个箱子。四个仓库中分别存储了 x , y , z 和 w 的箱子, 而且 $w=2x$, $z=2y$ 。 $A=x+y$, $B=500$ 。
解: 由“仓库中一共有 1500 个盒子”可得: $x+y+w+z=1500$, 且 $w=2x$, $z=2y$, 则 $x+y+2x+2y=1500$, 得到 $x+y=500$, 即 $A=B$ 。
答: C
2. If x is 4 more than half of y and if y is 10 more than half of x , what is the value of x ?
2. 已知 x 比 y 的 $1/2$ 大 4, y 比 x 的 $1/2$ 大 10, 那么 x 的值是多少?
解: 我们可以根据已知条件列出一个二元方程组:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}y + 4 \\ y = \frac{1}{2}x + 10 \end{cases}$$

解得: $x=12$ 。

3. The system of equations has how many solutions?

$$\begin{cases} 3x - 6y = 9 \\ 2y - x - 3 = 0 \end{cases}$$

- A. None
B. Exactly 1
C. Exactly 2
D. Exactly 3
E. Infinitely many

4. $(x+3)(y-4)=0$

Quantity A: xy

Quantity B: -12

- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.

3. 下列方程组有多少个解?

$$\begin{cases} 3x - 6y = 9 \\ 2y - x - 3 = 0 \end{cases}$$

- A. 无解
B. 一个解
C. 两个解
D. 三个解
E. 无穷多解

解: 根据第一个方程我们得到: $x - 2y = 3$; 根据第二个方程我们得到 $x - 2y = -3$, 即在该方程组中 $x - 2y \neq x - 2y$, 所以该方程组无解。

答: A

4. 已知 $(x+3) \cdot (y-4) = 0$, $A = xy$, $B = -12$ 。

解: 因为 $(x+3) \cdot (y-4) = 0$, 所以 $x = -3$ 或者 $y = 4$, 而并不要求这两者同时成立, 所以 xy 和 -12 的大小关系不确定:

当 $x = -3$ 时, 令 $y = -4$, $xy = 12$, 所以 $xy > -12$;

当 $x = -3$ 时, 令 $y = 5$, $xy = -15$, 所以 $xy < -12$;

综上 A 和 B 的大小关系不确定。

答: D

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

5. The expressions in the table below give the distance from Centerville to each of two trains t hours after 12:00 noon. At what time after 12:00 noon will the trains be equidistant from Centerville?
- A. 1:30 B. 3:30
C. 5:10 D. 8:50
E. 11:30

	Distance from Centerville (miles)
Freight train	$-10t+115$
Passenger train	$-20t+150$

6. If $\frac{d-3n}{7n-d}=1$, which of the following statements describes d in terms of n ?
- A. d is 4 less than n .
B. d is 4 more than n .
C. d is $\frac{3}{7}$ of n .
D. d is 2 times n .
E. d is 5 times n .

5. 上表中的表达式给出了两种火车在中午 12 点 t 小时后距离 Centerville 的距离。那么在 12 点后的哪一时间两辆火车距离 Centerville 相等?

解: 当两火车距离 Centerville 相等时,
 $-10t+115=-20t+150$, 解得 $t=3.5$ 。即在中午 12 点之后三个半小时两火车距离 Centerville 相等。
 $12:00+3:30=15:30$, 即下午 3:30 两火车距离 Centerville 相等。

答: B

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

6. 已知 $\frac{d-3n}{7n-d}=1$, 那么下列选项中哪个正确描述了 d 和 n 之间的关系?
- A. d 比 n 小 4。
B. d 比 n 大 4。
C. d 是 n 的 $\frac{3}{7}$ 。
D. d 是 n 的 2 倍。
E. d 是 n 的 5 倍。

解: 因为 $\frac{d-3n}{7n-d}=1$, 所以 $d-3n=7n-d$, 所以 $2d=10n$, 即 $d=5n$, 所以 d 是 n 的 5 倍。

答: E

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

7. Each year, the members of a book club select novels and nonfiction books to read. The club meets 3 times to discuss each novel and 5 times to discuss each nonfiction book they select. Last year, the club met 52 times and discussed 12 books. How many novels did the club discuss last year?

- A. 2
- B. 4
- C. 5
- D. 7
- E. 14

8. If $\frac{m+n}{4+5} = \frac{m}{4} + \frac{n}{5}$, which of the following statements must be true?

- A. $m=n$
- B. $5m=4n$
- C. $5m=-4n$
- D. $25m=16n$
- E. $25m=-16n$

7. 每年读书俱乐部的成员都会选择小说和非小说类书籍进行阅读。该俱乐部利用 3 次聚会讨论一本小说、5 次聚会讨论一本非小说类书籍。去年该俱乐部一共聚会 52 次, 讨论了 12 本书。那么去年该俱乐部共讨论了多少本小说?

解: 设该俱乐部去年讨论了 x 本小说, 那么就讨论了 $(12-x)$ 本非小说类书籍。那么聚会的次数一共为 $3x+5(12-x)=52$, 解得 $x=4$ 。所以去年该俱乐部共讨论了 4 本小说。

答: B

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

8. 如果 $\frac{m+n}{4+5} = \frac{m}{4} + \frac{n}{5}$, 那么下列哪个说法一定正确?

解: 因为 $\frac{m+n}{4+5} = \frac{m}{4} + \frac{n}{5}$, $\frac{m+n}{9} = \frac{5m+4n}{20}$, 利用十字相乘得到 $20(m+n) = 45m + 36n$, 化简得到 $25m = -16n$ 。

答: E

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

2.4 解一元二次方程 (Solve Quadratic Equation)

含有未知数 x 的一元二次方程(quadratic equation)可以写成以下形式:

$$ax^2 + bx + c = 0 (a, b, c \text{ 都是实数且 } a \neq 0)$$

我们一般用 $\Delta = b^2 - 4ac$ 来判定一元二次方程的根的数量, 具体判定方法如下:

- 当 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ 时, 一元二次方程有两个不同的实数根。
- 当 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ 时, 一元二次方程有一个实数根。
- 当 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 时, 一元二次方程无实数根。

当一元二次方程有实数根时, 实数根可以用一下求根公式(quadratic formula)来求:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

例: 求一元二次方程 $2x^2 - x - 6 = 0$ 的根。

解: 根据求根公式我们可知 $x =$

$$\frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - (4)(2)(-6)}}{2 \times 2} = \frac{1 \pm 7}{4}, \text{ 所以 } x = 2 \text{ 或 } -\frac{3}{2}.$$

除了求根公式求一元二次方程的根, 我们还可以用因式分解的方法求。例如上面例子中的方程 $2x^2 - x - 6 = 0$ 可以用因式分解的方法分解为 $(2x + 3)(x - 2) = 0$, 所以可以得到 $x = 2$ 或 $-\frac{3}{2}$ 。因式分解要用十字相乘法, 要把 $ax^2 + bx + c = 0$ 改写成 $(a_1x + c_1)(a_2x + c_2) = 0$, 那么要求 $a = a_1 \cdot a_2$, $c = c_1 \cdot c_2$ 且 $a_1 \cdot c_2 + a_2 \cdot c_1 = b$, 所以写成这样一个形式:

$$a_1 \quad c_1$$

$$a_2 \quad c_2$$

只要交叉相乘再求和的结果是 b , 那么就满足条件。

例: 求一元二次方程 $x^2 + 6x - 7 = 0$ 的根。

解: 写成如下十字相乘

$$1 \quad 7$$

就能满足 $1 \times 7 + 1 \times (-1) = 6$, 所以方程可以因式分解为 $(x - 1)(x + 7) = 0$, 所以 $x = 1$ 或 -7 。

例：求一元二次方程 $5x^2 + 3x - 2 = 0$ 的根。

解：写成如下十字相乘

$$\begin{array}{cc} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{array}$$

就能满足 $5 \times 1 + 1 \times (-2) = 3$ ，所以方程可以因式分解为 $(5x - 2)$

$(x + 1) = 0$ ，所以 $x = \frac{2}{5}$ 或 -1 。

综合训练

1. The equation $ax^2 = bx^2 + 1$, where a and b are constants, has two real solutions.
- Quantity A: a
- Quantity B: b
- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.
1. 一元二次方程 $ax^2 = bx^2 + 1$ 有两个解， a 和 b 为常数， $A = a$ ， $B = b$ 。
- 解：根的判别式 $\Delta = 0 + 4(a - b) > 0$ ，所以 $a > b$ ，即 $A > B$ 。
- 答：A
2. The reciprocal of $x - 2$ is $x + 2$
- Quantity A: x
- Quantity B: 3
- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.
2. $x - 2$ 的倒数等于 $x + 2$ ， $A = x$ ， $B = 3$ 。
- 解： $\frac{1}{x - 2} = x + 2$ ，即 $(x - 2) \cdot (x + 2) = 1$ ，解得 $x = \pm\sqrt{5} < 3$ ，即 $A < B$ 。
- 答：B

3. What is the sum of all possible solutions of the equation $|x+4|^2 - 10|x+4| = 24$
- A. -16
B. -14
C. -12
D. -8
E. -6

4. If a and b are the two solutions of the equation $x^2 - 5x + 4 = 0$, what is the value of $\frac{1+a}{a} \cdot \frac{1+b}{b}$?
Give your answer as a fraction.

5. If $\frac{2y-3}{y} = \frac{3-y}{2}$, which of the following could be the value of y ?
- A. 4
B. 1
C. -1
D. -3
E. -5

3. 方程 $|x+4|^2 - 10|x+4| = 24$ 所有解的和是多少?

解: 令 $y = |x+4|$, 所以 $y > 0$, 则原方程变为 $y^2 - 10y = 24$, 解得 $y = 12$, 即 $|x+4| = 12$, 所以 $x = 8$ 或者 -16 , 所以所有解得和为 $8 - 16 = -8$.

答: D

4. 若 a 和 b 是方程 $x^2 - 5x + 4 = 0$ 的两个解, 那么 $\frac{1+a}{a} \cdot \frac{1+b}{b}$ 的值是多少? 请以分数形式给出答案。

解: 因为 $x^2 - 5x + 4 = 0$, 所以 $(x-1)(x-4) = 0$, 所以该方程的两个解是 1 和 4。我们不妨令 $a = 1$, $b = 4$, 那么 $\frac{1+a}{a} \cdot \frac{1+b}{b} = \frac{1+1}{1} \cdot \frac{1+4}{4} = 2 \times \frac{5}{4} = \frac{5}{2}$ 。

答: $\frac{5}{2}$

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

5. 已知 $\frac{2y-3}{y} = \frac{3-y}{2}$, 那么下列选项哪个可能是 y 的值?

解: $\frac{2y-3}{y} = \frac{3-y}{2}$, 利用十字相乘法化简得: $4y - 6 = 3y - y^2$, 解得 $y = -3$ 或者 2 。所以 D 选项是正确的。

答: D

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

$$6. \frac{x(x-2)}{(x+3)(x-4)^2} = 0$$

Quantity A: x Quantity B: -2

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

$$6. \text{ 已知 } \frac{x(x-2)}{(x+3)(x-4)^2} = 0, A=x, B=-2.$$

解: 因为 $\frac{x \cdot (x-2)}{(x+3)(x-4)^2} = 0$, 所以 $x \cdot (x-2) = 0$, 解得 $x=0$ 或者 $x=2$, 所以 $x > -2$ 。

答: A

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

2.5 解线性不等式 (Solve Inequality)

使用下列不等式符号的数学表达式称为不等式(inequality)。

- 小于号 $<$ (less than)
- 大于号 $>$ (greater than)
- 小于等于号 \leq (less than or equal to)
- 大于等于号 \geq (greater than or equal to)

和方程相似, 不等式也可以包含未知数, 含有未知数的不等式和方程的区别主要就是符号。例如, 不等式 $4x-1 \leq 11$ 是一个包含一个未知数的线性不等式, 表示的意思是 $4x-1$ 小于或者等于 11。解不等式(solve an inequality)就是去找满足不等式的未知数的值的集合, 这个集合被称为不等式的解集(solution set)。两个有着相同解集的不等式叫作等价不等式(equivalent inequalities)。

解不等式的方法与解方程的方法类似, 主要也是通过合并同类项和移项来简化不等式, 主要也是依据以下两条规则:

- 不等式左右两边同时加上或减去同一个数之后, 新的不等式和原不等式互为等价不等式, 不等号方向不改变。

- 不等式左右两边同时乘以或者除以同一个非零正数之后, 新的不等式和原不等式互为等价不等式, 不等号方向不改变; 不等式左右两边同时乘以或除以同一个非零负数之后, 不等号改变方向, 当然新的不等式和原不等式依然互为等价不等式。

例: 求不等式 $3x+5 \leq 17$ 的解集。

解: $3x+5 \leq 17$

$$3x \leq 17-5 \text{ (移项)}$$

$$3x \leq 12 \text{ (合并同类项)}$$

$$x \leq 4 \text{ (不等式左右两边同时除以 3)}$$

例：求不等式 $\frac{4x+19}{11} < 5$ 的解集。

解： $\frac{4x+19}{11} < 5$

$$4x+19 < 55 \text{ (不等式两边同时乘以 11)}$$

$$4x < 55 - 19 \text{ (不等式两边同时减去 19)}$$

$$4x < 36 \text{ (合并同类项)}$$

$$x < 9 \text{ (不等式两边同时除以 4)}$$

不等式常用公式：

- 若 $a > b, b > c$, 则 $a > c$;
- 若 $a > b$, 则 $a + c > b + c$;
- 若 $a > b, c > d$, 则 $a + c > b + d$;
- 若 $a > b, c > 0$, 则 $ac > bc$;
- 若 $a > b, c < 0$, 则 $ac < bc$;
- 若 $a > b > 0, c > d > 0$, 则 $ac > bd$;
- 若 $a > b > 0$, 且 n 为大于 1 的整数, 则 $a^n > b^n$;
- 若 $a > b > 0$, 且 n 为大于 1 的整数, 则 $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$;
- 若 $0 < a < b$, 且 m 为大于 0 的数, 则 $\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}$;
- 若 $\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2} > \frac{a_1}{b_1}$, 则 $\frac{a_2}{b_2} > \frac{a_1}{b_1}$;
- 若 $\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2} < \frac{a_1}{b_1}$, 则 $\frac{a_2}{b_2} < \frac{a_1}{b_1}$ 。

综合训练

1. The sum of n numbers is greater than 48. If the average (arithmetic mean) of the n numbers is 1.2, what is the least possible value of n ?

1. n 个数的总和超过 48, 如果这 n 个数的平均值为 1.2, 那么 n 最小可能等于多少?

解：因为这 n 个数的平均值为 1.2, 那么这 n 个数的和为 $1.2n$ 。因为这 n 个数的总和超过 48, 我们可以列出不等式： $1.2n > 48$, 解得 $n > 40$ 。又因为 n 肯定是整数, 那么 n 最小可能等于 41。

2 $x+2y=12$ and $2y>7$

Quantity A: x

Quantity B: y

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

3. If $x < y$, which of the following must be true?

- A. $2x < y$
 B. $2x > y$
 C. $x^2 < y^2$
 D. $2x - y < y$
 E. $2x - y < 2xy$

2. 已知 $x+2y=12$ 且 $2y>7$, $A=x$, $B=y$ 。

解: $x=12-2y<5$, $y>\frac{7}{2}$, 所以无法判断 x 和 y 的大小关系, 我们取几个值代入:

令 $x=4$, 则 $y=4$, 所以 $x=y$

令 $x=2$, 则 $y=5$, 所以 $x<y$

综上, x 和 y 的大小关系不确定。

答: D

3. 已知 $x < y$, 那么下列选项中哪个一定正确?

解: 我们对每一个选项进行分析:

A. 令 $x=3$, $y=4$, 则 $2x > y$, 不成立。

B. 令 $x=3$, $y=7$, 则 $2x > y$ 不成立。

C. 令 $x=-3$, $y=-2$, 则 $x^2 < y^2$ 不成立。

D. $2x - y < y \rightarrow 2x < 2y \rightarrow x < y$, 一定成立。

E. 令 $x=\frac{1}{6}$, $y=\frac{1}{4}$, $2x - y = \frac{1}{3} -$

$\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$, $2xy = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{12} = 2x$

$-y$, 所以不成立。

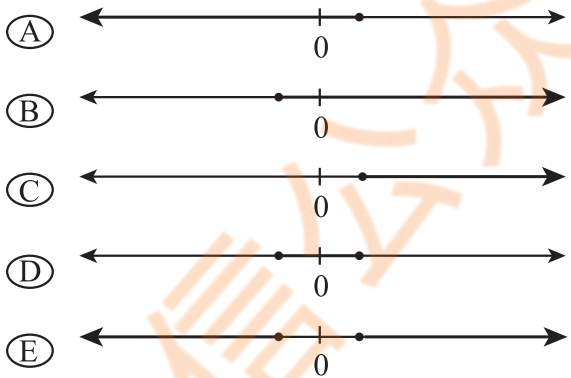
答: D

4. $x < y - 2$

Quantity A: The average (arithmetic mean) of x and y Quantity B: $y - 1$

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

5. Which of the following could be the graph of all values of
- x
- that satisfy the inequality
- $2 - 5x \leq -\frac{6x - 5}{3}$
- ?



6. If
- $x + y \neq 0$
- , which of the following is a solution to the inequality below?

$$\frac{x^2 - y^2 - 1}{x + y} > \frac{-1}{x + y}$$

Indicate all such answers.

- A. $x = 3$ and $y = 7$
 B. $x = -3$ and $y = 7$
 C. $x = -11$ and $y = -9$
 D. $x = 9$ and $y = -6$
 E. $x = -20$ and $y = -24$
 F. $x = 12$ and $y = 9$
 G. $x = -2$ and $y = 16$

4. 已知
- $x < y - 2$
- , A:
- x
- 与
- y
- 的平均值, B:
- $y - 1$
- 。

解: $A = \frac{x + y}{2} < \frac{y + y - 2}{2} = y - 1 = B$ 。

答: B

5. 下列选项中哪一个是不等式
- $2 - 5x \leq -\frac{6x - 5}{3}$
- 的解集?

解: 因为 $2 - 5x \leq -\frac{6x - 5}{3}$, 所以 $6 - 15x \leq 5 - 6x$, 所以 $9x \geq 1$, 所以 $x \geq \frac{1}{9}$, 只有 C 满足条件。

答: C

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

6. 如果
- $x + y \neq 0$
- , 那么下列选项中哪些是下面这一不等式的一个解? 选出
- 所有
- 正确答案。

解: 我们在不等式两边同时加上 $\frac{1}{x + y}$,得到 $\frac{x^2 - y^2}{x + y} > 0$, 化简得 $x - y > 0$,

发现选项 DEF 是符合条件的。

答: DEF

2.6 函数 (Function)

有一个未知数的代数式可以用来定义那个未知数的函数(function)。函数通常用字母 f, g, h 来表示。例如代数式 $3x+4$ 可以用来定义一个函数 $f(x) = 3x+4$ 。在这个函数中, $f(x)$ 被称为 f 的值, 这个值可以通过把 x 代入 $3x+4$ 来得出, 例如 $f(1)=7$ 。

我们可以把函数想象成一个输入的自动化机器, 输入自变量 x 的值会自动生成一个相对应的 $f(x)$ 的值。对于任意函数来说, 一个 x 的值只能对应一个 $f(x)$ 的值。例如 $g(x) = x^2 - x + 3$, 那么 $g(0)=3, g(2)=5, g(3)=9$ 。

在函数中, 所有可能的自变量的值的集合被称为函数的定义域(domain)。在函数 $f(x) = 3x+4$ 中, 所有的实数都可以代入函数, 所以这个函数的定义域就是所有的实数的集合。有时候我们会规定函数的定义域, 例如在函数 $f(x) = x^2 - 2$ 中, 规定 $-2 \leq x \leq 2$, 那么函数的定义域就是 $[-2, 2]$ 。再例如函数 $f(x) = \frac{2}{x-3}$, 大家都知道分母不能为零, 所以 $x \neq 3$, 所以函数的定义域是 $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$ 。

“ $f(x)$ ”和“ $g(x)$ ”仅是函数表达的符号, 函数还可以有其他的方式来表达。ETS 考察的函数题中有大量新定义的运算符号构成的函数, 例如定义 $a \square b = a^2 + b^2$, 那么 $2 \square 3 = 2^2 + 3^2 = 13$, 再如 $a * b = a + b - ab$, 则 $3 * 2 = 3 + 2 - 3 \times 2 = -1$ 。

综合训练

1. The function f and g are defined by $f(x) = |2x+1|$ and $g(x) = 3$ for all numbers x . What is the least value of c for which $f(c) = g(c)$?

1. 函数 f 定义为 $f(x) = |2x+1|$, 函数 g 定义为 $g(x) = 3$ 。那么使得 $f(c) = g(c)$ 的最小的 c 的值为多少?

解: 因为 $f(c) = g(c)$, 所以 $|2c+1| = 3$, 即 $2c+1 = 3$ 或 -3 , 解得 $c = 1$ 或 -2 , 所以使得 $f(c) = g(c)$ 的最小的 c 的值为 -2 。

答: -2

2. From 2011 to 2012, Jack's annual salary increased by 10 percent and Arnie's annual salary decreased by 5 percent. If their annual salaries were equal in 2012, then Arnie's annual salary in 2011 was what percent greater than Jack's annual salary in 2011?

Give your answer to the nearest 0.1 percent.

3. The population of Country X for 1980 was p . The population of Country X increased by 3.8 percent in each of the next two years.

Quantity A: The population of Country X for 1982.

Quantity B: $1.076p$

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

2. 从 2011 年到 2012 年, Jack 的年工资增长了 10%, Arnie 的年工资减少了 5%, 如果他们俩 2012 年的工资相等, 那么 Arnie 在 2011 年的工资比 Jack 高多少个百分点? 请把答案精确到十分位。

解: 设 Jack 在 2011 年的工资为 J , Arnie 在 2011 年的工资为 A 。所以 $1.1J = 0.95A$ 。得到 $A = 1.1578J$ 。所以 A 比 J 高出 $\frac{A-J}{J} = \frac{1.1578J-J}{J} = 0.1578 \approx 15.8\%$ 。

答: 15.8%

3. 1980 年 X 国家的总人口为 p , 在接下来两年中人口增长速率均为每年 3.8%。A: 1982 年 X 国家人口总数, B: $1.076p$ 。

解: 1982 年 X 国家的人口总数 = $p(1 + 3.8\%)(1 + 3.8\%) \approx 1.077p > 1.076p$, 即 $A > B$ 。

答: A

4. The function f is defined by $f\left(\frac{x+3}{2}\right) = 3x^2 - x + 5$ for all x .

Quantity A: $f(4)$

Quantity B: 75

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.
5. The function f has the property that $f(x) = f(x+1)$ for all numbers x . If $f(4) = 17$, what is the value of $f(8)$?

4. 对于所有 x , 函数 f 定义为 $f\left(\frac{x+3}{2}\right) = 3x^2 - x + 5$ 。A = $f(4)$, B = 75。

解: 令 $\frac{x+3}{2} = 4$, 解得 $x = 5$ 。所以 $f(4) = 3 \times 5^2 - 5 + 5 = 75$ 。

答: C

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

5. 函数 f 具有性质: $f(x) = f(x+1)$ 对于所有 x 均成立。如果 $f(4) = 17$, 那么 $f(8)$ 的值是多少?

解: $f(8) = f(7+1) = f(7) = f(6+1) = f(6) = f(5+1) = f(5) = f(4+1) = f(4) = 17$ 。

答: 17

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

6. Which of the following functions f defined for all numbers x has the property that $f(-x) = -f(x)$ for all numbers x ?

A. $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$

B. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

C. $f(x) = x^2(x^2-1)$

D. $f(x) = x(x^3-1)$

E. $f(x) = x^2(x^3-1)$

6. 下列函数中，哪一个对于所有的 x 都有 $f(-x) = -f(x)$?

解：我们对选项逐一进行分析。

A. $-f(x) = \frac{-x^3}{x^2+1}$, $f(-x) =$

$\frac{(-x)^3}{(-x)^2+1} = \frac{-x^3}{x^2+1}$, 即 $f(-x) = -$

$f(x)$, 所以 A 选项符合条件;

B. $-f(x) = \frac{-x^2+1}{x^2+1}$, $f(-x) =$

$\frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, 即 $f(-x) \neq -$

$f(x)$, 所以 B 选项不符合条件;

C. $-f(x) = -x^2(x^2-1)$, $f(-x) =$

$(-x)^2((-x)^2-1) = x^2(x^2-1) \neq$

$-f(x)$, 所以 C 选项不符合条件;

D. $-f(x) = -x(x^3-1)$, $f(-x) =$

$-x((-x)^3-1) = x(x^3+1) \neq$

$-f(x)$, 所以 D 选项不符合条件;

E. $-f(x) = -x^2(x^3-1)$, $f(-x) =$

$(-x)^2((-x)^3-1) = -x^2(x^3+1) \neq -f(x)$, 所以 E 选项不符合条件。

答：A

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

7. The operation \otimes is defined for all integers x and y as $x \otimes y = xy - y$. If x and y are positive integers, which of the following CANNOT be zero?

- A. $x \otimes y$
- B. $y \otimes x$
- C. $(x-1) \otimes y$
- D. $(x+1) \otimes y$
- E. $x \otimes (y-1)$

7. 运算符号 \otimes 是这么定义的：对于任意整数 x 和 y ， $x \otimes y = xy - y$ 。如果 x 和 y 都是正整数，那么下列选项中哪一个不可能是 0？

解： $x \otimes y = xy - y = x(y-1)$ ，当 $y=1$ 时 $x \otimes y = 0$ ，所以 A 选项不符合要求；

$y \otimes x = yx - x = y(x-1)$ ，所以当 $x=1$ 时， $y \otimes x = 0$ ，所以 B 选项不符合要求；

$(x-1) \otimes y = (x-1)y - y = y(x-2)$ ，所以当 $x=2$ 时， $(x-1) \otimes y = 0$ ，所以 C 选项错误；

$(x+1) \otimes y = (x+1)y - y = xy$ ，因为 x 和 y 均是正数，所以 $xy \neq 0$ ，D 选项正确；

$x \otimes (y-1) = x(y-1) - (y-1)$ ，当 $x=y=1$ 时，原式 $= 0$ ，所以 E 错误。

答：D

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

2.7 应用题 (Real Problem)

从严格意义上来讲，应用题并不算一种单独的题型，而是一种综合性比较强的题，他不仅涉及算术、代数、几何等方面的知识，还涉及经济学、统计学以及物理学上的一些基本概念。所以不仅要求学生有扎实的数学知识，还要有很强的英文阅读能力。换句话说，就是要求考生具备把冗长复杂的文字变成简单明晰的数学表达式的能力。GRE 数学主要喜欢考以下几种类型应用题。

• 平均数问题

平均数基本公式 $A = \frac{a+b+c+\dots}{n}$ (a, b, c, \dots 代表每个数据， n 代表数字个

数)。换句话表达就是平均数 = $\frac{\text{总数}}{\text{数字个数}}$ ，GRE 数学题喜欢在“总数”上做文章，增加题目难度。

例：一个俱乐部有 25 个男性，35 个女性，男性的平均年龄是 27.6 岁，女性的平均年龄是 25.4 岁，求整个俱乐部成员的平均年龄。

解：根据题意可知 25 个男性的总年龄是 $25 \times 27.6 = 690$ 岁，35 个女性的总年龄是 $35 \times 25.4 = 889$ 岁，所以平均年龄 = $\frac{\text{总年龄}}{\text{人数}}$ =

$$\frac{690 + 889}{25 + 35} = 26.3 \text{ (四舍五入保留小数点后一位)}。$$

答：26.3

• 运动问题

运动问题的核心关系式：距离 (distance) = 速度 (velocity) \times 时间 (time)。运动问题又细分为：反向运动和同向运动。

反向运动有两种情况，一种是两个物体同时同地向相反的方向运动，第二种是两个物体同时但不同的向相反的方向运动。在两种情况下， $d_1 + d_2 = d$ ，这里的 d_1 和 d_2 分别表示第一个物体和第二个物体在一定时间里移动的距离， d 表示两个物体移动的距离之和。

同向运动也称为“追赶运动”，两个物体同时间地以不同速度向相同的方向运动，被称为同向运动。

例：A certain train travels 150 miles in h hours at the average rate of m miles per hour.

Quantity A: The number of hours required for the train to travel 320 miles at the average rate of $2m$ miles per hour.

Quantity B: h

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.

译：一辆火车在 h 个小时里以 m 英里每小时的速度行驶了 150 英里。

A: 当火车以 $2m$ 里每小时的速度行驶时, 行驶 320 里所需要的时间

B: h

解: 由题目已知条件可以得到 $m \cdot h = 150$, 即 $m = \frac{150}{h}$, $A = \frac{320}{2m} =$

$$\frac{160}{m} = \frac{160}{\frac{150}{h}} = \frac{16}{15}h > h, \text{ 即 } A > B.$$

答: A

• 工作问题

工作问题主要是研究工人或机器完成一定工作量所需时间问题。在工作问题中完成某项工作所用的时间与参加该项工作的人数成反比, 也就是说劳动者(工人或机器)越多, 工作就完成得越快。下面是解决工作问题的通用公式:

$$\frac{A}{x} + \frac{A}{y} = 1$$

在这个公式中, x 和 y 分别代表两个劳动者单独完成这个工作所需时间, A 代表的是两个劳动者共同完成这工作所需时间。例如, 工人甲单独完成某一项工作所需时间是 4 天, 工人乙单独完成同一项工作所需时间是 12 天, 则甲每天完成总工作量的 $\frac{1}{4}$, 乙每天完成总工作量的 $\frac{1}{12}$, 所以 $A=3$, 因为 $\frac{3}{4} + \frac{3}{12} = 1$ 。

在工作问题中一般要出现三个量: 工作总量、工作时间(完成工作总量所需的时间)和工作效率(单位时间内完成的工作量)。这三个量之间有下列一些关系:

- 工作效率 \times 工作时间 = 工作总量
- 工作总量 \div 工作时间 = 工作效率
- 工作总量 \div 工作效率 = 工作时间

例: Machine A, working alone at its constant rate, produces x pounds of peanut in 12 minutes. Machine B, working alone at its constant rate, produces x pounds of peanut in 18 minutes. How many minutes will it take machines A and B, working simultaneously at their respective constant rates, to produce x pounds of peanut?

译: 机器 A 以恒定速率单独工作时, 12 分钟能够生产 x 磅的花生; 机器 B 以恒定速率单独工作时, 18 分钟能够生产 x 磅的花生。现在机器 A 和 B 同时按照其各自速率工作, 多长时间能生产 x 磅花生?

解：我们可以认定机器 A 和 B 工作效率均匀，那么机器 A 每分钟生产 $\frac{x}{12}$ 磅花生，机器 B 每分钟生产 $\frac{x}{18}$ 磅花生，所以两机器一起工作时每分钟生产 $\left(\frac{x}{12} + \frac{x}{18}\right) = \frac{5x}{36}$ 磅花生，所以生产 x 磅花生需要 $\frac{x}{\frac{5x}{36}} = \frac{36}{5} = 7.2$ 分钟。

答：7.2

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

• 混合物问题

在混合物问题中，我们会把一些有着不同性质的物质混合在一起，形成一个特定的混合物。混合物问题包括以下两种分类：

①湿混合物(wet mixture)包括混合液体，气体，颗粒，这些是用重量和体积进行混合，不是用个数混合。

②干混合物(dry mixture)包括混合一些固体，例如硬币，石头，球，这些东西的混合以数量，体积，重量都可以衡量。

湿混合问题通常要涉及浓度的百分比，而干混合物的问题则通常涉及原始数目和数量。但是无论用哪种混合，解决它们的思路都是一样的，即要牢牢抓住混合前后的不变量。

例：How many quarts of pure alcohol must you add to 15 quarts of solution that is 40% alcohol to strengthen it to a solution that is 60% alcohol?

- A. 5
- B. 7.5
- C. 10
- D. 12.5
- E. 15

译：题目意思是在 15 夸脱含 40% 酒精的溶液中加入多少夸脱纯酒精能使得新的溶液的酒精含量是 60%。

解：我们设需要加入 x 夸脱酒精，则有 $\frac{15 \times 40\% + x}{15 + x} = 60\%$ 。

这个方程解出 $x = 7.5$ ，所以答案选 B。

答：B

• 集合问题

集合问题包含的内容非常广泛，这里主要讲解所谓的“双重叠” (double overlap) 问题，就是把一个物体按照两个维度进行 2×2 的分类，例如从形状上分为圆形和三角形，从颜色来分可分为红色和绿色，然后四种分类各占一个比例 (如下图)。

	圆形	三角形	汇总
红色	20%	30%	50%
绿色	22%	28%	50%
汇总	42%	58%	

在这个图当中，四种类型 (红色圆形、红色三角形、绿色圆形、绿色三角形) 的占比之和是 100%，红色和绿色占比之和是 100%，圆形和三角形占比之和是 100%。

例： At a certain university, 60% of the professors are women, and 70% of the professors are tenured. If 90% of the professors are women, tenured, or both, then what percent of the men are tenured?

A. 25 B. 37.5 C. 50 D. 62.5 E. 75

译： 某一大学内，60%的教授是女性，70%的教授是终身教授。如果 90%的教师是女性或是终身教授或既是女性又是终身教授，那么男性终身教授占男性教授多少百分比？

解： 我们按照刚才的知识点讲解画图如下：

	tenured	not tenured	汇总
man	X		40%
woman	Y	Z	60%
汇总	70%	30%	

又知道 $X + Y + Z = 90\%$ ，所以先算出 man 且 not tenured = 10%，所以可以算出 $X = 30\%$ ，所以在男性中，终身教授占 $30\%/40\% = 75\%$ 。

答： E

综合训练

1. At a certain elementary school, 10 percent of the fifth-grade students are members of the school band. If 12 percent of the fifth-grade boys and 8 percent of the fifth-grade girls are members of the band, what percent of the fifth-grade students at the school are boys?
- A. 10% B. 12%
C. 20% D. 30%
E. 50%
2. According to a tax rate formula for a certain year, the amount of tax owed by an individual whose annual income was between \$31,850 and \$77,100 was equal to a base tax of \$4,386 plus 24 percent of the annual income that exceeded \$31,850. According to this formula, what was the amount of tax owed by an individual whose annual income that year was \$42,000?
1. 在一所小学内, 10%的五年级学生是学校乐队的成员。如果五年级学生中有12%的男生和8%的女生是学校乐队的成员, 那么五年级学生中有多少是男生?
- 解: 根据题意可以列出方程, 设男孩有 x 人, 女孩有 y 人, 则 $12\%x + 8\%y = 10\%(x + y)$, 解得 $x = y$, 所有男女生各占 50%。
- 答: E
2. 根据税率准则, 年收入在 31850 到 77100 美元之间的个人所需上缴的税款等于基础税款 4386 美元再加上超过 31850 美元的部分的 24%。根据这一准则, 若某人年收入为 42000 美元, 那么他所需上缴的税款为多少?
- 解: 上缴税款 = $4,386 + 24\%(42,000 - 31,850) = 4386 + 0.24 \times 10,150 = 4386 + 2436 = 6822$ 。
- 答: 6822

3. Company A has twice as many employees as Company B, and the two companies have no employees in common. If 64 percent of the employees of Company A are women and 52 percent of the employees of Company B are women, what percent of all the employees of the two companies are women?

3. A 公司的员工数量是 B 公司的两倍，且没有员工同时被这两个公司雇佣。如果 A 公司中 64% 的员工为女性，B 公司中 52% 的员工为女性，那么两个公司中女性员工占总人数的百分比为多少？

解：我们令 B 公司的员工数量为 x ，那么 A 公司的员工数量就为 $2x$ 。A 公司女性员工的数量为 $64\% \cdot 2x$ ，B 公司女性员工的数量为 $52\% \cdot x$ 。那么两公司中女性员工的总数为 $64\% \cdot 2x + 52\% \cdot x = 1.8x$ ，女性员工占总人数的百分比 $= \frac{1.8x}{x+2x} =$

$$\frac{1.8x}{3x} = 0.6 = 60\%。$$

答：60%

4. A pianist agreed to perform one concert at a fee 12.5 percent less than her usual fee and a second concert at a fee 20 percent greater than the first fee. The fee for the second concert was what percent greater than her usual fee?

4. 一位音乐家在她的第一场音乐会中收取比正常少 12.5% 的费用，而在第二场音乐会中将收取比第一场多 20% 的费用。那么第二场音乐会收取的费用比正常情况下多了多少？

解：我们假设这位音乐家正常情况下一场音乐会收取的费用为 x ，那么她第一场收取的费用为 $(1 - 12.5\%)x = 87.5\%x$ ，第二场收取的费用为 $(1 + 20\%) \cdot 87.5\%x = 105\%x$ ，即比正常情况下多了 5%。

答：A

- A. 5%
- B. 7.5%
- C. 15%
- D. 16.25%
- E. 32.5%

5. The discounted price of a certain suit is 20 percent less than the original price of the suit. If the discounted price of the suit plus a sales tax of 5 percent of the discounted price equals \$ 67.20, what was the original price of the suit?
- A. \$ 70.50
B. \$ 73.90
C. \$ 76.00
D. \$ 79.80
E. \$ 80.00
5. 一件西服打折后的价格比原价低 20%。如果打折后的价格再加上销售税(打折后价格的 5%)一共是 67.20 美元,那么这套西装的原价是多少?
- 解: 设这件西装的原价为 x , 那么打折后的价格为 $0.8x$, 销售税 $= 0.8x \cdot 5\% = 0.04x$, 所以 $0.8x + 0.04x = 67.2$, 解得 $x = 80$, 即这套西装原价为 80 元。
- 答: E
6. A family paid 12 percent of its annual after-tax income on food last year. This amount was equal to 10 percent of its annual before-tax income last year. Which of the following is closest to the percent of the family's annual before-tax income that was paid for taxes last year?
- A. 8%
B. 12%
C. 17%
D. 20%
E. 25%
6. 某家庭去年把 12% 的税后收入用于食品方面的消费。而用于食品这部分的消费等于税前收入的 10%。那么去年该家庭所上缴的税占税前收入的比例是多少? 请在下列选项中选择最接近的答案。
- 解: 设该家庭税后收入为 x , 税前收入为 y , 则该家庭去年用于食品方面的消费为 $0.12x$, 且 $0.12x = 0.1y$, 得到 $x = \frac{5}{6}y$ 。那么该家庭上缴税款 $= y - x = \frac{1}{6}y$, 即占税前收入的 $\frac{1}{6} \approx 17\%$ 。
- 答: C

7. If $0 < x < y < 10$, then $A(x, y)$ represents the area of the region bounded by the number line, the semi-circle, and the vertical segments at x and y , as indicated by the shaded region.

$$0 < a < b < c < 10$$

$$\text{Quantity A: } A(a, b) + A(b, c)$$

$$\text{Quantity B: } A(a, c)$$

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.
8. Mike, Scott, Jim, Kate and Pete each have a different number of assignments this month. Pete has fewer assignments than Kate, Kate has more assignments than Mike, Mike has more assignments than Jim, and Jim has more assignments than Scott. Which of the following could be the person who has the median number of assignments this month for the five people listed?

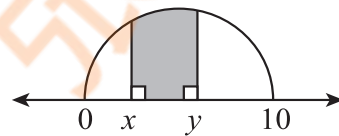
Indicate all such answers.

- A. Mike B. Scott
 C. Jim D. Kate
 E. Pete

7. 已知 $0 < x < y < 10$, $A(x, y)$ 代表图中的阴影区域。现在已知 $0 < a < b < c < 10$, $A = A(a, b) + A(b, c)$, $B = A(a, c)$ 。

解：我们通过画图容易得到 A 和 B 是相等的。

答：C



8. Mike, Scott, Jim, Kate 和 Pete 这一个月任务数量不等。Pete 的任务量比 Kate 少, Kate 的任务量比 Mike 多, Mike 的任务量比 Jim 多, Jim 的任务量比 Scott 多。那么谁的任务量是这五个人的任务量的中位数? 选出所有正确答案。

解：我们分别用 M, S, J, K, P 来代表 Mike, Scott, Jim, Kate 和 Pete 这一个月任务数量。现在已知 $K > M > J > S$ 和 $K > P$ 。我们想要找出五人任务量的中位数, 那么就要对这五人的任务量进行排序。我们现在确定的就是 P 分别和 M, J, S 的大小关系。

若 $P > M$, 则五人任务量的大小关系为 $K > P > M > J > S$, 此时中位数为 M, 即 Mike。

若 $J < P < M$, 则五人任务量的大小

关系为 $K > M > P > J > S$ ，此时中位数为 P ，即 Pete。

若 $S < P < J$ ，则五人任务量的大小关系为 $K > M > J > P > S$ ，此时中位数为 J ，即 Jim。

若 $P < S$ ，则五人任务量的大小关系为 $K > M > J > S > P$ ，此时中位数为 J ，即 Jim。

答：ACE

9. Amy and Jed are among the 35 people, who are standing in a line, one behind the other, waiting to buy movie tickets. The number of people in front of Amy plus the number of people behind Jed is 24. If there are 15 people behind Amy, including Jed, how many people are in front of Jed?

- A. 23
- B. 25
- C. 27
- D. 29
- E. 31

9. 35 个人排成一列，Amy 和 Jed 在排在其中。他们一个接着一个，排队买电影票。在 Amy 之前的人数和在 Jed 之后的人数加起来等于 24。如果在 Amy 之后有 15 人(包括 Jed)，那么 Jed 之前有多少人？

解：设 Amy 之前有 x 人，Amy 和 Jed 之间有 y 人，Jed 之后又 z 人。根据题目已知条件我们可以列出方程组：

$$\begin{cases} x + y + z + 2 = 35 & (35 \text{ 人排成一列}) \\ x + z = 24 & (\text{在 Amy 之前的人数和在} \\ \text{Jed 之后的人数加起来等于 } 24) \\ y + z + 1 = 15 & (\text{在 Amy 之后有 } 15 \text{ 人}) \end{cases}$$

解得： $x = 19$ ， $y = 9$ ，则在 Jed 之前共有 $x + y + 1 = 29$ 。

答：D

10. For each of the last 5 years, the population of a colony of beetles increased by 8 percent of the preceding year's population. If P represents the current population of the colony, which of the following best represents the population 5 years ago, in terms of P ?

- A. $5 \times 1.08P^{-1}$
- B. $1.08^{-5} \cdot P^{-1}$
- C. $1.08P^{-5}$
- D. $1.08^{-5}P$
- E. $1.08^{-5} \cdot P^5$

11. The width and the length of a rectangular piece of plywood are 4 feet and 8 feet, respectively. Along one edge of the plywood, a strip x inches wide and 8 feet long is removed. Then, along an edge perpendicular to the 8-foot edge, a strip x inches wide is removed. For what value of x will the remaining rectangular piece have width and length in the ratio of 2 to 5? (1 foot = 12 inches)

10. 在过去的五年间, 甲壳虫种群每年数量都会比前一年增长 8%, 如果 P 代表现在该种群的数量, 那么 5 年前该种群数量为多少?

解: 设 5 年前该种群的数量为 x , 那么 $x(1+8\%)^5 = P$, 即 $x = P \cdot (1+8\%)^{-5} = 1.08^{-5}P$.

答: D

11. 一块矩形胶合板的宽和长分别是 4 英尺和 8 英尺。在胶合板一边的边缘, 切掉宽为 x 英寸、长为 8 英尺的长条。然后, 沿着垂直于 8 英尺的一边, 宽为 x 的长条被切掉了。现在剩下这个矩形胶合板长宽之比为 5:2, 那么 x 的值为多少?

解: 切割后剩下的矩形胶合板的长和宽

$$\begin{aligned} \text{分别为 } 8 - \frac{x}{12}, 4 - \frac{x}{12}, \text{ 所以 } \frac{8 - \frac{x}{12}}{4 - \frac{x}{12}} \\ = \frac{5}{2}, \text{ 解得 } x = 16. \end{aligned}$$

答: 16

12. The decorating committee for a dance plans to fringe the 3-inch wide end of a streamer by making small cuts every $\frac{1}{16}$ inch. How many cuts must be made to fringe the end?

- A. 45
- B. 46
- C. 47
- D. 48
- E. 49

13. To obtain an FHA mortgage for \$50,000 or more, the home buyer must have a down payment equal to 4 percent of the first \$25,000 of the mortgage amount and 5 percent of the portion in excess of \$25,000. At settlement the buyers pays a mortgage-insurance premium equal to 3 percent of the mortgage amount. What is the maximum FHA mortgage, if any, a buyer can obtain if the buyer has only \$6,000 available for the down payment and insurance premium?

- A. \$62,500
- B. \$71,875
- C. \$78,125
- D. \$125,000
- E. The home buyer cannot obtain an FHA mortgage.

12. 一装饰组为了舞蹈表演,将在3英寸长的彩色纸带上每 $\frac{1}{16}$ 英寸剪一刀。那么一共需要剪多少次?

解: 简而言之就是计算3 inch 长的纸带每次剪 $\frac{1}{16}$ inch 一共多少次能剪完; $\frac{3}{\frac{1}{16}}=48$, 但是最后一次不用剪, 即47次即可剪完。

答: C

13. 为了获得\$50000或者更多的抵押贷款,房屋购买者必须缴纳一定量的首付(抵押贷款基础部分\$25000的4%加上超过基础部分的5%)。同时购买者还要支付价值为抵押贷款总量3%的保险。如果一位购买者为首付和保险共准备了\$6000,那么他最多可以获得多少抵押贷款?

解: 设获得抵押贷款 x 美元,则首付为 $25000 \times 4\% + (x - 25000) \cdot 5\%$, 保险为 $3\%x$, 所以 $25000 \times 4\% + (x - 25000) \cdot 5\% + 3\%x = 6000$, 解得 $x = 78125$ 。

答: C

14. The 20 people at a party are divided into n mutually exclusive groups in such a way that the number of people in any group does not exceed the number in any other group by more than 1.

Quantity A: The value of n if at least one of the groups consists of 3 people

Quantity B: 6

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.

15. Anne pays 150 percent more for a wholesale widget than Bart pays. Anne's retail price per widget is 15 percent greater than the wholesale price she paid. Bart's retail price per widget is 185 percent greater than the wholesale price he paid.

Quantity A: Anne's retail price

Quantity B: Bart's retail price

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.

14. 在聚会上, 20 人被分为 n 个组, 且每个人仅被分到一个组中。各组人数相差不超过一个人。A: 当至少有一组由 3 人组成时, n 的值; B: 6。

解: 至少有一个小组包括 3 人剩下的 17 人分成 $n-1$ 个小组, 且各组人数相差不超过一人, 我们找出两个极端: 一个极端是有 7 个 2 人小组和 2 个 3 人小组, $n=9$ 。另一个极端是有 4 个 3 人小组和 2 个 4 人小组, $n=6$ 。

答: D

15. Anne 批发的装饰品每一件比 Bart 多花 150%, Anne 零售卖出每件装饰品的价格比她的批发进价高出 15%, Bart 零售卖出每件装饰品的价格比他的批发进价高出 185%。A: Anne 的零售价格, B: Bart 的零售价格。

解: 设 Bart 的批发进价为 x , 那么 Anne 的批发进价为 $2.5x$, Bart 的零售价为 $2.85x$, Anne 的零售价格 $2.5x(1+15\%)=2.875x > 2.85x$, 所以 $A > B$ 。

答: A

16. Last year Leo bought two paintings. This year he sold them for \$2,000 each. On one, he made a 25% profit, and on the other he had a 25% loss. What was his net loss or profit?
- A. He broke even.
B. He lost less than \$100.
C. He lost more than \$100.
D. He earned less than \$100.
E. He earned more than \$100.
16. 去年 Leo 买了两幅画。今年他以每幅 \$2000 的价格卖出。其中一幅画他获得 25% 的利润, 另一幅损失了 25%, 那么他的净利润或者净损失是多少?
- A. 他收支平衡。
B. 他的损失小于 \$100。
C. 他的损失大于 \$100。
D. 他的利润小于 \$100。
E. 他的利润大于 \$100。

解: 我们可以算出赚 25% 的那幅画成本价为 \$1600, 亏 25% 的那幅画成本价为 \$2666.67, 所以一幅画赚了 \$400, 另一幅画亏了 \$666.67, 即一共亏了 \$266.67, 即 C 选项正确。

答: C

17. A manufacturing company has plants in three locations: Indonesia, Mexico, and Pakistan. The company has 6,000 employees, and each of the employees works at only one of the plants. If $\frac{3}{8}$ of the employees work at the plant in Indonesia and if twice as many employees work at the plant in Mexico as work at the plant in Pakistan, how many employees work at the plant in Mexico?
17. 一家加工公司在 Indonesia, Mexico, and Pakistan 三地有工厂。该公司有 6000 名员工, 且每名员工只在其中一家工厂工作。如果 $\frac{3}{8}$ 的员工在 Indonesia 的工厂工作, 且在 Mexico 工作的员工数量是在 Pakistan 的两倍, 那么在 Mexico 的工厂工作的员工数量是多少?

解: $\frac{3}{8}$ 的员工在 Indonesia, 那么在 Mexico 和 Pakistan 的员工占 $\frac{5}{8}$, 一共是 $6000 \times \frac{5}{8} = 3750$ 人。且 Mexico 的员工是 Pakistan 的两倍, 那么在 Mexico 的员工数量为 $3750 \div 3 \times 2 = 2500$ 。

答: 2500

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

18. During an experiment, the pressure of a fixed mass of gas increased from 40 pounds per square inch (psi) to 50 psi. Throughout the experiment, the pressure, P psi, and the volume, V cubic inches, of the gas varied in such a way that the value of the product PV was constant.

Quantity A: the volume of the gas when the pressure was 40 psi

Quantity B: 1.2 times the volume of the gas when the pressure was 50 psi

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.

19. The fabric needed to make 3 curtains sells for \$8.00 per yard and can be purchased only by the full yard. If the length of fabric required for each curtain is 1.6 yards and all of the fabric is purchased as a single length, what is the total cost of the fabric that needs to be purchased for the 3 curtains?

- A. \$40.00
- B. \$38.40
- C. \$24.00
- D. \$16.00
- E. \$12.80

18. 在一项实验中, 一固定质量的气体压强从 40psi 上升至 50psi。在实验中, 压强 P (单位: psi) 和体积 V (平方英寸) 会改变, 但两者乘积不变。
A: 当压强为 40psi 时气体的体积,
B: 当压强为 50psi 时 1.2 倍气体的体积。

解: 设当气体压强为 40psi 时体积为 V_1 , 气体压强为 50psi 时体积为 V_2 。由题目可知压强与体积的乘积不变, 那么 $40V_1 = 50V_2$, 得到 $V_1 = 1.25V_2$, 即 $A > B$ 。

答: A

19. 一块用来制作三个窗帘的布售价是每八美元一码, 并且只能买整数码。如果用来制作每个窗帘需要的布长是 1.6 码, 且布只能买一次, 那么做三个窗帘的布总共需要花多少钱?

解: 三个窗帘的总长度是 $3 \times 1.6 = 4.8$ 码, 因为只能买整数码的布, 所以需要买 5 码长的布。布的价格是八美元一码, 所以总共需要 $5 \times 8 = 40$ 。

答: A

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

20. The total amount that Mary paid for a book was equal to the price of the book plus a sales tax that was 4 percent of the price of the book. Mary paid for the book with a \$10 bill and received the correct change, which was less than \$3.00. Which of the following statements must be true?

Indicate all such statements.

- A. The price of the book was less than \$9.50.
- B. The price of the book was greater than \$6.90.
- C. The sales tax was less than \$0.45.

20. Mary 买一本书共付了 \$10，这其中包括书本身的价格和书的价格 4% 的销售税，售货员找零正确共找了不到 \$3，那么下列说法中哪些是正确的？请选择所有正确的答案。

- A. 书本身的价格小于 \$9.50。
- B. 书本身的价格大于 \$6.90。
- C. 销售税小于 \$0.45。

解：我们设书本身的价格为 x ，那么销售税为 $4\% \cdot x$ ，那么 Mary 一共付了 $1.04x$ ，由题目已知条件可以列出不等式： $10 - 1.04x < 3$ ，解得 $x > 6.73$ 且 $x < 10$ ，所以销售税在 0.2692 到 0.4 之间。

- A. 由上面的分析看出，书本身的价格不一定小于 9.5，比如，当书的价格为 \$9.51 时同样是成立的。A 选项错误。
- B. 书本身的价格可以是 6.73 到 10 之间的任意一个值。B 选项错误。
- C. 我们已知销售税在 0.2692 到 0.4 之间，即小于 0.4，所以一定小于 0.45。C 选项正确。

答：C

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

21. Machine R, working alone at a constant rate, produces x units of a product in 30 minutes, and machine S, working alone at a constant rate, produces x units of the product in 48 minutes, where x is a positive integer.

Quantity A: The number of units of the product that machine R, working alone at its constant rate, produces in 3 hours

Quantity B: The number of units of the product that machine S, working alone at its constant rate, produces in 4 hours

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.

21. 机器 R 单独工作的效率一定, 每 30 分钟生产 x 个单位的产品; 机器 S 单独工作的效率一定, 每 48 分钟生产 x 个单位的产品, x 是一正整数。
A: 机器 R 以恒定工作效率单独工作时 3 小时生产的产品数量; B: 机器 S 以恒定工作效率单独工作时 4 小时生产的产品数量。

解: 30 分钟 = 0.5 小时, 那么机器 R 单独工作 3 小时能够生产 $\frac{3}{0.5} = 6$ 个单位的产品; 48 分钟 = 0.8 小时, 那么那么机器 S 单独工作 4 小时能够生产 $\frac{4}{0.8} = 5$ 个单位的产品, 所以 A > B。

答: A

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

22. A certain shipping service charges an insurance fee of \$0.75 when shipping any package with contents worth \$25.00 or less and an insurance fee of \$1.00 when shipping any package with contents worth over \$25.00. If Dan uses the shipping company to ship three packages with contents worth \$18.25, \$25.00, and \$127.50, respectively, what is the total insurance fee that the company charges Dan to ship the three packages?
- A. \$1.75 B. \$2.25
C. \$2.50 D. \$2.75
E. \$3.00

23. A certain store sells two types of pens: one type for \$2 per pen and the other type for \$3 per pen. If a customer can spend up to \$25 to buy pens at the store and there is no sales tax, what is the greatest number of pens the customer can buy?
- A. 9
B. 10
C. 11
D. 12
E. 20

22. 某航运服务会收取一定的保险费用: 当运输的货物价值低于或等于 \$25.00 时收取 \$0.75 的费用, 当运输的货物价值高于 \$25.00 时, 收取 \$1.00 的费用。如果 Dan 选择该航运服务运输三件货物, 分别价值 \$18.25, \$25.00, \$127.50, 那么该航运服务一共会收取 Dan 多少保险费用。

解: 由题目可知三件货物中, 两件收取 \$0.75 的保险费, 一件收取 \$1.00 的保险费, 所以总费用是 $2 \times 0.75 + 1.00 = 2.50$ 。

答: C

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

23. 某商店卖两种笔: 一种笔每只 \$2, 另一种每只 \$3。在不存在销售税的情况下, 一位消费者共花费 \$25 在该商店买笔, 那么这位消费者最多可以买多少只笔?

解: 为了买的笔数量尽可能多, 那么要求花尽可能多的钱、且尽可能购买较便宜的那种笔。如果我们把所有的钱全部用来买 \$2 的那种笔, 那么一共能买 12 只, 但是还有 \$1 剩余; 如果我们为了把 \$25 全部花完, 那么我们可以买 11 只 \$2 的笔, 1 只 \$3 的笔, 这样一共也是买 12 只。所以这位消费者最多可以买 12 只笔。

答: D

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

24. A company plans to manufacture two types of hammers, type R and type S. The cost of manufacturing each hammer of type S is \$0.05 less than twice the cost of manufacturing each hammer of type R.

Quantity A: The cost of manufacturing 1,000 hammers of type R and 1,000 hammers of type S

Quantity B: The cost of manufacturing 1,500 hammers of type S

A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

25. A town and B ville are connected by a straight, 420-mile road. At noon, Atu left A town for Bville, and Brek left B ville for A town. If Atu travels at 56 miles per hour and Brek travels at 49 miles per hour, how many miles apart will Atu and Brek be 1 hour before they meet

24. 某公司计划加工两种锤子，型号 R 和型号 S。加工每个 S 型号锤子的价格比加工两个 R 型号锤子的价格低 \$0.05。A：加工 1000 个 R 型号锤子和 1000 个 S 型号锤子的成本；B：加工 1500 个 S 型号的锤子的成本。

解： 设加工每个 R 型号的锤子的成本为 x ，所以加工每个 S 型号的锤子的成本为 $2x - 0.05$ 。 $A = 1000(x + 2x - 0.05) = 3000x - 50$ ， $B = 1500(2x - 0.05) = 3000x - 75$ ，所以 $A > B$ 。

答： A

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

25. A、B 两地有一条笔直的、长为 420 英里的道路连接起来。Atu 离开 A 地准备去往 B 地，Brek 离开 B 地准备前往 A 地。如果 Atu 的速度为每小时 56 英里，Brek 的速度为 49 英里每小时，那么相遇前一小时他们俩相距多远？

解： 题目问相遇前一小时他们俩相距多远也就意味着他们距离相遇还有 1 小时的路程，所以还相距 $56 \times 1 + 49 \times 1 = 105$ 英里。

答： 105

26. If an investment of P dollars is made today and the value of the investment doubles every 7 year, what will be the value of the investment, in dollars, 28 years from today?

- A. $8P^4$
- B. P^4
- C. $16P$
- D. $8P$
- E. $4P$

27. At a certain company, employees who earn \$20.00 per hour will be given an increase of \$1.00 per hour. For each of the other employees, either the employee will be given an increase of \$1.00 per hour or the employee will be given a percent increase equal to the percent increase that will be given to the employees who earn \$20.00 per hour, whichever results in a larger increase for that employee. Which of the following statements are true?

Indicate all such statements.

- A. An employee who earns less than \$20.00 per hour will be given a percent increase that is greater than the percent increase that will be given to the employees who earn \$20.00 per hour.

26. 今天投资了 P 美元且这笔投资的价值每 7 年翻倍, 那么从今天起 28 年后, 这笔投资的价值将达到多少?

解: 28 年中有 4 个 7 年, 所以这笔投资在 28 年间会经历 4 次翻倍, 所以 28 年后这笔投资就价值为 $2^4 \cdot P = 16P$ 。

答: C

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

27. 某公司, 每小时挣 20 美元的员工每小时的工资将增长 1 美元。对于其余的员工, 将从下面两种方式选择一种增幅较大的方式对工资进行变化: 每小时工资上涨 1 美元, 或者涨幅百分比与每小时挣 20 美元的员工相同。下列说法哪个是正确的, 请选出所有正确的答案。

- A. 每小时收入少于 20 美元的员工增长百分比比每小时收入 20 美元的员工高。
- B. 每小时收入 22 美元的员工每小时的工资将增长 1.1 美元。
- C. 每小时收入 24 美元的员工收入增长后将达到 25.2 美元每小时。

解: 由题目可知, 每小时挣 20 美元的员工时薪的涨幅为 5%。时薪小于 20 美元的员工应选择“每小时工资上涨 1 美元的变化方式”, 时薪大于 20 美元的员工应该选择“每小时工资上涨 5%”的变化方式。

- B. An employee who earns \$ 22.00 per hour will be given an increase of \$ 1.10 per hour.
- C. An employee who earns \$ 24.00 per hour will earn \$ 25.20 per hour after the increase.

A. 由上面的分析可知，每小时收入少于 20 美元的员工工资将增加 1 美元，即增长百分比大于 5%，即 A 选项正确。

B. 由上面的分析可知，每小时收入 22 美元的员工工资增长 5%，即 $22 \times 5\% = 1.1$ ，即 B 选项正确。

C. 由上面的分析可知，每小时收入 24 美元的员工工资增长 5%，即 $24 \times 5\% = 1.2$ ，那么增长后的工资 = $24 + 1.2 = 25.2$ ，即 C 选项正确。

答：ABC

28. A certain money market account that had a balance of \$ 48,000 during all of last month earned \$ 360 in interest for the month. At what simple annual interest rate did the account earn interest last month?
- A. 7%
- B. 7.50%
- C. 8%
- D. 8.50%
- E. 9%

28. 某资金市场账户上个月余额为 \$ 48000，并且获得了 \$ 360 的月利息。那么上个月该账户是按照多少年利率(单利)获得利息?

解：月利息为 \$ 360，那么年利息为 360×12 ，所以年利率为 $(360 \times 12) / 48000 = 9\%$ 。

答：E

29. In a factory, machine A operates on a cycle of 20 hours of work followed by 4 hours of rest, and machine B operates on a cycle of 40 hours of work followed by 8 hours of rest. Last week, the two machines began their respective cycles at 12 noon on Monday and continued until 12 noon on the following Saturday. On which days during that time period was there a time when both machines were at rest?

Indicate all such days.

- A. Monday
- B. Tuesday
- C. Wednesday
- D. Thursday
- E. Friday

29. 在一家工厂内, 机器 A 每工作 20 小时休息 4 小时, 机器 B 每工作 40 小时休息 8 小时。上一周, 机器 A 和 B 从周一中午 12 点开始他们的工作周期, 直到周六中午 12 点结束。下列选项中, 在哪一天两个机器同时在休息? 请选择所有正确答案。

- A. 周一
- B. 周二
- C. 周三
- D. 周四
- E. 周五

解: 设机器 A 休息时处于第 a 个工作周期, A 一个工作周期为 $20+4=24$ 小时即一天, 而上一周机器 A 一共工作了 5 天, 那么 $1 \leq a \leq 5$, 且 a 为整数。我们可以用 a 表示机器 A 休息的时间段: A 第一次休息时工作了 20 小时之后, 在第一次开始休息之后每经过 24 小时会再次休息, 即每次开始休息的时间点为 $20+24(a-1)=24a-4$, 结束休息的时间点为 $24a-4+4=24a$, 那么机器 A 每次休息的时间区间为 $[24a-4, 24a]$ 。

同理, 我们设机器 B 休息时已经经过了 b 个工作周期, 可以得到 $b=1$ 或 2, 机器 B 每次休息的时间区间为 $[48b-8, 48b]$ 。

若要某时间机器 A 和 B 同时在休息, 有两种情况: A 先开始休息还未休息结束时, B 也开始休息; B 先开始休息还未休息结束时 A 也开始休息。为方便考虑, 我们把两机器同时开始休息也算在这两种情况当中。

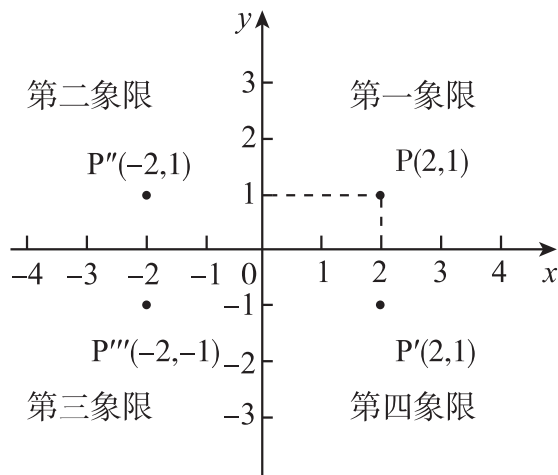
第一种情况： $24a - 4 \leq 48b - 8 < 24a$ ， $\frac{a}{2} \leq b < \frac{a}{2} + \frac{1}{6}$ 。当 $a=2$ 时， $1 \leq b < \frac{7}{6}$ ，所以 $b=1$ ，即从周一 12 点开始工作后经过了 40 个小时机器 AB 同时开始休息，即在周三两机器同时休息；当 $a=4$ 时， $2 \leq b < \frac{13}{6}$ ，所以 $b=2$ ，即从周一 12 点开始工作后经过了 $88 = 24 \times 3 + 16$ 个小时机器 AB 同时开始休息，即在周五两机器同时休息。

第二种情况与第一种情况分析过程类似，在这里不做赘述。得到的答案同样是在周三和周五两机器同时开始休息。

答：CE

2.8 坐标几何 (Coordinate Geometry)

两条相互垂直的数轴相交于各自的原点，这样的两条数轴构成一个平面直角坐标系 (rectangular coordinate system)，一般也被称为 xy 平面直角坐标系 (xy -coordinate system)。横数轴被称为 x 轴 (x -axis) 而竖数轴被称为 y 轴 (y -axis)。两条数轴的交点叫原点 (origin)，用 O 表示。 x 轴的原点右边是正的， y 轴的原点上面是正的。两条轴将平面分成四个区域或者四个象限 (quadrant)，分别是第一象限，第二象限，第三象限，第四象限 (如下图所示)。



在坐标系中的任意一点 p 可以用有序数对 (x, y) 来定义, 写成 $p(x, y)$, 在这个有序数对中, x 是横坐标 (x -coordinate), y 是纵坐标 (y -coordinate)。如果 x 是正的, 那么点位于 x 轴原点右边 $|x|$ 个单位; 如果 x 是负的, 那么点位于 x 轴左边 $|x|$ 个单位。同理如果 y 是正的, 那么点位于 y 轴原点上面 $|y|$ 个单位; 如果 y 是负的, 那么点位于 y 轴原点下边 $|y|$ 个单位。如果 $x=0$, 那么点位于 y 轴上; 如果 $y=0$, 那么点位于 x 轴上。原点的坐标是 $(0, 0)$ 。

在图中, 点 $P(2, 1)$ 在 y 轴右边 2 个单位, 在 x 轴上边 1 个单位, 点 $P''(-2, -1)$ 在 y 轴左边 2 个单位, 在 x 轴下边 1 个单位。在图中, 点 P, P', P'', P''' 有如下关系:

- 点 P 与点 P' 关于 x 轴对称 (symmetric about the x -axis)。
- 点 P 与点 P'' 关于 y 轴对称 (symmetric about the y -axis)。
- 点 P 与点 P''' 关于原点对称 (symmetric about the origin)。

在平面直角坐标系中, 两点之间的距离可以用毕达哥拉斯定理 (Pythagorean theorem) 来求。(毕达哥拉斯定理其实就是中国人常用的勾股定理)。例如, 点 $Q(-2, -3)$ 和点 $R(4, 1.5)$ 的距离就是线段 QR 的长度。要求 QR 的长度, 我们可以在坐标系中构建一个直角三角形 QRS (点 S 坐标为 $(4, -3)$), QR 就是直角三角形 QRS 的斜边, 我们可以根据勾股定理求斜边的长度。在图中我们很容易求出 $QS=6, RS=4.5$, 所求 $QR = \sqrt{QS^2 + RS^2} = \sqrt{6^2 + 4.5^2} = 7.5$ 。

拥有两个未知数的方程可以在平面直角坐标系中表示出来。在平面直角坐标系中, 未知数 x 和 y 所表示的方程的图形是所有满足方程的有序数对 (x, y) 在平面中的点的集合。

线性方程 $y = mx + b$ 的图形是一条直线, m 被称为直线的斜率 (slope), b 代表直线的 y 轴截距 (y -intercept)。

图形的 x 轴截距指的是图形与 x 轴交点的横轴坐标的值; 图形的 y 轴截距指的是图形与 y 轴交点的纵轴坐标的值。例如如果直线与 x 轴相交于 $(-1, 0)$, 与 y 轴相交于 $(0, 1)$, 那么该直线的 x 轴截距是 -1 , y 轴截距是 1 。

如果一条直线过两点 $Q(x_1, y_1)$ 和 $R(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$, 那么这条直线的斜率 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 。这个比例被称为上升运动 (rise over run), 其实代表的就是斜率, 在这个比例中, rise 是从 Q 到 R 运动时 y 轴的变化, 而 run 是从 Q 到 R 运动时 x 轴的变化。和 x 轴平行的直线的斜率是 0 , 一般这条直线方程可表示为 $y = b$, b 也是这条直线的 y 轴截距。和 y 轴平行的直线的斜率没有意义, 一般写成直线方程 $x = a$ 。 a 也是这条直线的 x 轴截距。

如果这两条直线的斜率相等, 那么这两条直线互相平行 (parallel), 如果两条

直线的斜率的乘积为 -1 ，那么这两条直线相互垂直(perpendicular)。例如直线 $y = 2x + 5$ 和直线 $y = -\frac{1}{2}x + 9$ 相互垂直，因为 $2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$ 。

平面直角坐标系对称的问题

• 两点关于一点对称

两点关于一点对称问题只有记住一个核心点就够：中点的横坐标纵坐标都是两端点横坐标纵坐标之和的一半。例如，点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_3(x_3, y_3)$ 关于点 $P_2(x_2, y_2)$ 对称，则有

$$\begin{cases} x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2} \\ y_2 = \frac{y_1 + y_3}{2} \end{cases}$$

例：在平面直角坐标系中，点 A 和点 C 关于点 B 对称，已知点 B 的坐标是 $(2, 4)$ ，点 C 的坐标是 $(6, -2)$ ，求点 A 的坐标。

解：设点 A 的坐标是 (x, y) ，则有

$$\begin{cases} 2 = \frac{x+6}{2} \\ 4 = \frac{y-2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 10 \end{cases}, \text{ 所以点 A 的坐标是 } (-2, 10)$$

• 两点关于 $y=x$ 这条直线对称

推论：如果点 $B(m, n)$ 与点 $A(a, b)$ 关于直线 $y=x$ 对称，则有 $m=b, n=a$ 。
例如点 $(3, 4)$ 与点 $(4, 3)$ 关于直线 $y=x$ 对称。

• 两条直线关于 $y=x$ 这条直线对称

如果直线 l_1 与 l_2 关于直线 $y=x$ 对称，那么可以先在直线 l_1 上取两点再分别算出这两点在直线 l_2 上对称的点，然后求直线 l_2 。

例：直线 $l_1: y = 2x + 5$ 与直线 l_2 关于直线 $y=x$ 对称，求直线 l_2 。

解：在直线 l_1 上取两点 $(1, 7), (0, 5)$ ，则直线 l_2 一定过两点 $(7,$

$1), (5, 0)$ ，根据这两点求出直线 l_2 的表达式为 $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ 。

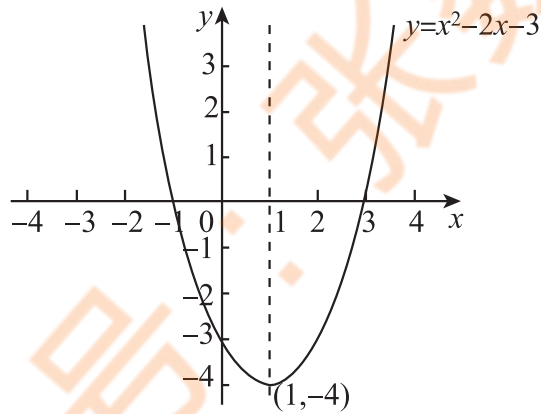
• 抛物线

一元二次方程 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 都是常数且 $a \neq 0$) 的图像是一个抛物线(parabola)，抛物线的 x 轴截距的求法就是去求 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个根，抛物线的 y 轴截距是常数项 c 。如果 $a > 0$ ，那么抛物线开口向上，抛物线的顶点(vertex)是抛物线的最低点；如果 $a < 0$ ，那么抛物线开口向下，抛物线的顶点是抛物线的最高点。

抛物线的顶点式和顶点坐标：

抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 可以通过代数换算写成 $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$ ；通过该顶点式我们可以看出抛物线的顶点为 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ 。

例：抛物线 $y=x^2-2x-3$ 的图像如下：

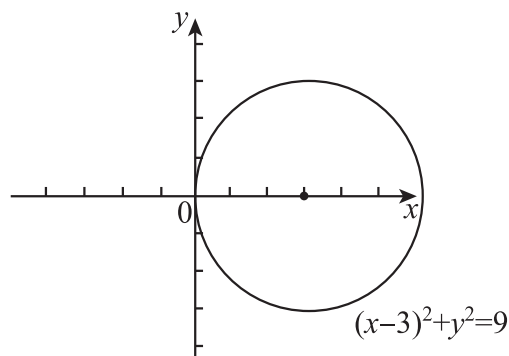


在这个图形中， x 轴截距是 -1 和 3 ，是通过方程 $x^2-2x-3=0$ 求出来的。点 $(1, -4)$ 是抛物线的顶点，直线 $x=1$ 是抛物线的对称轴 (line of symmetry)。 y 轴截距为 -3 。

• 圆

方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的图形是一个以点 (a, b) 为圆心 r 为半径的圆 (circle)。

例：方程 $(x-3)^2+y^2=9$ 的图形如下：



在这个图中，圆心为 $(3, 0)$ ，半径为 3 。

综合训练

1. In the xy -plane, C and D are circles centered at the origin with radii $\sqrt{17}$ and $\sqrt{5}$, respectively.

Quantity A: The number of points (a, b) on circle C where both a and b are integers.

Quantity B: The number of points (a, b) on circle D where both a and b are integers

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

2. Which of the following is an equation of a line that does NOT contain any points in the xy -plane for which both coordinates are integers?

- A. $y=4$
 B. $y=\frac{1}{2}x$
 C. $y=x+3$
 D. $y=x+\frac{1}{2}$
 E. $y=\frac{1}{2}x+3$

1. 在 xy 平面内, C 和 D 是圆心在原点, 半径分别为 $\sqrt{17}$ 和 $\sqrt{5}$ 。

A: 圆 C 上横纵坐标均为整数的点的数量

B: 圆 D 上横纵坐标均为整数的点的数量

解: 圆 C 的方程为 $x^2 + y^2 = 17$, 圆 D 的方程为 $x^2 + y^2 = 5$, 那么圆 C 上横纵坐标均为整数的点有 $(1, 4)$, $(-1, 4)$, $(-1, -4)$, $(1, -4)$, 共四个点。圆 D 上横纵坐标均为整数的点有 $(1, 2)$, $(-1, 2)$, $(-1, -2)$, $(1, -2)$ 共四个点, 即 $A=B$ 。

答: C

2. 下列哪条直线不包含横纵坐标均为整数的点?

解: 我们对选项逐一分析。

A. 直线 $y=4$ 上的点纵坐标一定为整数, 只要横坐标取整数就能使得横纵坐标均为整数, 比如 $(1, 4)$ 等, 所以 A 不符合条件。

B. 当横坐标取偶数时, 横纵坐标均为整数, 比如 $(2, 1)$ 等, 所以 B 不符合条件。

C. 当横坐标取整数时, 横纵坐标均为整数, 比如 $(1, 4)$ 等, 所以 C 不符合条件。

D. 当横坐标取整数时, 易知纵坐标一定不是整数, 所以 D 符合条件。

E. 当横坐标取偶数时, 横纵坐标均为整数, 所以 E 不符合条件。

答: D

3. In the xy -plane, line l is parallel to the line $y=3x+2$. If line l passes through the point $(1, -1)$, then line l passes through which of the following points?

Indicate all such points.

- A. $(2, 2)$
 B. $(0, -2)$
 C. $(-2, -10)$

4. In the xy -plane, a line with equation $y=mx+b$, where m and b are constants and $mb \neq 0$, has a y -intercept that is twice the x -intercept.

Quantity A: m

Quantity B: -2

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

3. 在 xy 平面内, 直线 l 与直线 $y=3x+2$ 平行。如果直线 l 经过点 $(1, -1)$ 那么直线 l 会经过下列哪个点? 选择所有正确答案。

解: 直线 l 的斜率为 3, 且经过点 $(1, -1)$, 所以直线 l 的表达式为 $y=3x-4$, 将选项一一代入发现, A、C 在直线 l 上。

答: AC

4. 在 xy 平面内, 一条直线的表达式为 $y=mx+b$, m 和 b 均为常数且 $mb \neq 0$, y 轴上的截距是 x 轴上截距的两倍。
 A = m , B = -2 。

解: 这条直线在 y 轴上的截距为 b , 在 x 轴上的截距为 $-\frac{b}{m}$, 所以 $b=2 \cdot (-\frac{b}{m})$, 且 m 和 b 均不为 0, 解得 $m=-2$, 即 A=B。

答: C

5. In the xy -plane, the point (c, c) lies on the graph of the equation $0.3x + 0.3y = 12$

Quantity A: The value of c

Quantity B: 20

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.
6. In the rectangular coordinate system, (x, y) is a point on a circle that has center $(3, 2)$ and is tangent to the x -axis at $(3, 0)$.

Quantity A: The least possible value of x

Quantity B: 0

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

7. Line l in the xy -plane contains points A and B with coordinates $(-4, 5)$ and $(6, -1)$, respectively. Line k is perpendicular to l and contains the midpoint of line segment AB. Which of the following statements are true?

Indicate all such statements.

- A. The slope of line l is $-3/5$.
 B. Line k has a negative slope.
 C. Line k contains the point $(1, 2)$.

5. 在 xy 平面内, 点 (c, c) 在直线 $0.3x + 0.3y = 12$ 上。A: c 的值, B: 20。

解: 我们将点 (c, c) 代入直线的表达式中: $0.3c + 0.3c = 12$, 解得 $c = 20$, 即 $A = B$ 。

答: C

6. 在直角坐标系中, (x, y) 是圆上一点, 该圆圆心为 $(3, 2)$, 且与 x 轴切于点 $(3, 0)$ 。A: x 的最小值, B: 0。

解: 由题目已知条件我们可知该圆的半径为 2, 因为圆心坐标为 $(3, 2)$, 所以圆上横坐标的最小值应该是 $3 - 2 = 1 > 0$, 即 $A > B$ 。

答: A

7. xy 平面上的直线 l 经过点 $A(-4, 5)$ 和点 $B(6, -1)$ 。直线 k 与直线 l 垂直且经过线段 AB 中点。下列哪些选项是正确的? 请选择 所有 正确的选项。

- A. 直线 l 的斜率为 $-3/5$ 。
 B. 直线 k 的斜率为负数。
 C. 直线 k 经过点 $(1, 2)$ 。

解: 直线 l 的斜率为 $\frac{-1-5}{6-(-4)} = -\frac{3}{5}$,

因为直线 l 与直线 k 垂直, 所以直

线 k 的斜率为 $\frac{5}{3}$ 。A 和 B 的中点为 $(\frac{-4+6}{2}, \frac{5-1}{2}) = (1, 2)$ ，即直线 k 经过点 $(1, 2)$ ，综上，A 和 C 是正确的。

答：AC

8. If (a, b) is a point in the xy -plane, then the distance between (a, b) and the x -axis is $|b|$ and the distance between (a, b) and the y -axis is $|a|$.

Quantity A: The total number of points P in the xy -plane such that the distance between P and one of the axes is 10 and the distance between P and the other axis is 8

Quantity B: The total number of points Q in the xy -plane such that the distance between Q and one of the axes is 5 and the distance between Q and the other axis is 4.

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

8. 如果 (a, b) 是 xy 平面上一点，那么该点与 x 轴的距离为 $|b|$ ，该点与 y 轴的距离是 $|a|$ 。

A: 平面上与一个轴的距离为 10、与另一个轴的距离为 8 的点的数量

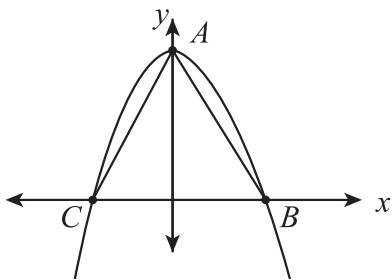
B: 平面上与一个轴的距离为 5、与另一个轴的距离为 4 的点的数量

解：选项 A 中共有两种情况，与 x 轴的距离为 10、与 y 轴的距离为 8 和与 x 轴的距离为 8、与 y 轴的距离为 10。与 x 轴的距离为 10 的点纵坐标绝对值为 10 即纵坐标为 10 或 -10。与 y 轴的距离为 8 的点横坐标绝对值为 8 即横坐标为 8 或者 -8。所以满足 A 的条件的点共有 8 个，为 $(\pm 10, \pm 8)$ 和 $(\pm 8, \pm 10)$ 。

同理，满足 B 的条件也有 8 个，为 $(\pm 5, \pm 4)$ 和 $(\pm 4, \pm 5)$ 。即 $A = B$ 。

答：C

9. The figure shows the graph of the equation $y = k - x^2$, where k is a constant. If the area of triangle ABC is $1/8$, what is the value of k ? Give your answer to the nearest 0.01.



10. Line l passes through points in both quadrants II and III. Which of the following statements are true? Indicate all such statements.
- A. Line l cannot pass through the origin.
 - B. Line l cannot pass through any point in quadrant I.
 - C. Line l cannot pass through any point in quadrant IV.
 - D. The slope of line l cannot be 0.
 - E. The slope of line l cannot be positive.
 - F. The slope of line l cannot be negative.

9. 下图给出了等式 $y = k - x^2$ 的图像，其中 k 是常数。如果三角形区域 ABC 的面积为 $\frac{1}{8}$ ，那么 k 的值是多少？答案请精确到百分位。

解：在 $y = k - x^2$ 中，当 $x = 0$ 时， $y = k$ ，所以 A 点坐标为 $(0, k)$ ；当 $y = 0$ 时， $x = \pm\sqrt{k}$ 。所以 B 点坐标为 $(\sqrt{k}, 0)$ ， C 点坐标为 $(-\sqrt{k}, 0)$ ，所以 BC 长度为 $2\sqrt{k}$ 。所以三角形 ABC 的面积为 $\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{k} \cdot k = \frac{1}{8}$ ，解得 $k = \frac{1}{4} = 0.25$ 。

答：0.25

10. 直线 l 同时经过第二和第三象限，那么下列说法中哪些是正确的？请选择所有正确的答案。

- A. 直线 l 不经过原点。
- B. 直线 l 不经过第一象限中任意一点。
- C. 直线 l 不经过第四象限中任意一点。
- D. 直线 l 的斜率不可能为 0。
- E. 直线 l 斜率不可能为正数。
- F. 直线 l 斜率不可能为负数。

解：本题通过自己画图更易理解。我们对选项进行逐一分析。

- A. 过二三象限的直线不可能经过原点，A 选项正确。
- B. 当直线斜率为正时会经过第一象限，B 选项错误。
- C. 当斜率为负时会经过第四象限，

C 选项错误。

D. 斜率为 0 的直线不可能经过 x 轴, D 选项正确。

E. 与 B 选项同理, E 选项错误。

F. 与 C 选项同理, F 选项错误。

答: AD

11. A rectangle is drawn in a standard xy -coordinate plane. If the sides of the rectangle are not parallel to the axes, what is the product of the slope of the four sides?

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

E. It cannot be determined from the information given.

12. How many points (x, y) lie on the line segment between $(22, 38/3)$ and $(7, 53/3)$ such that x and y are both integers?

A. 4

B. 5

C. 7

D. 8

E. 9

11. 一平面直角坐标系内有一矩形, 如果矩形的四条边都不平行于坐标轴, 那么四条边斜率的乘积是多少?

解: 两垂直直线的斜率乘积为 -1 , 矩形四条边中有两组互相垂直的直线, 那么四条边的斜率乘积为 $(-1) \times (-1) = 1$ 。

答: C

12. 一线段两端点分别为 $(22, 38/3)$ 和 $(7, 53/3)$, 那么对于所有在该线段上的点 (x, y) , 有多少个点满足 x 和 y 均是整数?

解: 该线段所在直线的斜率为 $\frac{53 - \frac{38}{3}}{7 - 22} =$

$-\frac{1}{3}$, 那么该直线的表达式为 $y -$

$\frac{38}{3} = -\frac{1}{3}(x - 22)$, 化简得 $y = -\frac{1}{3}$

$x + 20$, 所以只要横坐标为 3 的倍数, 那么该点的横纵坐标就均为整数。在 7 到 22 之间共有 5 个 3 的倍数, 所以共有 5 个点满足条件。

答: B

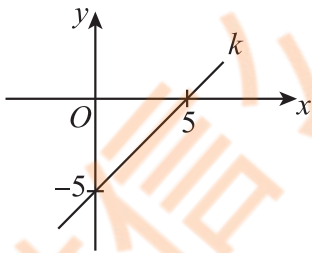
13. In the xy -plane, one of the vertices of square S is the point $(2, 2)$. The diagonals of S intersect at the point $(6, 6)$.

Quantity A: the area of S

Quantity B: 64

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.
14. What is the slope of line k in the xy -plane below?

- A. -5 B. -1 C. 0
 D. 1 E. 5



15. In the xy -plane, the equation of line k is $3x - 2y = 0$.

Quantity A: The x -intercept of line k

Quantity B: The y -intercept of line k

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

13. 在 xy 平面内, 正方形其中一个顶点为 $(2, 2)$, 正方形 S 的两条对角线相交于点 $(6, 6)$ 。A: S 的面积, B: 64。

解: 点 $(2, 2)$ 和点 $(6, 6)$ 确定了半条对角线, 由此我们可以确定出正方形的边长为 $(6-2) \times 2 = 8$, 所以正方形 S 的面积为 $8^2 = 64$, 即 $A=B$ 。

答: C

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

14. 上图中, xy 平面内直线 k 的斜率是多少?

解: 从图中我们可以看出来直线 k 经过点 $(0, -5)$ 和点 $(5, 0)$, 所以直线 k 的斜率是 $\frac{-5-0}{0-5} = 1$ 。

答: D

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

15. 在 xy 平面内, 直线 k 的表达式是 $3x - 2y = 0$ 。A: 直线 k 在 x 轴上的截距; B: 直线 k 在 y 轴上的截距。

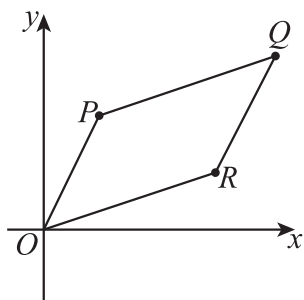
解: 直线 $3x - 2y = 0$ 是经过原点的, 即直线 k 与 x 轴和 y 轴都交于原点, 所以 k 在 x 轴和 y 轴上的截距都是 0, 即 $A=B$ 。

答: C

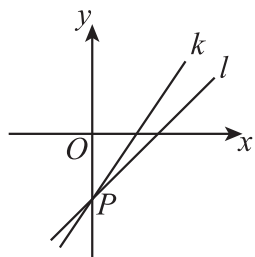
[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

16. Parallelogram OPQR lies in the xy -plane, as shown in the figure below. The coordinates of point P are (2, 4) and the coordinates of point Q are (8, 6). What are the coordinates of point R?

- A. (3, 2) B. (3, 3)
C. (4, 4) D. (5, 2)
E. (6, 2)



17. Quantity A: The slope of line k
Quantity B: The slope of line l
- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.



16. 如上图所示, 平行四边形 OPQR 在 xy 平面内。点 P 的坐标为 (2, 4), 点 Q 的坐标为 (8, 6), 那么 R 的坐标为多少?

解: 连接 OQ 和 PR 交于点 S, S 是线段 OQ 和 PR 的中点。O 点坐标为 (0, 0), 点 Q 的坐标为 (8, 6), 所以点 S 的坐标为 (4, 3); P 的坐标为 (2, 4), 那么点 R 的坐标为 $(2 \times 4 - 2, 2 \times 3 - 4) = (6, 2)$ 。

答: E

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

17. A: 直线 k 的斜率; B: 直线 l 的斜率。

解: 从图中我们可以看出直线 k 的陡峭程度明显比直线 l 的更大, 所以直线 k 的斜率更大。

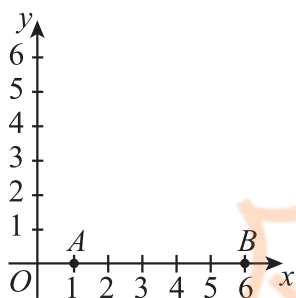
答: A

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

18. Points A and B are shown in the xy -plane below. Point C (not shown) is above the x -axis so that the area of triangle ABC is 10. Which of the following could be the coordinates of C?

Indicate all such coordinates.

- A. (0, 4) B. (1, 3)
C. (2, 5) D. (3, 4)
E. (4, 5)



19. In the xy -plane, line k is a line that does not pass through the origin.

Which of the following statements individually provide (s) sufficient additional information to determine whether the slope of line k is negative?

Indicate all such statements.

- A. The x -intercept of line k is twice the y -intercept of line k .
B. The product of the x -intercept and the y -intercept of line k is positive.
C. Line k passes through the points (a, b) and (r, s) , where $(a-r)(b-s) < 0$.

18. xy 平面给出了点 A 和 B。点 C 在 x 轴的上方, 且 ABC 的面积为 10, 那么下列哪些可能是点 C 的坐标。请选择所有正确的答案。

解: 我们把三角形 ABC 中的边 AB 当作底边, 那么高就是 C 点的纵坐标。

C 点的纵坐标为 $\frac{10}{\frac{1}{2} \times 5} = 4$, 所以 AD

选项符合要求。

答: AD

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

19. 在 xy 平面内, k 是一条不经过原点的直线。下列选项中, 哪些能够让我们判断出直线 k 的斜率是负数? 请选择所有正确的答案。

- A. 直线 k 在 x 轴上的截距是在 y 轴上截距的两倍。
B. 在 x 轴上的截距和在 y 轴上的截距的乘积大于 0。
C. 直线 k 经过点 (a, b) 和点 (r, s) , 且 $(a-r)(b-s) < 0$ 。

解: 我们对选项逐一分析:

A. 设 k 与 x 轴交于点 $(a, 0)$, 即在 x 轴上的截距为 a ; 与 y 轴交于点 $(0, b)$, 即在 y 轴上的截距为 b , 且 $a=2b$ 。因为 k 不经过原点, 所以 $ab \neq 0$ 。那么直线 k 的斜率为 $\frac{b-0}{0-a} =$

$-\frac{b}{a} = -\frac{b}{2b} = -\frac{1}{2}$ 。A 选项正确。

B. 直线 k 在 x 轴上的截距和在 y 轴上的截距的乘积大于 0 说明在 x 轴上的截距和在 y 轴上的截距同为正或者同为负, 可得出直线 k 的斜率是负的, B 选项正确。

C. 由 $(a-r)(b-s) < 0$, 可以得出直线 k 的斜率 $= \frac{b-s}{a-r} < 0$ (两个数字相乘小于 0, 那么这两个数字相除也小于 0), C 选项正确。

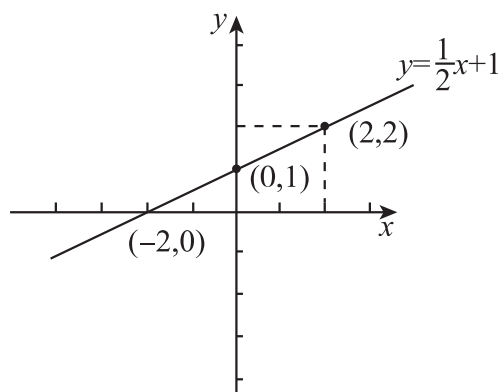
答: ABC

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

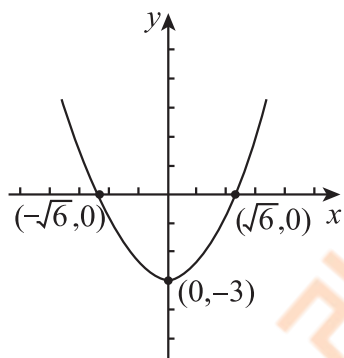
2.9 函数图像 (Function Image)

平面直角坐标系可以被用来描绘函数图像。要在平面直角坐标系中描绘函数图像, 需要把每一个自变量代入然后得出相应的点 (x, y) , $y = f(x)$ 。下面展示一些基本函数图像。

1. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$



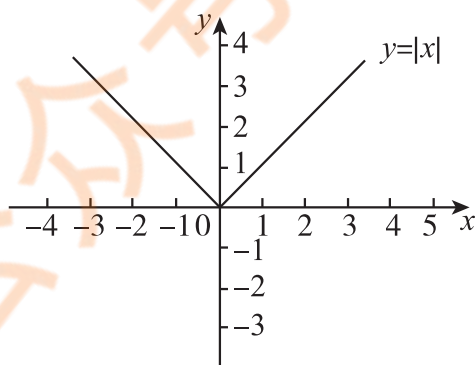
$$2. f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$$



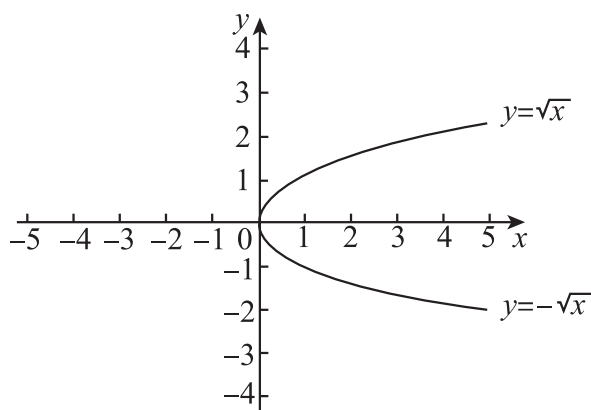
3. 函数 $h(x) = |x|$ ，函数 h 可以表达成一个分段形式的函数

$$h(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

在平面直角坐标系中，表示如下：



$$4. y = \sqrt{x}$$



图中 $y = \sqrt{x}$ 与 $y = -\sqrt{x}$ 关于 x 轴对称，一般来说，对于任何函数 h ， $y = -h(x)$ 的图像是 $y = h(x)$ 的图像关于 x 轴的映射 (reflection)。

另外，对于任何的函数 $h(x)$ 和任何的正数 c ，下列说法请记住：

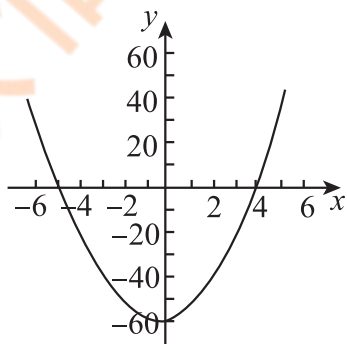
- 函数 $h(x) + c$ 的图像是 $h(x)$ 的图像向上平移 c 个单位得到 (shifted upward)。

- 函数 $h(x)-c$ 的图像是 $h(x)$ 的图像向下平移 c 个单位得到 (shifted downward)。
- 函数 $h(x+c)$ 的图像是 $h(x)$ 的图像向左平移 c 个单位得到 (shifted to the left)。
- 函数 $h(x-c)$ 的图像是 $h(x)$ 的图像向右平移 c 个单位得到 (shifted to the right)。
- 函数 $c \cdot h(x)$ 的图像是 $h(x)$ 的图像垂直伸展 (stretched vertically) 一个系数 $c(c>1)$ 。
- 函数 $c \cdot h(x)$ 的图像是 $h(x)$ 的图像垂直收缩 (shrunk vertically) 一个系数 $c(0<c<1)$ 。

综合训练

1. Which of the following could be the equation of the graph in the xy -plane shown above?

- A. $y=x^2+x-60$
- B. $y=x^2+x-20$
- C. $y=x^2+3x-60$
- D. $y=3x^2+x-60$
- E. $y=3x^2+3x-60$



1. 下列哪个表达式是下图中 xy 平面内图像?

解: 根据图像我们能够看出, 当 $x=0$ 时, $y=-60$, 故排除 B 选项。

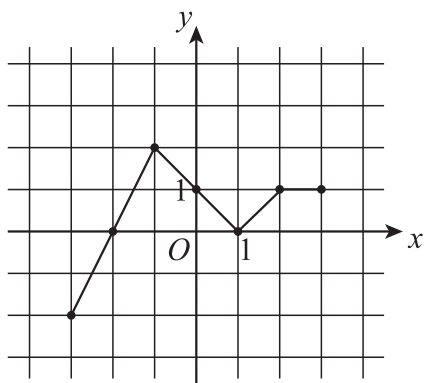
当 $x=4$ 和 -5 时, $y=0$ 。我们将 $x=4$ 和 -5 分别代入选项验证, 发现只有 E 选项在 $x=4$ 和 -5 时, y 均为 0。

答: E

2. The figure below shows the graph of the function f in the xy -plane.

What is the value of $f(f(-1))$?

- A. -2 B. -1
C. 0 D. 1
E. 2



2. 下图给出了函数 f 的图像, 那么 $f(f(-1))$ 的值是多少?

解: 由下图我们可以看出 $f(-1) = 2$, 那么 $f(f(-1)) = f(2) = 1$ 。

答: D

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

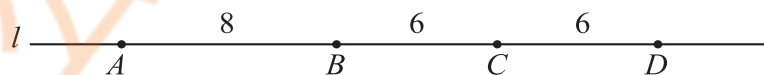
第三节 几何 (Geometry)

几何的复习从线和角开始，并延伸到其他平面图形，例如多边形，三角形，四边形和圆。在本章结尾，我们将复习一些三维图形(立体图形)。坐标几何已经在上一章几何中复习过了。

3.1 直线和角 (Lines and Angles)

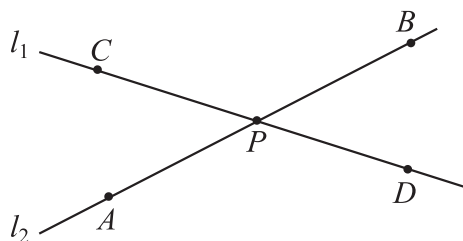
平面几何主要是关于平面图形的性质与关系的，例如角、三角形、其它多边形和圆。“点”、“线”和“面”都是我们非常熟悉而且非常直观的概念。一个点 (point) 没有大小，而且是最简单的几何图形。所有的几何图形都包含点。一条线 (line) 可以被理解为向两端无限延伸的一条直线。一个平面 (plane) 可以想象成一个桌面，只不过平面是桌面沿着所有方向无限地延伸且没有厚度。

在一条直线上任意给出两点，这两个点和其中间所有的点组成了一条线段 (line segment)，且这条线段是这条直线的一部分。长度相等的线段被称为全等线段 (congruent line segments)。把一条线段分成两个全等线段的点叫作这条线段的中点 (midpoint)。在下图中，A, B, C, D 是直线 l 上的点。



线段 AB 由点 A 、 B 以及这两点间所有的在直线 l 上的点组成。有时记号 AB 可以用来代表线段 AB 的长度 (length)。当然记号的具体含义还要根据上下文而定。在上图中，线段 AB 、 BC 、 CD 的长度分别为 8, 6, 6。因此线段 BC 和 CD 是全等的。因此 C 位于 B 和 D 的中间，即 C 是线段 BD 的中点。

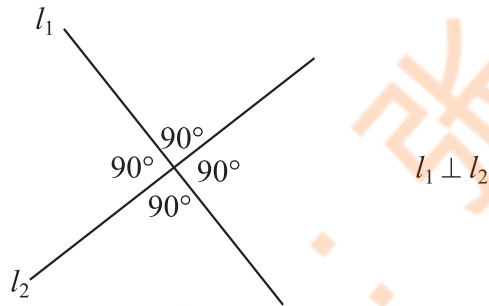
当两条直线相交于一点，就形成了四个角 (angle)，如下图所示。每一个角都有一个顶点 P ，点 P 是两条直线的交点。



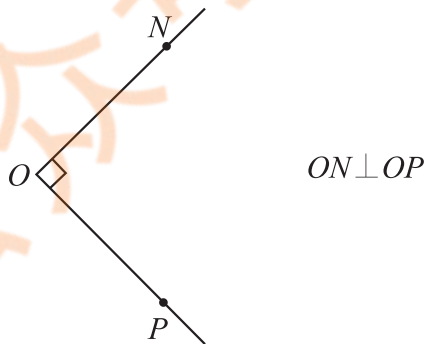
在上图中，角 APC 和角 BPD 叫作对角 (opposite angle)，或者对顶角 (vertical angle)。角 APD 和角 CPB 也叫作对角 (或对顶角)。对顶角的角度大小相等。角度大小相等的角叫作全等角 (congruent angle)。因此，对顶角是全等的。图中四个角的角度大小之和为 360° 。

有时我们用记号“ \angle ”来代替单词“angle”，比如：角 APC 可以写作 $\angle APC$ 。

相交且组成四个全等角的两条直线互相垂直(perpendicular)。相交而组成的四个角大小均为 90° 。角度大小为 90° 的角为直角。下图给出了两直线垂直的例子。直线 l_1 与直线 l_2 垂直我们可以记作 $l_1 \perp l_2$ 。

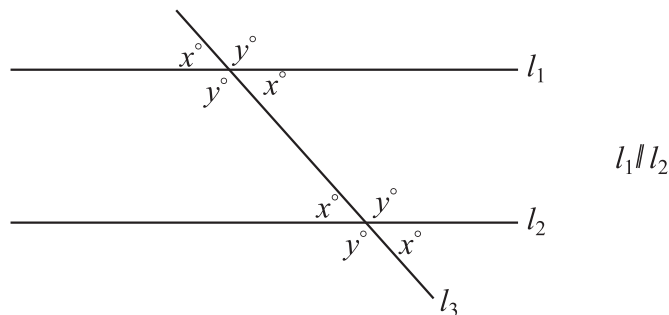


我们常用的标记直角的方法是在角的顶点处画一个小正方形。如下图所示，其中角 PON 是直角。



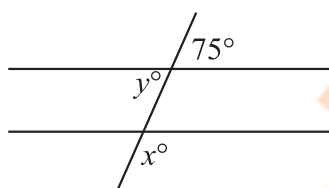
角度大小小于 90° 的角叫作锐角(acute angle)，角度大小在 90° 到 180° 之间的角叫作钝角(obtuse angle)。

同一平面内不相交的两条直线互相平行(parallel)。下图中，直线 l_1 和 l_2 是平行的，我们可以记作 $l_1 \parallel l_2$ 。一条直线 l_3 与这两条直线相交，组成了 8 个角。注意：其中的 4 个角大小为 x° ，剩下四个角的大小为 y° ， $x + y = 180$ 。



综合训练

1. Quantity A: x
Quantity B: y
- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.



2. P , Q , and R are three points in a plane, and R does not lie on line PQ . Which of the following is true about the set of all points in the plane that are the same distance from all three points?
- A. It contains no points.
B. It contains one point.
C. It contains two points.
D. It is a line.
E. It is a circle.

1. $A = x$, $B = y$.

解：注意图形不一定是按比例画的，所以两条直线不一定是平行的，即两条直线可以随意变换位置，即 A 和 B 大小关系不确定。

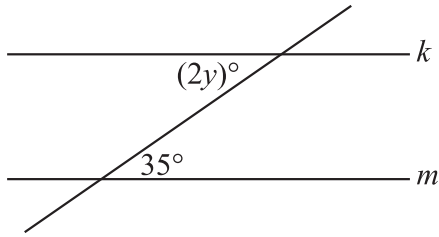
答：D

2. P 、 Q 、 R 是平面上三点，且 R 不在直线 PQ 上。那么关于该平面上距离这三个点距离相同的点的集合，哪个说法是正确的？
- A. 它不包含任何一个点。
B. 它包含一个点。
C. 它包含两个点。
D. 它是一条直线。
E. 它是一个圆。

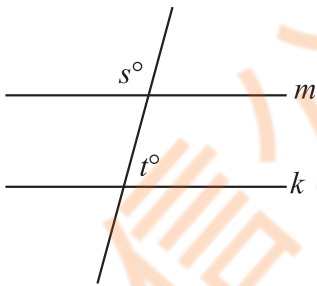
解：到 P 、 Q 两点距离相同的点一定在 PQ 的垂直平分线上，到 P 和 R 两点距离相同的点也一定在 PR 的垂直平分线上。由于 R 不在直线 PQ 上，那么 PQ 的垂直平分线和 PR 的垂直平分线不平行且交于一点，在该平面内仅有该点与这三个点的距离相等。

答：B

3. In the figure below, line k is parallel to line m . What is the value of y ?



4. In the figure below, if $m \parallel k$ and $s = t + 30$, then $t =$
- A. 30
B. 60
C. 75
D. 80
E. 105



3. 下图中，直线 k 与直线 m 平行，那么 y 的值是多少？

解：因为直线 k 与直线 m 平行，所以 35° 角和 $(2y)^\circ$ 是内错角，即 $2y=35$ ，所以 $y=17.5$ 。

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

4. 在下图中， $m \parallel k$ ，且 $s = t + 30$ ，那么 t 的值是多少？

解：因为 $m \parallel k$ ，所以 s 的对顶角和 t 的和为 180° ，所以 $s+t=180$ ，我们可以将已知条件整理成方程组：

$$\begin{cases} s = t + 30 \\ s + t = 180 \end{cases}$$

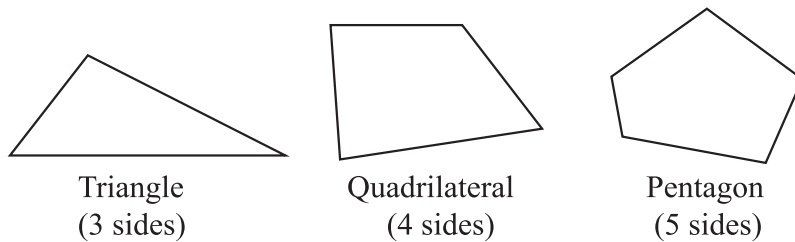
解得： $t=75$ 。

答：C

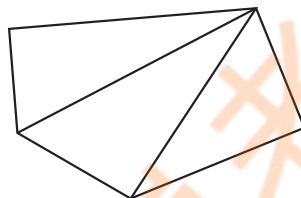
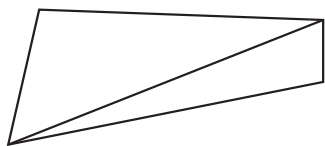
[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

3.2 多边形 (polygon)

由三条线段或者更多条线段组成的封闭图形叫作多边形，这些线段叫作边 (side)。每条边在两个端点处分别与另外两条边相连接，这些端点叫作顶点 (vertices)。在本节的讨论中，“多边形”指的都是“凸多边形”，即多边形的每个内角都是小于 180° 的。下图则是几个这种多边形的例子。



最简单的多边形是三角形 (triangle)。请注意：一个四边形 (quadrilateral) 可以被分成两个三角形，一个五边形 (Pentagon) 可以被分成 3 个三角形，如下图所示。



如果一个多边形有 n 条边，那么它就可以被分为 $(n-2)$ 个三角形。因为三角形的内角和为 180° ，那么 n 边形的内角和就为 $(n-2) \cdot 180^\circ$ 。比如，四边形 ($n=4$) 的内角和为 $(4-2) \times 180^\circ = 360^\circ$ ，六边形 (hexagon) 的内角和为 $(6-2) \times 180^\circ = 720^\circ$ 。

如果一个多边形所有的边全等且所有内角全等，那么该多边形称为正多边形 (regular polygon)。比如：在正八边形内，内角和为 $(8-2) \times 180^\circ = 1080^\circ$ 。因此每个角都为 $\frac{1080}{8} = 135^\circ$ 。

一个多边形的周长等于它每条边的长度之和。一个多边形的面积指的是多边形围起来的区域的面积。

综合训练

1. Quantity A: The length of a side of a regular pentagon with a perimeter of 12.5

Quantity B: The length of a side of a regular hexagon with a perimeter of 15

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.

1. A: 周长为 12.5 的正五边形的边长；
B: 周长为 15 的正六边形的边长。

解：周长为 12.5 的正五边形的边长为 $12.5 \div 5 = 2.5$ ，周长为 15 的正六边形的边长为 $15 \div 6 = 2.5$ ，所以 $A = B$ 。

答：C

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

2. A regular polygon with n sides has interior angles that measure p degrees each. The value of p when $n = 8$ is how much greater than the value of p when $n = 6$?

- A. 10
B. 15
C. 20
D. 25
E. 30

2. 一个有 n 条边的正多边形的每一个内角的度数为 p 度, 当 $n=8$ 的时候比 $n=6$ 的时候, p 的值要多多少?

解: 正八边形的内角和 $= (8-2) \cdot 180 = 1080^\circ$, 所以每个内角 $= 135^\circ$; 正六边形的内角和 $= (6-2) \cdot 180^\circ = 720^\circ$, 所以每个内角 $= 120^\circ$, 所以答案 $= 135 - 120 = 15$ 。

答: B

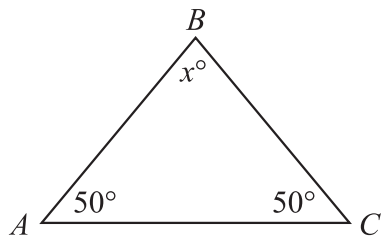
3.3 三角形 (Triangle)

每个三角形都有三条边和三个内角。前面也已经提到, 三角形的内角和为 180° 。三角形任意两边之和是大于第三边的。比如, 一个三角形不可能由长度分别为 4, 7, 12 的三条边围成, 因为 $4+7 < 12$ 。

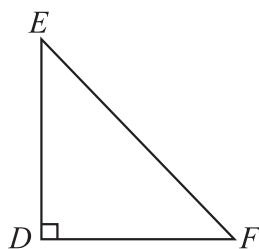
接下来我们介绍几个特殊的三角形:

- 三条边相等的三角形叫作等边三角形 (equilateral triangle)。这样的三角形每个内角都是大小相等, 都是 60° 。

- 至少有两条边相等的三角形叫作等腰三角形 (isosceles triangle)。如果一个三角形内有两条边相等, 那么这两条边对应的角也相等。反之亦然。比如: 在下图中, $\triangle ABC$ 中的 $\angle A$ 和 $\angle C$ 都是 50° , 那么就能得出 $AB=BC$ 。因为三角形内角和为 180° , 即 $50+50+x=180^\circ$, 那么就能得出 $\angle B=x=80^\circ$ 。

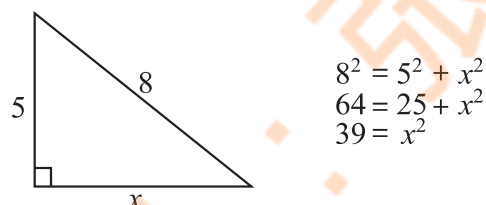


- 如果一个三角形有一个内角为 90° , 那么这个三角形叫作直角三角形 (right triangle)。直角所对的那条边叫作斜边 (hypotenuse)。剩下两条边叫作直角边 (leg)。



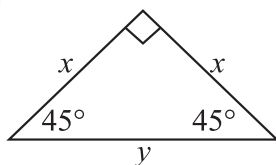
在上面的直角三角形 DEF 中，EF 是斜边，DE 和 DF 是直角边。毕达哥拉斯定理也称勾股定理 (Pythagorean theorem) 告诉我们：在直角三角形内，斜边的平方等于两条直角边的平方和。因此在直角三角形 DEF 内， $(EF)^2 = (DE)^2 + (DF)^2$ 。

当我们已知直角三角形内其中两条边的长度时，我们可以利用这个关系式计算剩下那条边的长度。比如，如果直角三角形的一条边长度为 5，斜边长度为 8，那么剩下那一条边的长度可以这么计算：

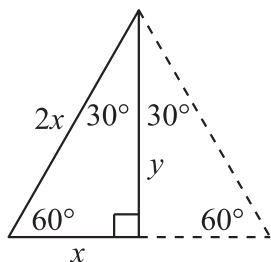


因为 $x^2 = 39$ 且 x 一定是正数，可以得到 $x = \sqrt{39}$ ，即大概为 6.2。

勾股定理还可以用来计算两种特殊的直角三角形的边长之比。一种特殊的直角三角形是等腰直角三角形。在这种三角形内使用勾股定理，可以得到三条边长度之比为 $1 : 1 : \sqrt{2}$ ，如下图所示：



另一种特殊的直角三角形是 $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 的直角三角形，它是一个等边三角形的一半，如下图所示：



注意：最短的边 x 是最长边 $2x$ 的一半，根据勾股定理， $x : y = 1 : \sqrt{3}$ ，因此，这样的三角形三边长度之比为 $1 : \sqrt{3} : 2$ 。因为：

$$x^2 + y^2 = (2x)^2$$

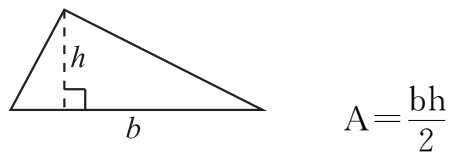
$$x^2 + y^2 = 4x^2$$

$$y^2 = 4x^2 - x^2$$

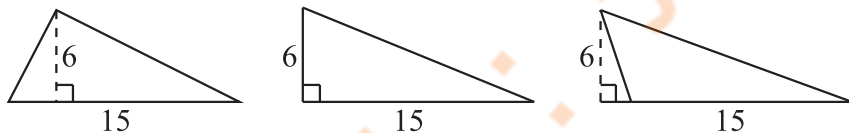
$$y^2 = 3x^2$$

$$y = \sqrt{3}x$$

三角形的面积 A 等于底乘高的一半。在下图中，面积记作 A ，底边记作 b ，底边对应的高记作 h 。



三角形任意一条边都可以用作底，底边上的高是一条从该底边所对的顶点到底边(或者底边延长线)的垂线段。下图给出了三种不同三角形底边和底边上的高：



在上面三种三角形中，面积是 $\frac{15 \times 6}{2} = 45$ 。

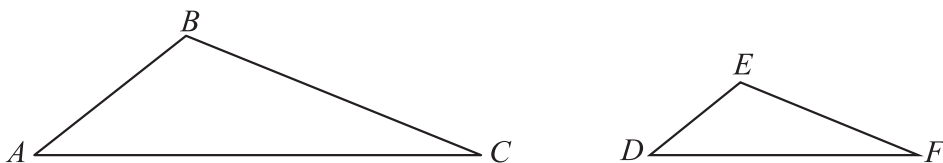
如果两个三角形形状和面积大小相等，那么这两个三角形称为全等三角形 (congruent triangle)。更准确地说，如果两个三角形内每个顶点所对应的角和所对的边对应相等，那么这两个三角形全等。

下面我们给出三个性质，这三个性质可以通过只比较三角形内几个角或者边来判断两个三角形是否全等：

- 如果一个三角形的三条边与另一个三角形的三条边对应相等，那么这两个三角形全等。
- 如果一个三角形的两条边和它们所夹的角与另一个三角形的两条边和它们所夹的角都相等，那么这两个三角形全等。
- 如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角对应相等，且两个角夹的边也对应相等，那么这两个三角形全等。

如果两个三角形形状相同但是大小不同，那么这两个三角形称为相似三角形 (similar triangle)。更准确地说如果两个三角形每个顶点所对应的角相等或者说每个顶点所对应的边的比例相等，那么这两个三角形相似。这个比例称为相似比。比如，所有的 $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ 的直角三角形都是相似三角形。

当我们说三角形 ABC 和三角形 DEF 是相似的，那么角 A 和角 D 相等，角 B 和角 E 相等，角 C 和角 F 相等，如下图所示。换句话说，字母的顺序代表的相似的对顺序。



因为三角形 ABC 和三角形 DEF 是相似的, 那么 $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$, 通过交叉相乘, 我们还可以得到其他比例, 比如 $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ 。

推论:

- 三角形中若最小的两条边的平方和小于第三条边的平方, 则此三角形必为钝角三角形; 三角形中若最小的两条边平方和大于第三条边的平方, 则此三角形必为锐角三角形。

- 在知道三角形的三边之长的情况下, 可以用海伦公式求解三角形的面积。

设三角形的三边边长分别为 a, b, c , $p = \frac{a+b+c}{2}$, 则三角形的面积是

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

- 在三角形的周长恒定的前提下, 此三角形为等边三角形时面积最大。
- 若有两个三角形相似, 则这两个三角形的面积比等于相似比的平方。
- 三角形的一个外角等于其不相邻的两个内角之和。

综合训练

1. In the xy -plane S , the point S, P and Q have coordinates $(14, 10)$, $(1, 0)$ and $(6, 0)$, respectively.

What is the area of triangular region PQS ?

- A. 25
- B. 30
- C. 35
- D. 42
- E. 50

1. 在 xy 平面内, 点 S, P 和 Q 的坐标分别为 $(14, 10)$, $(1, 0)$ 和 $(6, 0)$ 。那么三角形 PQS 的面积是多少?

解: 将边 PQ 看作底边, 那么三角形 PQS 的高就是点 S 到直线 PQ 的距离, 即点 S 到 x 轴的距离 $= 10$ 。所以三角形 PQS 的面积 $= \frac{1}{2} \times (6-1) \times 10 = 25$ 。

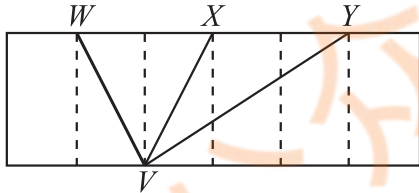
答: A

2. The dotted line segments separate the rectangular region into six identical smaller rectangular regions.

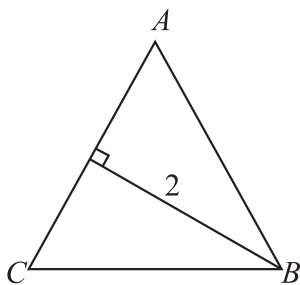
Quantity A: The area of triangular region WXV

Quantity B: The area of triangular region XYV

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.



3. ABC is an equilateral triangle.
- Quantity A: The length of AB
- Quantity B: $2\sqrt{3}$
- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.



2. 图中的虚线把矩形区域分成了六个相同的较小的矩形区域，A：区域 WXV 的面积，B：区域 XYV 的面积。

解：因为虚线把较大的矩形的长分成了六个相等 (identical) 的线段。所以 $WX = XY$ ，又因为 $\triangle WXY$ 和 $\triangle XYV$ 的高都是较大矩形的宽，所以两三角形的面积相等，即 $A=B$ 。

答：C

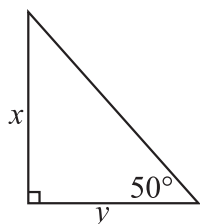
3. ABC 是一个等边三角形。A： AB 的长度，B： $2\sqrt{3}$ 。

解：我们知道在 $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 这种特殊的三角形中，三边长度之比是 $1 : \sqrt{3} : 2$ ，所以 $AB = \frac{2}{\sqrt{3}} \times 2 = \frac{4}{3}\sqrt{3} < 2\sqrt{3}$ ，即 $A < B$ 。

答：B

4. $A = \frac{x}{y}$, $B = 1$ 。

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.



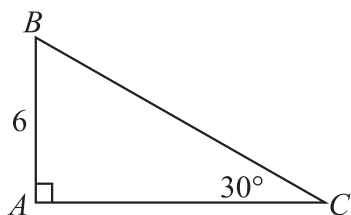
5. If the lengths of two sides of a triangle are 5 and 9, respectively, which of the following could be the length of the third side of the triangle?

Indicate all such lengths.

- A. 3
- B. 5
- C. 8
- D. 15

6. What is the area of triangle ABC shown below?

- A. 20
- B. 20
- C. $12\sqrt{3}$
- D. $18\sqrt{3}$
- E. 36



4. $A = \frac{x}{y}$, $B = 1$ 。

解：图中三角形为直角三角形，长度为 x 的边所对的角大小为 50° ，长度为 y 的边所对的角大小为 $180^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$ ，所以 $x > y$ ，即 $\frac{x}{y} > 1$ 。

答：A

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

5. 如果一三角形其中两边长分别为 5 和 9，那么第三边长可能为多少？请选择所有正确的答案。

解：根据三角形的性质可知：三角形两边之和大于第三边，两边之差小于第三边。所以该三角形第三条边的范围是 $9 - 5 < x < 5 + 9$ ，即 $4 < x < 14$ 。所以 B、C 选项均正确。

答：BC

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

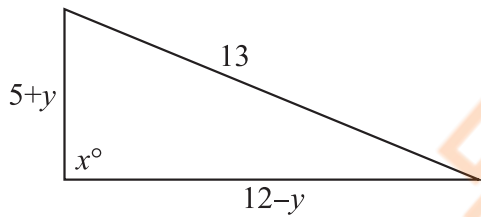
6. 下图中三角形 ABC 的面积是多少？

解：下图三角形是特殊的直角三角形： $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 三角形，三边长度之比为 $1 : \sqrt{3} : 2$ 。所以 AC 边的长度为 $6\sqrt{3}$ ，所以三角形的面积为 $\frac{1}{2} \times 6 \times 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$ 。

答：D

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

7. Quantity A: x
Quantity B: 90
- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.



8. Quantity A: The area of a triangular region with perimeter 8
Quantity B: 8
- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.

解：我们代入几个 y 值进行计算。当 $y=0$ 时，三角形三边边长分别为 5, 12, 13。根据勾股定理， $5^2 + 12^2 = 13^2$ ，所以 $y=0$ 时，三角形为直角三角形，斜边 13 所对的角为直角，即 $x=90$ ， $A=B$ ；当 $y=1$ 时，三角形三边长分别为 6, 11, 13。此时 $6^2 + 11^2 \neq 13^2$ ，即三角形不是直角三角形，所以 $x \neq 90$ ， $A \neq B$ 。

答：D

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

8. A: 周长为 8 的三角形的面积，B: 8。

解：根据推论“当三角形周长一定时，等边三角形的面积最大”来解。即 $A \leq$ 边长为 $\frac{8}{3}$ 的等边三角形面积。边长为 $\frac{8}{3}$ 的等边三角形高为 $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ ，那么三角形面积 $= \frac{1}{2} \times \frac{8}{3} \times \frac{4}{3}\sqrt{3} = \frac{16}{9}\sqrt{3} < 8$ ，即 $A < B$ 。

答：B

9. Two sides of a triangle have length 6 and 8. Which of the following are possible areas of the triangle?

- I. 2
- II. 12
- III. 24
- A. I only
- B. I and II only
- C. II and III only
- D. I and III only
- E. I, II, and III

9. 三角形其中两条边的长度分别为 6 和 8, 那么下列选项中那些可能是该三角形的面积?

解: 以 8 为长度画一条线段, 以线段的某一点为圆心画一个半径为 6 的圆, 圆周上任意一点(除了该线段所在直线与圆相交的两个点)与圆心组成的半径与点段都可以恒为一个三角形, 所以三角形的面积最大为半径与线段垂直, 即面积 $= \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$; 面积最小为半径无限接近与线段重合的直线, 即面积无限趋近 0。所以 I、II 和 III 都可能为三角形的面积。

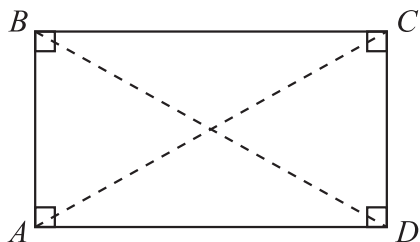
答: E

3.4 四边形 (Quadrilateral)

每个四边形都有四条边和四个内角, 四个内角之和为 360° 。

下面我们介绍几个特殊的四边形:

如果一个四边形的四个角都是直角, 那么这个四边形叫作矩形 (rectangle)。矩形的两组对边平行且相等, 两条对角线相等。



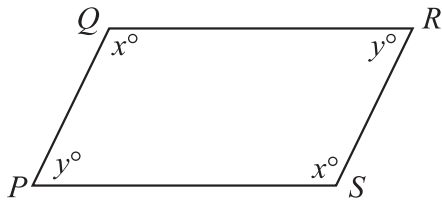
$$AB \parallel CD \text{ 且 } AD \parallel BC$$

$$AB = CD \text{ 且 } AD = BC$$

$$AC = BD$$

四条边全等的矩形叫作正方形。

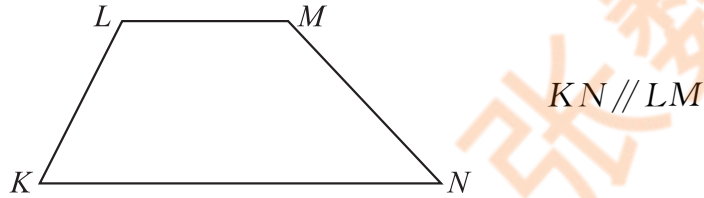
如果一个四边形的两组对边平行, 那么这个四边形叫作平行四边形 (parallelogram)。在平行四边形内, 对边相等, 对角相等。



$$PQ \parallel SR \text{ and } PS \parallel QR$$

$$PQ = SR \text{ and } PS = QR$$

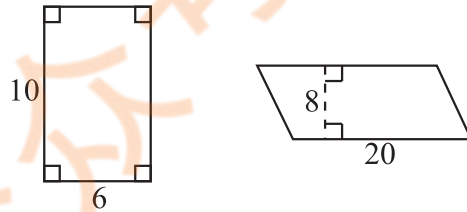
如果一个四边形只有一组对边平行，那么这个四边形叫作梯形 (trapezoid)。



对于所有的平行四边形包括矩形和正方形，面积 A 等于底乘高。即：

$$A = bh$$

平行四边形的任意一边都可以作底。底对应的高是从底边上任意一点到对边 (或者对边延长线) 的垂线段。下面是一个矩形和一个平行四边形的面积计算：



$$A = (6)(10) = 60 \quad A = (20)(8) = 160$$

梯形的面积 A 等于上下底之和乘高的一半，即：

$$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$$

比如，一个梯形的两个底边长度分别是 10 和 18，高为 7.5，那么面积就是：

$$A = \frac{1}{2}(10 + 18) \times 7.5 = 105$$

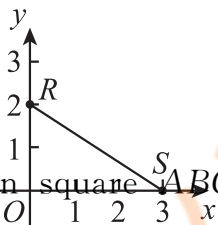
综合训练

1. In the xy -plane, line segment RS is one of the sides of square $RSTU$ (not shown).

Quantity A: The area of square $RSTU$

Quantity B: 13

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

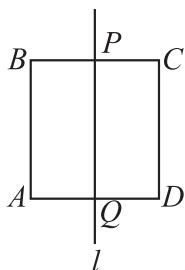


2. In square $ABCD$, point P is the midpoint of side BC and point Q is the midpoint of side AD . Point E (not shown) is located on line l and triangle BCE is equilateral.

Quantity A: The length of PQ

Quantity B: The length of PE

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.



1. 在 xy 平面内, 线段 RS 是正方形 $RSTU$ 的一条边。A: 正方形 $RSTU$ 的面积, B: 13。

解: RS 为直角三角形 ROS 的斜边, 所以 $RS = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, 所以正方形 $RSTU$ 的面积为 $RS^2 = (\sqrt{13})^2 = 13$, 即 $A=B$ 。

答: C

2. 在正方形 $ABCD$ 中, 点 P 是边 BC 的中点, 点 Q 是边 AD 的中点。点 E 在直线 l 上且三角形 BCE 是等边三角形。A: PQ 的长度, B: PE 的长度。

解: 根据题意我们可以得知 PE 是等边三角形 BCE 的高, $PQ = BC$ (等边三角形的边长), 等边三角形的边长大于等边三角形的高, 所以 $PQ > PE$ 。

答: A

3. In the xy -plane, one of the vertices of square S is the point $(2, 2)$. The diagonals of S intersect at the point $(6, 6)$.

Quantity A: the area of S

Quantity B: 64

A. Quantity A is greater.

B. Quantity B is greater.

C. The two quantities are equal.

D. The relationship cannot be determined from the information given.

4. What is the perimeter, in meters, of a rectangular playground 24 meters wide that has the same area as a rectangular playground 64 meters long and 48 meters wide?

A. 112

B. 152

C. 224

D. 256

E. 304

5. In the xy -plane, a quadrilateral has vertices at $(-1, 4)$, $(7, 4)$, $(7, -5)$, and $(-1, -5)$. What is the perimeter of the quadrilateral?

A. 17

B. 18

C. 19

D. 32

E. 34

3. 在 xy 平面内, 正方形其中一个顶点为 $(2, 2)$, 正方形 S 的两条对角线相交于点 $(6, 6)$ 。A: S 的面积, B: 64。

解: 点 $(2, 2)$ 和点 $(6, 6)$ 确定了半条对角线, 由此我们可以确定出正方形的边长为 $(6-2) \times 2 = 8$, 所以正方形 S 的面积为 $8^2 = 64$, 即 $A=B$ 。

答: C

4. 一个宽 24m 的矩形操场面积和一个 64 米长、48 米宽的矩形操场面积相等, 那么 24m 宽的矩形操场的周长是多少?

解: 设所求矩形操场的长为 x , 所以面积为 $24x = 64 \times 48$, 解得 $x = 128\text{m}$ 。所以矩形操场的周长是 $2 \times (128 + 24) = 304\text{m}$ 。

答: E

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

5. 在 xy 平面内, 一个四边形的顶点分别是 $(-1, 4)$, $(7, 4)$, $(7, -5)$ 和 $(-1, -5)$ 。求四边形的周长。

解: 我们在平面直角坐标系中画出这四个点后发现这是一长为 9、宽为 8 的矩形, 所以周长为 $2 \times (8+9) = 34$ 。

答: E

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

6. The length of each side of rectangle R is an integer, and the area of R is 36.

Quantity A: The number of possible values of the perimeter of R

Quantity B: 6

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.
7. A flat, rectangular flower bed with an area of 2,400 square feet is bordered by a fence on three sides and by a walkway on the fourth side. If the entire length of the fence is 140 feet, which of the following could be the length, in feet, of one of the sides of the flower bed?

Indicate all such lengths

- A. 20
 B. 30
 C. 40
 D. 50
 E. 60
 F. 70
 G. 80
 H. 90

6. 矩形 R 每条边的长度都是整数, 且 R 的面积是 36。A: R 的周长可能值的数量, B: 6。

解: $36=1\times 36=2\times 18=3\times 12=4\times 9=6\times 6$, 所以矩形长和宽只有 5 种不同的组合, 所以该矩形不同的周长的数量一定小于 6, 所以 $A<B$ 。

答: B

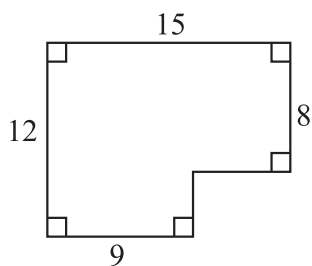
[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

7. 一个平整的矩形花坛, 面积为 2400 平方英尺。该花坛四边中有三边是栅栏, 有一边是人行道。如果栅栏的总长度为 140 英尺, 那么下列选项中哪些可能是花坛一条边的长度? 请选出所有正确答案。

解: 设矩形中只有一边的栅栏长度为 x , 同时有两边的栅栏的每条栅栏长度为 y , 则有 $x+2y=140$, 另外 $xy=2400$, 解出当 $x=80$ 时, $y=30$, 当 $x=60$ 时, $y=40$ 。

答: BCEG

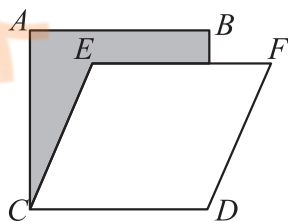
8. What is the area of the region shown below?



9. If $ABCD$ is a square with area 625, and $CEFD$ is a rhombus with area 500, then the area of the shaded region is?

Note: Figure not drawn to scale

- A. 125
B. 175
C. 200
D. 250
E. 275



3.5 圆 (Circle)

已知平面内一点 O 和一正数 r ，在该平面内与点 O 的距离为 r 的点的集合叫作圆(circle)。点 O 叫作圆的圆心(center)，距离 r 叫作圆的半径(radius)。圆的直径(diameter)是圆半径的两倍。两个半径相同的圆叫作全等圆(congruent circle)。

连接圆上任意两点的线段叫作弦(chord)。当然，半径和直径也可以用线段来描述：半径(radius)是连接圆上一点和圆心的线段，直径(diameter)是一条通过

8. 下图区域的面积是多大?

解: 我们在右下角补上一个小矩形从而组成一个大矩形，补上的小矩形长为 $15 - 9 = 6$ ，宽为 $12 - 8 = 4$ ；补成的大矩形长为 15，宽为 12。所以所求区域面积 = 大矩形面积 - 小矩形面积 = $15 \times 12 - 6 \times 4 = 156$ 。

答: 156

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

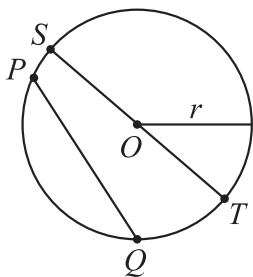
9. 如果 $ABCD$ 是一个面积为 625 的正方形， $CEFD$ 是一个面积为 500 的菱形，那么阴影部分的面积是多大?

注意: 图形不是按照比例给出。

解: 正方形面积是 625，那么 $CD = 25$ ，所以 $CE = 25$ ，菱形面积为 500，所以菱形的高为 20。延长 FE 与 AC 交于一点 G ，那么 CEG 这个三角形的面积可以根据勾股定理算出来等于 150，再推出上面的矩形 $ABHG$ (设 BD 与 EF 交点为 H) 面积等于 125，所以阴影部分的面积是 $150 + 125 = 275$ 。

答: E

圆心的弦。在下图中， O 是圆心， r 是半径， PQ 是一条弦， ST 是直径。



圆旋转一周走过的路程是圆的周长，这与多边形的周长是类似的。所有圆的周长与直径的比值是一样的，我们用希腊字母 π 来表示，即：

$$\frac{C}{d} = \pi$$

π 的值大约是 3.14，也可以用分数 $\frac{22}{7}$ 来近似。

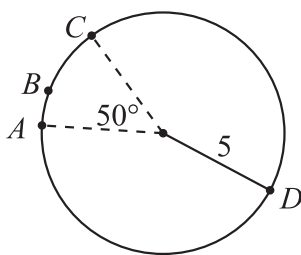
如果一个圆的半径是 r ，那么 $\frac{C}{d} = \frac{C}{2r} = \pi$ ，所以圆的周长和半径的关系为：

$$C = 2\pi r$$

比如，如果一个圆半径为 5.2，那么它的周长为：

$$2 \cdot \pi \cdot 5.2 = 10.4 \cdot \pi \approx 10.4 \times 3.14$$

在圆上任意给出两点，那么弧就是由这两个点及它们中间所有的在圆上的点构成的，它是圆的一部分。圆上任意两点都可以看作两条弧的端点。通常我们用三个点来定义一条弧以避免混淆。在下图中，弧 ABC 是 AC 之间的劣弧 (shorter arc)，弧 ADC 是 AC 之间的优弧 (longer arc)。



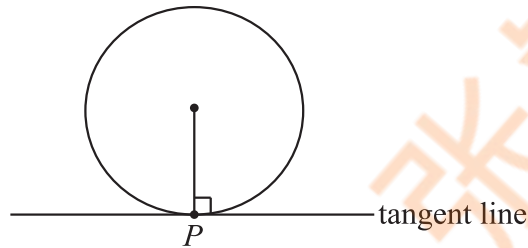
圆心角是顶点在圆心的角。弧的两个端点所对应的半径交于圆心从而形成的角叫作弧对应的圆心角，弧度的大小就是其对应的圆心角的大小。一整个圆我们也可以看作一个大小为 360° 的弧。在上图中，弧 ABC 的大小为 50° ，弧 ADC 的大小为 310° 。

为了计算弧长 (length of an arc)，我们需要注意：弧长与圆的周长之比等于弧对应圆心角的大小与 360° 之比。上图中，圆的周长为 10π ，因此：

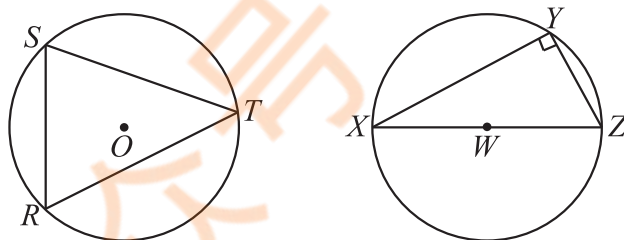
$$\frac{\text{弧 } ABC \text{ 的长度}}{10\pi} = \frac{50}{360}$$

$$\text{弧 } ABC \text{ 的长度} = \frac{50}{360} \cdot 10\pi = \frac{125\pi}{36} \approx \frac{125 \times 3.14}{36} = 10.9$$

如果一条直线与圆仅交于一点，那么这条直线称为圆的切线(tangent)，相交的点叫作切点(point of tangency)，在下图中我们把切点记作点 P 。如果一条直线与圆相切，那么切点对应的半径与切线是垂直的。反之亦然：如果一条直线与圆的半径垂直于圆上一点，那么这条直线与该圆相切于该点。

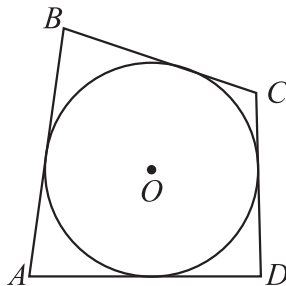


如果一个多边形所有顶点都在圆上，那么称这个多边形内接于该圆，或者说该圆外接于该多边形。下图中，三角形 RST 和三角形 XYZ 分别内接于圆 O 和圆 W 。

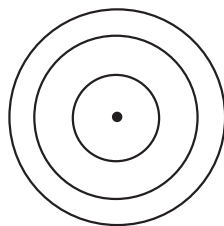


如果内接三角形的一边是圆的直径，如上图中的三角形 XYZ ，那么这个三角形就是直角三角形。反之亦然：如果一个内切三角形是直角三角形，那么该三角形其中一边是圆的直径。

如果一个多边形的每条边都与圆相切，那么称这个多边形外接于该圆或者说该圆内接于该多边形。下图中，四边形 $ABCD$ 外接于圆 O 。



两个或者更多圆心相同的圆叫作同心圆，如下图所示。



推论：

- 圆中同一段弧所对应的圆心角是圆周角的两倍。
- 垂直于弦的直径平分这条弦，也平分这条弦所对的圆心角和圆周角。

综合训练

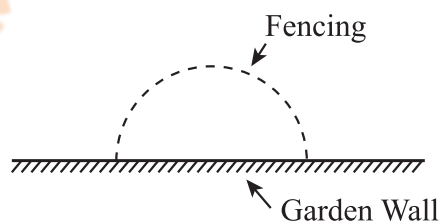
1. The area of a circle with radius a is less than the area of a square with sides of length ka . Which of the following could be the value of k ?

Indicate all such values.

- A. $4/3$
 B. $5/3$
 C. 2
 D. $7/3$

2. The figure below represents a semi-circular garden that is enclosed by 20 feet fencing and a straight garden wall. What is the area, in square feet, of the garden?

- A. $\frac{20}{\pi}$ B. $\frac{50}{\pi}$
 C. $\frac{100}{\pi}$ D. $\frac{200}{\pi}$
 E. $\frac{400}{\pi}$



1. 有一圆的半径为 a ，正方形的边长为 ka 。现在已知圆的面积小于正方形的面积。下列哪个选项可能是 k 的取值。选出所有正确的值。

解：圆的面积为 πa^2 ，正方形的面积为 $(ka)^2$ 。圆的面积小于正方形的面积，即 $\pi a^2 < (ka)^2$ ，解得 $k > \sqrt{\pi} \approx \frac{5.3}{3}$ ，显然 k 可取 2 和 $7/3$ 。

答：CD

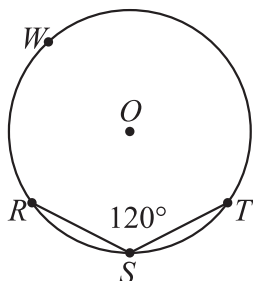
2. 下图中，一个半圆形的花园被 20 英尺长的围墙和一个直的花园墙包围。那么花园的面积是多大(以平方英尺为单位)?

解：设半圆形花园的半径为 r ，那么围墙的长度也就是半圆的长度为 $\pi r = 20$ ，解得 $r = \frac{20}{\pi}$ ，那么这个半圆形花园的面积为 $\frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{20}{\pi}\right)^2 = \frac{200}{\pi}$ 。

答：D

3. The center of the circle is O , and $RS=ST=4$. What is the length of arc RWT ?

A. $\frac{4\pi}{3}$ B. $\frac{8\pi}{3}$ C. $\frac{16\pi}{3}$
D. 4π E. 8π



4. $x > 0$

Quantity A: The area of a circle whose circumference is $8\pi x$

Quantity B: The area of a circle with radius $4x$

- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.

5. The area of a circular region is 5π
Quantity A: The diameter of the circular region

Quantity B: $\sqrt{20}$

- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.

3. O 为该圆圆心, 且 $RS=ST=4$, 那么 RWT 的长度是多少?

解: 做辅助线连接 SO, RO, TO , 根据圆的对称性得到 $\angle RSO = \angle TSO = 60^\circ$, 则 $\triangle ORS$ 和 $\triangle OST$ 都是等边三角形, 则圆心角 $\angle ROT$ 是 120° , 圆的半径为 4, 则所求弧长为:

$$2 \times \pi \times 4 \times \frac{240^\circ}{360^\circ} = \frac{16}{3}\pi。$$

答: C

4. 已知 $x > 0$, A: 边长为 $8\pi x$ 的圆的面积, B: 半径为 $4x$ 的圆的面积。

解: $8\pi x = 2\pi r$, 所以 A 中圆的半径 r 为 $4x$, 即 A 和 B 中的圆半径相等, 那么面积也相等, 所以 $A=B$ 。

答: C

5. 一个圆的面积为 5π , A: 该圆的直径, B: $\sqrt{20}$ 。

解: $\pi r^2 = 5\pi$, 得: $r = \sqrt{5}$ 。那么该圆的直径为 $2\sqrt{5} = \sqrt{20}$, 即 $A=B$ 。

答: C

6. If a square region with side x and a circular region with radius r have the same area, then x must be how many times as great as r ?

- A. $\frac{1}{\pi}$
- B. $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$
- C. $\sqrt{\pi}$
- D. π
- E. π^2

6. 如果一个正方形边长为 x ，一个圆的半径为 r ，且圆与正方形的面积相同。那么 x 是 r 的多少倍？

解：正方形的面积为 x^2 ，圆的面积为 πr^2 ，所以 $x^2 = \pi r^2$ ，得 $\frac{x}{r} = \sqrt{\pi}$ 。

答：C

7. The center of the circle is O .

Quantity A: Length of AO

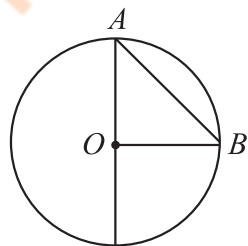
Quantity B: Length of AB

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.

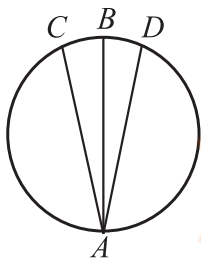
7. A: AO 的长度，B: AB 的长度。

解： AO 为圆的半径，而图中 B 的位置不确定，所以 AB 和 AO 的长度大小关系不确定。

答：D



8. AB is a diameter of the circle below
- Quantity A: The length of AB
- Quantity B: The average (arithmetic mean) of the lengths of AC and AD
- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.



9. The relationship between the area A of a circle and its circumference C is given by the formula $A = k C^2$, where k is a constant. What is the value of k ?
- A. $\frac{1}{4\pi}$
 B. $\frac{1}{2\pi}$
 C. $\frac{1}{4}$
 D. 2π
 E. $4\pi^2$

8. AB 是图中圆的直径，A: AB 的长度；B: AC 和 AD 长度的算术平均值。

解: AC 和 AD 都是圆内的弦，且不是圆的直径，所以 AC 和 AD 的长度均小于直径，所以 AC 和 AD 长度的算术平均值小于直径，即 $A > B$ 。

答: A

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

9. 一个圆的周长为 C ，面积为 A ，且两者满足关系式: $A = k C^2$ ， k 是一常数。那么 k 的值是多少?

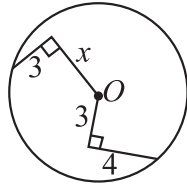
解: 设该圆的半径为 r ，那么 $C = 2\pi r$ ，

$$A = \pi r^2, \text{ 所以 } k = \frac{A}{C^2} = \frac{\pi r^2}{(2\pi r)^2} = \frac{1}{4\pi}.$$

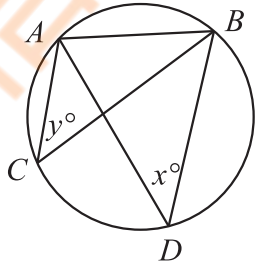
答: A

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

10. O is the center of the circle below.
 $A = x$, $B = 5$.
 A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.



11. Quantity A : x
 Quantity B : y
 A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.



$AB = 12$, $AC = 10$, $AD = 18$

Note: the region above is circular

10. O 是下图中圆的圆心, $A = x$, $B = 5$.
 解: 圆 O 的半径为 $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. 从图中可以看出 x 明显是小于半径的, 所以 $A < B$.

答: B

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

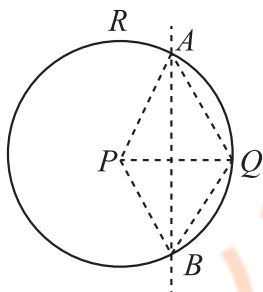
11. $A = x$, $B = y$.

解: 圆周角 x 和 y 所对的弧均为劣弧 AB , 因为同圆或者等圆中, 同弧或等弧所对的圆周角是相等的, 所以 $x = y$.

答: C

12. In a plane, points P and Q are 20 inches apart. If point R is randomly chosen from all the points in the plane that are 20 inches from P , what is the probability that R is closer to P than it is to Q ?

- A. 0
- B. $1/4$
- C. $1/3$
- D. $1/2$
- E. $2/3$



12. 在一个平面内, 点 P 和点 Q 相距 20 英寸。如果从平面内任选一点 R 使得 R 距离点 P 20 英寸, 那么 R 距离 P 比距离 Q 更近的概率有多大?

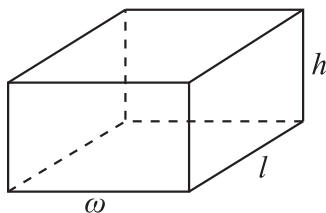
解: 以 P 为圆心, 20 为半径画圆, Q 和 R 都在圆上。如果把 Q 点固定, R 点可以取圆上任意一点。我们做 PQ 的垂直平分线, 和圆分别交于 A 和 B (如图所示), 根据垂直平分线的定义得知 AB 左边圆上的点离 P 更近, AB 右边圆上的点离 Q 更近, 所以这个题就是去找 AB 左边的弧占整个圆的比例。 $PQ = PA = PB =$ 圆的半径, 又因为 AB 是 PQ 的垂直平分线, 所以 $PA = AQ = PQ = PB = BQ$, 所以 $\triangle PAQ$ 和 $\triangle PBQ$ 都是等边三角形, 所以 $\angle APB = 120^\circ$, 所以 AB 左边的弧占整个圆的 $2/3$, AB 右边的弧占整个圆的 $1/3$ 。

答: E

3.6 三维图形 (Three-Dimensional Figures)

基本的三维图形包括长方体、立方体、圆柱体、球体和椎体。在这一节, 我们将介绍长方体和正圆柱体的一些性质。

一个长方体 (rectangular solid) 有 6 个矩形表面叫作面 (face), 如下图所示。相邻的两个面互相垂直且相交于一条线段, 这条线段叫作棱 (edge)。棱相交的点叫作顶点 (vertex)。一个长方体有 6 个面, 8 个顶点。一个长方体的测度有长 l , 宽 w 和高 h 。



如果一个长方体的六个面全是正方形，即 $w=l=h$ ，那么该长方体叫作正方体。长方体的体积是它的三个测度之积，即：

$$V=lwh$$

长方体的表面积是六个面的面积之和，即

$$A=2(\omega l+\omega h+lh)$$

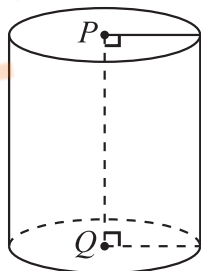
比如，一个长方体长为 8.5，宽为 5，高为 10，那么它的体积是：

$$V=8.5 \times 5 \times 10=425$$

它的表面积为：

$$2(8.5 \times 5+8.5 \times 10+5 \times 8.5)=355$$

一个圆柱体由两个底面(两个完全相等的圆)和一个侧面(lateral surface)组成，圆柱体的侧面是由所有连接两底面且平行于连接两底面圆心的线段的线段组成。连接两底面圆心的线段叫作圆柱体的轴(axis)。一个正圆柱体的轴垂直于底面。



一个正圆柱体底面半径为 r ，高为 h ，那么它的面积 V 等于底面积乘高，即

$$V=\pi r^2 h$$

正圆柱体的表面积等于两底面面积之和加上侧面面积，即：

$$A=2\pi r^2+2\pi rh$$

比如，一个正圆柱体的高为 6.5，底面半径为 3，那么它的体积为：

$$V=\pi \cdot 3^2 \cdot 6.5=58.5\pi$$

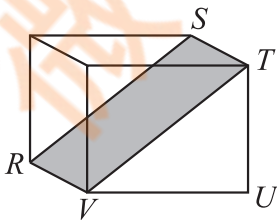
它的表面积为：

$$A=2\pi \cdot 3^2+2\pi \cdot 3 \cdot 6.5=57\pi$$

综合训练

1. A rectangular solid P has height $2c$ and a base of width a and length b . Two other rectangular solids, Q and R , each have height c and bases of width a and length b . Which of the following represents the amount by which the sum of the surface areas of Q and R exceeds the surface areas of P ?
- A. $2ab$
 B. $4ab$
 C. $2ab + 2bc$
 D. $2ab + 4ac$
 E. $2ab + 4ac + 4bc$

2. In the rectangular solid below, $TU = 3$, $UV = 4$, and $VR = 2$. What is the area of the shaded rectangular region?



1. 有一个长方体 P 高度为 $2c$ ，底面宽是 a ，长是 b 。有两个其他的长方体 Q 和 R ，高度都是 c ，底面宽是 a ，长是 b 。下面哪个数字代表 Q 和 R 的表面积之和超过 P 的表面积的数量。

解：这个题这么想是最简单的，大的长方体 P 其实就是两个小的长方体 Q 和 R 叠起来合成的，所以多出来的表面积就是两个小长方体的底面的面积，所以答案是 $2ab$ 。

答：A

2. 在下面的长方体中， $TU = 3$ ， $UV = 4$ ， $VR = 2$ 。那么阴影部分的面积是多少？

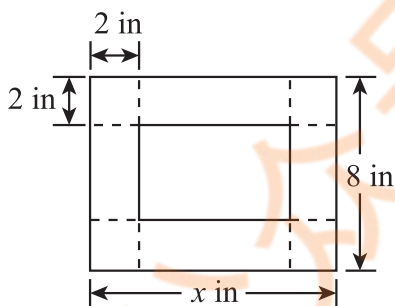
解：在长方体中， $TV = \sqrt{(UV)^2 + (TU)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 。易知四边形 $STUV$ 是矩形，所以面积为 $ST \cdot TV = 5 \times 2 = 10$ 。

答：10

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

3. The thin rectangular sheet of metal shown in the figure is 8 inches wide and x inches long. An open box is to be made by cutting a 2 inch square from each corner of the sheet of metal and then folding up the sides. If the volume of the box is to be 48 cubic inches, what is the value of x ?

- A. 6 B. 8 C. 10
D. 12 E. 14



4. The volume V of a right circular cylinder is $V = \pi \cdot r^2 h$, where r is the radius of the base and h is the height of the cylinder. If the volume of a right circular cylinder is 45π and its height is 5, what is the circumference of its base?

- A. 3
B. 9
C. 3π
D. 6π
E. 9π

3. 下图中矩形宽 8 英寸长 x 英寸，将用该矩形制作一个无顶的盒子：从每个角减去一个边长 2 英寸的正方形并把四条边折起来。如果制成的盒子体积为 48 立方英寸，那么 x 的值为多少？

解：盒子的长宽高分别为 $x-4$ ，4，2，那么该盒子的体积为 $4 \cdot 2 \cdot (x-4) = 48$ ，解得 $x=10$ 。

答：C

4. 一个正圆柱体的体积是 $V = \pi \cdot r^2 h$ ，其中 r 是底面半径， h 是圆柱体的高。如果圆柱体的体积为 45π ，高度为 5，那么它的底面周长是多少？

解： $45\pi = \pi \cdot 5 \cdot r^2$ ，解得： $r=3$ ，即该圆柱体底面半径为 3，那么底面周长为 $2\pi r = 2\pi \times 3 = 6\pi$ 。

答：D

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

5. The interior dimensions of a rectangular tank are as follows: length 110 centimeters, width 90 centimeters, and height 270 centimeters. The tank rests on level ground. Based on the assumption that the volume of water increases by 10 percent when it freezes, which of the following is closest to the maximum height, in centimeters, to which the tank can be filled with water so that when the water freezes, the ice would not rise above the top of the tank?
- A. 230
B. 235
C. 240
D. 245
E. 250

5. 长方体储水池长 110 厘米，宽 90 厘米，高 270 厘米。现将储水池放在地平面上，假设水结冰时体积会增加 10%，那么为了保证水结冰时不溢出这个储水池，这个储水池储水最高的高度是多少？

解：该储水池的体积是 $110 \times 90 \times 270 = 2,673,000$ 。所以储水池里的水结成冰后最大的体积是 2,673,000 立方厘米，所以储水池中水的最大体积是 $\frac{2,673,000}{1.1} = 2,430,000$ ，那么最高的高度就是 $\frac{2,430,000}{110 \times 90} = 245$ 厘米。

答：D

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

第四节 资料分析

我们进行数据分析的目的是更好地理解数据从而能够描述过去和现在的趋势，并预测未来的事件并做出好的决定。在这一章对于数据分析的复习中，我们首先讨论一些描述数据的工具，并对计数和概率方面的方法进行说明，然后复习一些数据分布、随机变量和概率分布的概念，最后我们将用一些例子来帮助大家理解数据。

4.1 描述数据的图形方法 (Graphical Methods for Describing Data)

数据可以用多种方法总结、整合。表格是最常用的，当然还有许多图表和数值方法。选择何种方式整合数据与数据本身的性质有关，比如说数据是否能够用数值来表示。在这一节，我们回顾一些常见的整合数据的图表方法。

变量在代数中扮演着重要的角色，在数据分析中变量同样扮演着重要的角色。在数据分析中，一个变量(variable)可以代表我们分析的人群或者物种中任意一个不同的性质。比如，人群的年龄和性别都可以看作变量。

我们通过观察人群的一个变量或者同时观察人群的多个变量来收集数据。变量的分布，或者叫作数据分布(distribution of data)能够表明变量的值和在观察到的数据中这个值出现的频率。

1. 频率分布 (Frequency Distribution)

某一种类或者某一数值的频率或者数量是该种类或者数字在数据中出现的次数。频率分布(frequency distribution)是一张表，在这张表中会给出所有的种类(或者数值)以及它们出现的频率。某一种类(或者数值)的相对频率(relative frequency)是该种类(或者数值)出现的频率除以数据的总数，相对频率通常以分数、百分数或者小数的形式给出。相对频率分布(relative frequency distribution)也是一张表，在这张表中会给出所有种类(或者数值)以及它们的相对频率。

例 4.1.1: 一项调查记录了 25 个家庭中孩子的数量，调查结果如下：

1 2 0 4 1 3 3 1 2 0 4 5 2 3 2 3 2 4 1 2 3 0 2 3 1

下面是这组数据的频率分布和相对频率分布。

Frequency Distribution

Number of Children	Frequency
0	3
1	5
2	7
3	6
4	3
5	1
Total	25

Relative Frequency Distribution

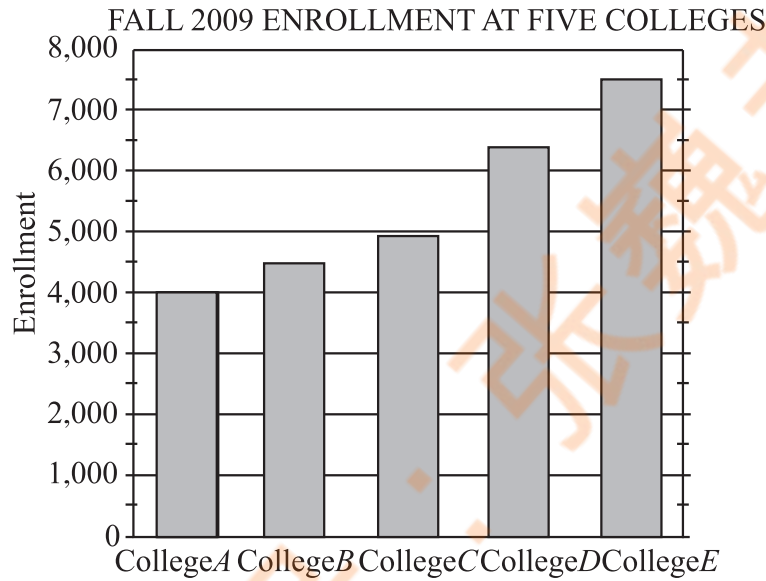
Number of Children	Relative Frequency
0	12%
1	20%
2	28%
3	24%
4	12%
5	4%
Total	100%

注意：相对频率的总和为 100%。如果我们使用小数代替百分数，那么总和为 1。在相对频率分布中，相对频率的总和始终为 1。

2. 条线图 (Bar Graphs)

条线图是一种常用的表示频率的图表。在条线图中，矩形的条用来表示数据种类，每一个条形的高度都是根据该种类的频率或者相对频率而得到的。所有条形的宽度相同。条形横向或者纵向表示。条形图能够帮助我们比较不同种类出现的频率，更轻松地判断出这一种类的数据是否频繁地出现。

例 4.1.2

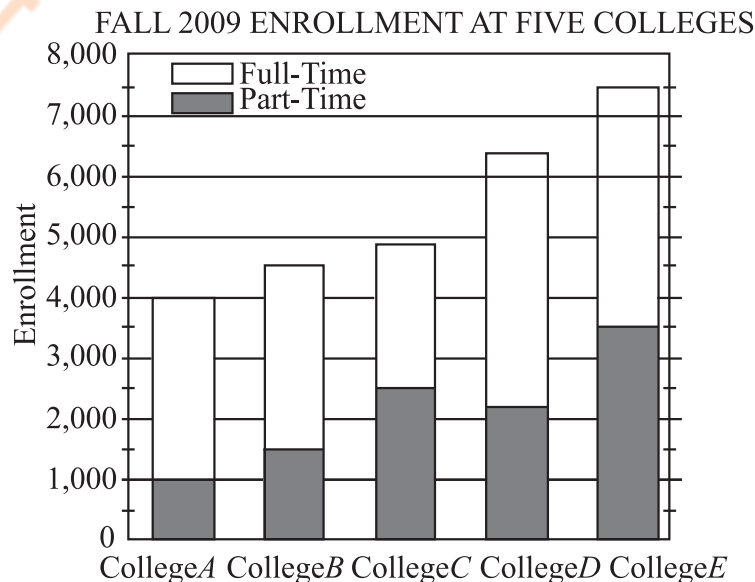


从图中我们可以看出：2009年秋季入学人数最多的是E大学，最少的是A大学，而且我们可以估算出D大学的入学人数大概是6400人。

3. 分段条形图 (Segmented Bar Graph)

分段条形图可以用来展示某个种类是由哪些不同的小组组成的。在分段条形图中，每一组都由多个小组组成，每一个条形被分成多个条形来表示不同的小组。每一个小条形的高度也是根据该小组的概率或者相对频率计算出来的。

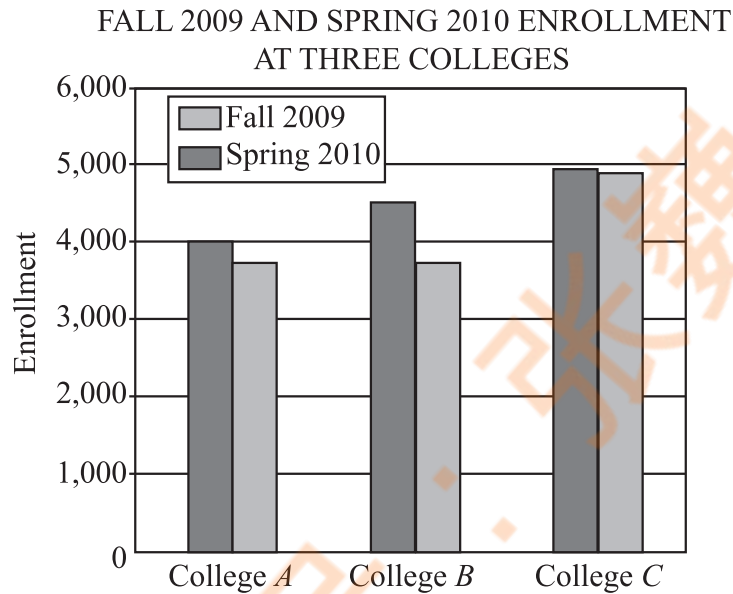
例 4.1.3



根据上面的分段条形图可以估算出不同的值。比如：对于D大学，总的入学人数大约是6300名，非全日制的入学人数大约是2200，全日制的入学人数大约是6400-2200，即4200名学生。

条形图还可以用来比较同一种里的不同组。

例 4.1.4



观察这三所大学，2009年秋季入学人数都比2010年春季入学人数多。而且，人数减少最多的是B大学。

尽管条形图通常用来比较频率，就像例子里所描述的，但它有时也用来比较数值数据，比如温度、美元数量、百分比、高度和重量。而且，有些种类本身就是数值形式的，比如年或者其他时间区间。

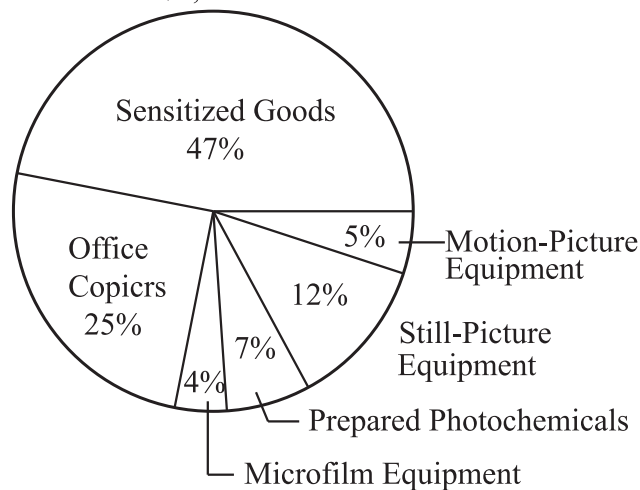
4. 饼图 (Circle Graph/ Pie Charts)

饼图用来表示种类较少的数据，它能够让我们看出一个数据是如何被分为不同种类的。在饼图中，每种类型所占的区域面积是与其相对频率成比例的。

例 4.1.5

UNITED STATES PRODUCTION OF PHOTOGRAPHIC
EQUIPMENT AND SUPPLIES IN 1971

Total: \$3,980 million



上图给出了1971年美国所有摄影设备的生产与供应，Sensitized

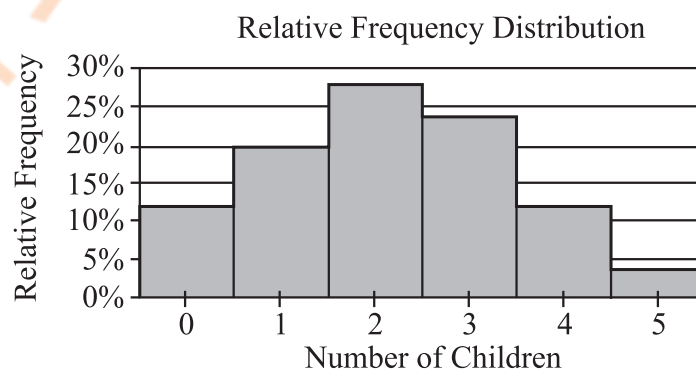
Goods 所占比重最大。饼图中的各个种类所占据的区域叫作扇形 (sector)。因为每个扇形的面积都是根据该扇形对应的种类的相对频率画出的，那么每个扇形的圆心角与 360° 的比值就等于该种类的相对频率。比如，代表 Prepared Photochemicals 的扇形的圆心角就是 360° 的 7%，即 25.2° 。

5. 柱状图 (Histogram)

当一组数据较大且包含了许多不同的值，把这组数据归入不同的区间 (通常叫作等级) 是十分有效的。我们首先把所有值的范围分为若干个长度相等的小区间，然后统计落入每个区间的值的数量。通过这种方式，每个区间都有一个频率或者相对频率。柱状图中通常会给出所有区间以及它们的 (相对) 频率。柱状图与条形图类似，但是柱状图的横轴也有数字进行标注。而且在柱状图中，每个条形之间没有空间。如果两个条形之间有空间 (即没有其他条形出现)，那么就意味着没有值落入这个区间。

在 4.5 节中的例 4.5.1 给出了一个有 50 个条形的柱状图。仅有几个值的数值变量也可以用柱状图来表示。每个条形对应的值标注于条形底部的中间，如下图所示。

例 4.1.6 下面的柱状图给出了例 4.1.1 中的相对频率。



从柱状图中我们可以看出整组数据的分组趋势，数据的中心、分散程度、高频低频空间也都能够非常明显地看出来。从上面的柱状图可以看出，整个数据分布像只有一座顶峰的山，这意味着在中部数据频繁出现而在两端数据极少出现。中心值是 2 和 3，整个分布是近似关于 2 和 3 对称的。因为所有的条形宽度相同，那么每个条形的面积都与该条形对应的数据的频率成比例。因此条形的面积也表明了数据集中和分散的地方。

最后需要注意的是：因为每个条形的宽度为 1，那么所有条形面积之和等于相对频率之和，即 100% 或者 1。这一定理对于 4.5 节将要提到的概率分布非常重要。

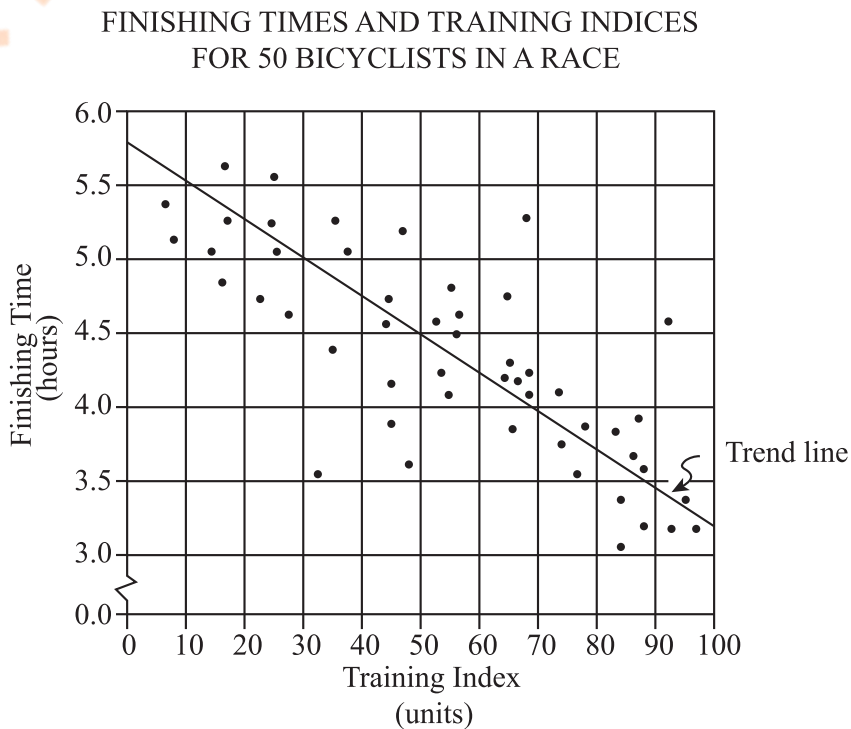
6. 散点图 (Scatterplots)

迄今为止所使用的例子中涉及到的数据都是由单一变量产生的。这种类型的数据(观察一个变量得到的数据)被称为单一变量。有些时候在同一人群或物群之中,我们会观察、研究多个变量来收集数据。这样的数据被称为二变量数据。我们可能想分别单独研究这些变量,或者研究这两个变量之间的关系。如果变量要单独分析,之前提出的研究单一变量的图表方法仍然可以使用。

为了体现两个数值变量之间的关系,最有效的方法是散点图。在散点图中,一个变量的值呈现在直角坐标系的横轴。显然,另一个变量的值就呈现在直角坐标系的纵轴。对于收集到的所有数据中的某一个具体的数据,它的值是一个有序数对,数对中的两个数字各自代表一个变量,这个数对将会以点的形式呈现在坐标系内。

散点图能够让我们观察到两个变量之间的关系或者是他们之间关系的一种趋势。而且,整个趋势的走向和偏离这个趋势的程度我们也可以轻松从散点图中看出来。很多情况下,能够最好代表这个趋势的直线或者曲线也可以画在散点图中。体现趋势的线用处很大,比如,可以用来预测未来的人口。

例 4.1.7 一位自行车教练进行了一项调查:他调查了 50 位自行车爱好者,并记录了两项数据:他们完成自行车比赛所用时间和在赛前三个月他们进行训练的时间。为了更准确地测量训练时间,他采用了一个训练指标:自行车爱好者的训练强度,单位为“units”。他调查得到的两项数据以及能够体现两个变量之间关系的趋势的直线都在下面的散点图中给出。



除了已经给出的这条趋势线，你还能够看出散点图中的点偏离这条线的程度。换句话说，你能够看出这条线与数据变化趋势之间的吻合程度。你还能够看出，随着训练强度的提高，完成比赛的时间通常将会减少。当然，也有几组数据与这个趋势相悖。

根据这条趋势线，我们可以做出很多预测。比如我们可以预测：当一位自行车爱好者的训练强度为 70 个单位时，他大约需要 4 个小时来完成比赛。我们是如何得到“70 个单位”这个值的呢：从横轴上“70”这个点画一条垂直于横轴的直线与趋势线交于一点，该交点的纵坐标非常接近于 4 个小时。

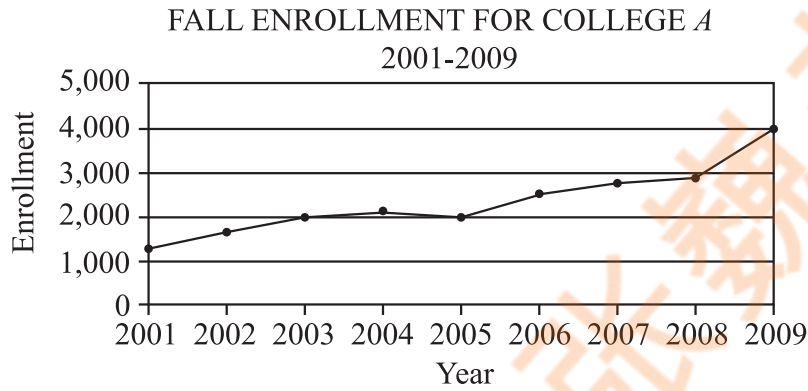
根据这条趋势线我们能够做出的另一个预测是：一名自行车爱好者每提高 10 个单位的训练强度能够减少的完成比赛的时间。这个预测基于完成比赛时间的变化与训练强度变化的比值，也就是这条趋势线的斜率。为了估测这条直线的斜率，我们在直线上任意选取两点，比如我们选取这条趋势线的两个端点：(0, 5.8)和(100, 3.2)。那么这条趋势线的斜率就是： $\frac{5.8-3.2}{0-100} = -0.026$ 。

这个斜率有什么意义呢？我们可以这样理解：当自行车爱好者每提升一个单位的训练强度，他完成比赛所需时间将减少 0.026 小时。因为我们想得到的是当训练强度提升十个单位时能够减少的完成比赛的时间，我们可以用提升的“速率”乘 10 就得到了 0.26 小时/10 单位。当我们想使用分钟作为单位时，我们可以用 0.26 乘 60，结果大概是 16 分钟。综上，我们根据这条趋势线，我们可以推测，当自行车爱好者提升了 10 个单位的训练强度之后，他完成比赛所需要的时间大概会减少 16 分钟。

7. 时距图 (Time Plots)

时距图也称为时间曲线图。我们有时收集数据是为了观察变量是如何随时间变化的。比如说，关于百货公司销售额的数据可能是按年或者按月进行统计。时距图(有时称为时间序列)能够展现出定期收集到的数据的变化。在根据某一变量绘制出的时间图中，每个观察值对应于测量出该观察值的时间，时距图对于坐标平面的使用与散点图类似，但也有不同：时距图的横轴总是代表时间，而测量的变量则总在纵轴上。另外，我们在绘制时距图时，用一条线段将连续的两个观察值连接起来，用以强调变量随着时间的增加和减少。

例 4.1.8



从上面这一时距图中，你可以看出在从 2008 年到 2009 年之间，秋季入学人数增加得最多。我们是如何做出这种判断的呢？因为 2008—2009 年之间线段的斜率比其他线段（时间间隔都是 1 年）的斜率更大。

虽然时距图通常用于比较频率，就像在上述的例子中，但是它们还能够展现出数据随着时间如何变化，如温度、美元数量、百分点、高度和重量。

综合训练

Questions 1—4 are based on the following data.

SIGHTINGS OF SELECTED BIRD SPECIES
IN PARK H IN 1999, BY SEASON

Species	Number of Sightings			
	Winter	Spring	Summer	Fall
Cardinal	30	18	11	20
Goldfinch	6	12	6	9
Junco	12	0	0	6
Nuthatch	8	2	0	4
Robin	6	12	28	18
Sparrow	20	19	23	22
Wren	0	18	30	12

1. In the winter, $\frac{2}{3}$ of the cardinal sightings, $\frac{1}{2}$ of the junco sightings, and $\frac{1}{4}$ of the sparrow sightings were in January. What fraction of the total number of sightings of these three bird species in the winter were in January?

- A. $\frac{1}{4}$
- B. $\frac{1}{3}$
- C. $\frac{1}{2}$
- D. $\frac{2}{3}$
- E. $\frac{2}{5}$

2. For which of the following bird species is the standard deviation of the numbers of sightings shown for the four seasons least?

- A. Cardinal
- B. Junco
- C. Robin
- D. Sparrow
- E. Wren

1. 在冬天, $\frac{2}{3}$ 的 cardinal sightings, $\frac{1}{2}$ 的 junco sightings, $\frac{1}{4}$ 的 sparrow sightings 在一月份。那么在冬天里这三种鸟出现的次数有多少是在一月份?

解: Cardinal 一月份出现次数为 $30 \times \frac{2}{3} = 20$, junco 在一月份出现的次数为 $12 \times \frac{1}{2} = 6$, sparrow 在一月份出现的次数是 $20 \times \frac{1}{4} = 5$, 所以在一月份这三种鸟一共出现 $20 + 6 + 5 = 31$ 次, 占比为 $\frac{31}{30+12+20} = \frac{1}{2}$ 。

答: C

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

2. 下面给出的五种鸟中, 哪一种鸟四季出现的次数的标准差最小?

解: 本题不用计算, 我们大致判断一下即可。标准差代表的是一组数据的分散程度, 数据越集中那么标准差越小。我们从表中可以看出 Sparrow 的集中程度最高。

答: D

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

3. Which of the following is closest to the average (arithmetic mean) number of cardinal sightings for the 4 seasons?

- A. 12
- B. 14
- C. 16
- D. 18
- E. 20

4. By what percent did the number of wren sightings increase from spring to summer?

Give your answer to the nearest whole percent.

3. 下列选项中, 哪个最接近 cardinal 四季出现次数的平均数?

解: 从表中我们可以计算出平均数为

$$\frac{30+18+11+20}{4} = \frac{79}{4} = 19.75, \text{ 所以}$$

E 选项最接近。

答: E

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

4. Wren 出现的次数从春天到夏天增加了多少? 请给出最接近的百分数。

解: Wren 春天出现了 18 次, 夏天出现

$$\text{了 30 次, 所以增加了 } \frac{30-18}{18} = \frac{2}{3}$$

$\approx 67\%$ 。

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

Question 5 is based on the following data.

AVERAGE RATING OF PRODUCT X
GIVEN BY THREE GROUPS OF PEOPLE

Group	Number of People in Group	Average Rating
A	45	3.8
B	25	4.6
C	30	4.2

5. Each of the people in three groups gave a rating of Product X on a scale from 1 through 5. For each of the groups, the table above shows the number of people in the group and the average (arithmetic mean) of their ratings. What is the average of the ratings of the product given by the 100 people in the three groups combined?

Give your answer to the nearest 0.1.

5. 三组里的每个人都对 X 产品打分, 评分从 1 到 5。对于每个组, 上表给出了每组的人数和这一组的评分的平均值。那么这三组中 100 个人打分的平均值是多少? 请将答案精确到十分位。

解: 此题求出加权平均数即可,

$$\frac{45 \times 3.8 + 25 \times 4.6 + 30 \times 4.2}{100}$$

≈ 4.1 。

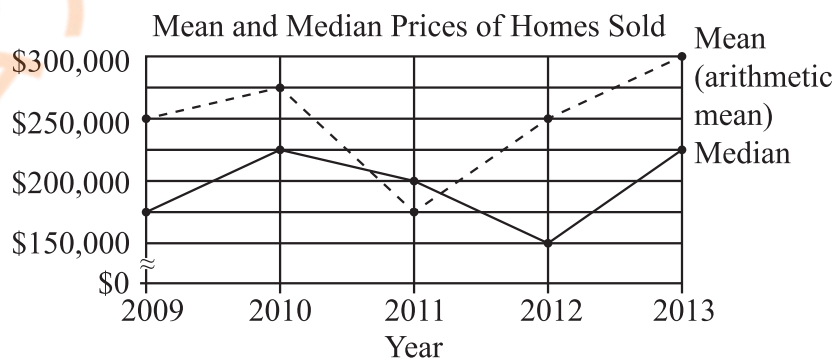
答: 4.1

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

Questions 6—9 are based on the following data.

HOMES SOLD IN COUNTY T, 2009-2013

Number of Homes Sold	
Year	Number
2009	503
2010	351
2011	390
2012	410
2013	290



6. Which of the following is closest to the mean of the prices of the 700 homes sold in 2012 and 2013 combined?

- A. \$ 265,000
- B. \$ 270,000
- C. \$ 275,000
- D. \$ 280,000
- E. \$ 285,000

6. 2012 和 2013 年卖出的 700 间房子的平均价是多少? 请选择最接近的答案。

解: 2012 年共卖出了 410 间房子, 平均价格为 \$ 250,000; 2013 年间共卖出了 290 间房子, 平均价格为 \$ 300,000, 所以卖出的这 700 套房子的平均价格是

$$\frac{410 \times 250,000 + 290 \times 300,000}{700} \approx$$

270,000。

答: B

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

7. By approximately what percent did the median price of homes sold in County T decrease from 2011 to 2012?
- A. 10%
- B. 15%
- C. 25%
- D. 33%
- E. 50%

7. 从 2011 年到 2012 年在 T 郡房屋价格的中位数大约降低了多少?

解: 从右图我们可以看出 2011 年房屋价格的中位数是 \$200,000, 2012 年房屋价格的中位数是 \$150,000, 所以降低了 $\frac{200,000-150,000}{200,000}=25\%$ 。

答: C

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

8. Based on the information given, which of the following statements about the sum of the prices of all the homes sold in a given year must be true?
Indicate all such statements
- A. The sum of the prices for 2010 was greater than the sum for 2009.
- B. The sum of the prices for 2010 was greater than the sum for 2011.
- C. The sum of the prices for 2009 was greater than the sum for 2011

8. 根据给出的信息, 下列关于某年所有售出房屋价格之和的说法, 哪些是正确的? 请选择所有正确的答案。

- A. 2010 年卖出房屋价格之和比 2009 年的多。
- B. 2010 年卖出房屋价格之和比 2011 年的多。
- C. 2009 年卖出房屋价格之和比 2011 年的多。

解: 2010 年共卖出了 351 套房子, 平均价格是 \$275,000, 所以所有卖出房屋价格之和是 $351 \times 275,000 = \$96,525,000$; 2009 年共卖出了 503 套房子, 平均价格是 \$250,000, 所以所有卖出房屋价格之和为 $503 \times 250,000 = \$125,750,000$; 2011 年共卖出了 390 套房子, 平均价格是 \$175,000, 所以所有卖出房屋价格之和为 $390 \times 175,000 = \$68,250,000$ 。所以这三年卖出房屋价格

之和从小到大排列是 2011, 2010, 2009。所以 BC 选项正确。

答: BC

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

9. County T collected a tax equal to 3 percent of the price of each home sold in the county in 2009. Approximately how much did County T collect in taxes from all homes sold in 2009 ?

- A. \$ 38,000
- B. \$ 260,000
- C. \$ 380,000
- D. \$ 2,600,000
- E. \$ 3,800,000

9. 在 2009 年, T 郡在每售出一栋房子会收取等同于房屋价格 3% 的税, 那么 T 郡在 2009 年一共大约收取了多少税?

解: 从上题分析可知, 2009 的总销售额是 \$103,115,000, 收取 3% 的税, 那么一共是 $\$103,115,000 \times 3\% \approx \$3,800,000$ 。

答: E

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

Question 10 is based on the following data.

City	Population (in thousands)
New York	8,008
Los Angeles	3,695
Chicago	2,896
Houston	1,954
Philadelphia	1,518

10. The populations of the five most populous cities in the United States in April 2000 are listed in the table above. The total population of the United States in April 2000 was 281,422,000. Based on the data shown, the population of the three most populous cities combined was what percent of the total population of the United States in April 2000? Give your answer to the nearest whole percent.

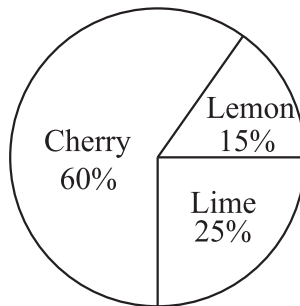
10. 上表给出了 2000 年 4 月美国人口最多的 5 个城市, 2000 年 4 月美国的总人口数量是 281,422,000。根据给出的数据, 在 2000 年 4 月三个人口最多的城市的人口总数占了美国总人口的多少? 请给出最接近的百分数。

解: 人口最多的三个城市是 New York, Los Angeles 和 Chicago, 人口数量分别是 8,008,000, 3,695,000, 2,896,000, 所以三个人口最多的城市的人口总数是 $8,008,000 + 3,695,000 + 2,896,000 = 14,599,000$, 所占比例是 $\frac{14599000}{281422000} \times 100\% \approx 5\%$ 。

答: 5%

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

Question 11 is based on the following data.



11. The graph above shows the distribution of three different flavors of hard candies—cherry, lemon, and lime—in a candy jar. If all the lemon candies are removed and no other candies are added or removed, what fraction of the remaining candies in the jar will be lime candies?

- A. $\frac{1}{7}$ B. $\frac{2}{9}$
 C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{5}{17}$
 E. $\frac{5}{12}$

Question 12 is based on the following data.

Year	Population	Population per Square Mil
1800	5.3 million	6.1
1900	76.0 million	25.6

12. By approximately how many square miles did the area of the United States increase from 1800 to 1900?

- A. 360,000
 B. 2,000,000
 C. 3,625,000
 D. 20,000,000
 E. 36,250,000

11. 上图给出了一糖果罐中三种口味(樱桃、柠檬和酸橙)糖果数量的分布,如果拿走所有柠檬口味的糖,那么糖果罐中剩下的糖果中有多少是酸橙味的糖果?

解: 樱桃味糖果数量和酸橙味的数量之比为 60%: 25%, 所以酸橙味糖果所占比例是 $\frac{25\%}{60\%+25\%} = \frac{5}{17}$ 。

答: D

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

12. 美国的面积从 1800 年到 1900 年大约增加了多少平方英里?

解: 可以用人口除以每平方英里的人口得到美国的面积。美国 1800 年的面积为 $5,300,000/6.1 = 868,852.46$ 平方英里, 而 1900 年的面积为 $76,000,000/25.6 = 2,968,750$ 平方英里, 两者相减得到 2,099,898, 最接近的答案为 B。

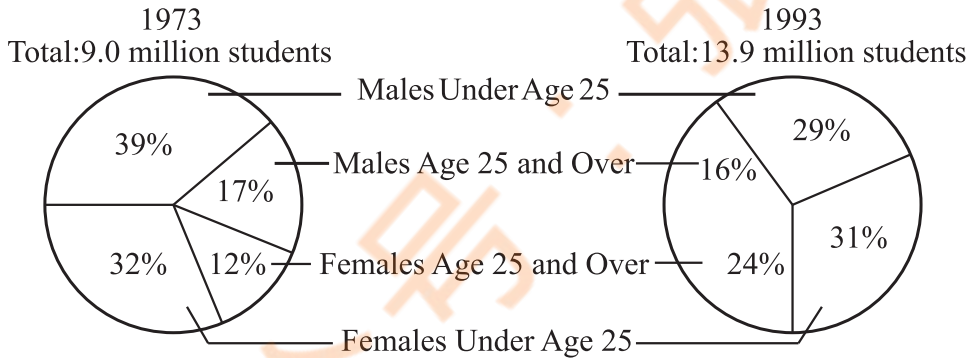
答: B

Questions 13–15 are based on the following data.

United States Population(in millions)

Year	Males Under Age 25	Males Age 25 and Over	Females Under Age 25	Females Age 25 and Over
1973	31	73	29	79
1993	37	88	36	96

United States College Enrollment



13. Of the four college enrollment categories shown, how many categories accounted for more than $\frac{3}{8}$ of the total college enrollment in 1973?

- A. 0 B. 1
C. 2 D. 3
E. 4

13. 上表中展示了四种不同类型的入学学生。请问：有多少种类型的学生占到了总入学人数的 $\frac{3}{8}$ 以上？

解： $\frac{3}{8} = 37.5\%$ ，因此只有 Males under age 25 (39%) 这一部分超过了 $\frac{3}{8}$ 。

答：B

14. By approximately what percent did the total number of students enrolled in college increase from 1973 to 1993?

- A. 45%
B. 55%
C. 65%
D. 75%
E. 85%

14. 从 1973 年到 1993 年大学入学人数大概提升了多少个百分点？

解：入学的学生数从 1973 年的 9million 增长到 1993 年的 13.9million，增长幅度为 $13.9/9 - 1 = 54.5\%$ ，最接近的选项是 B。

答：B

15. Which of the following is closest to the number of males who were not enrolled in college in 1993?
- A. 107million
B. 110million
C. 113million
D. 116million
E. 119million

15. 1993年大约多少男性没有进入大学学习? 请选出最接近的答案。

解: 1993年的男性人口总数为 $88 + 37 = 125$ million, 学生总数为 13.9million, 其中25岁以下的男学生占学生总数的29%, 25岁及以上的占16%, 因此用男性人口总数减去男学生总数即可求得:

$$88 + 37 - 13.9 \times (29\% + 26\%) =$$

$$118.745 \approx 119$$

答: E

Question 16 is based on the following data.

Source	Percent of Financial Support
Corporations	37%
Federal/state governments	33%
Individuals	22%
Others	8%

16. The table shows the percent distribution of financial support for a nonprofit organization, by source. The amount of financial support from individuals is approximately what percent less than the amount from corporations?
- A. 24%
B. 35%
C. 41%
D. 69%
E. 88%

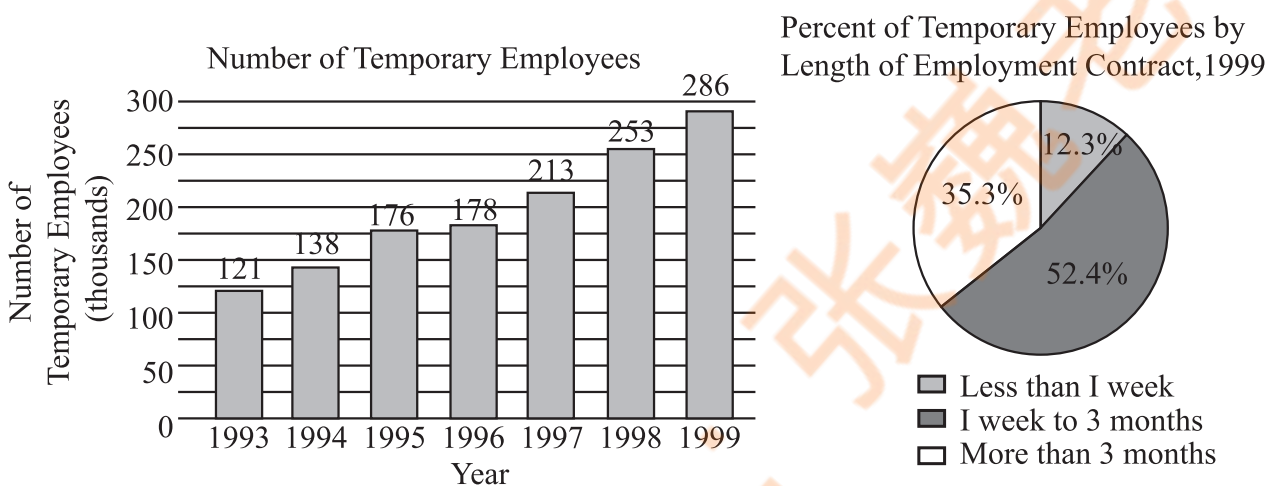
16. 上表给出了对非营利机构的不同类型经济支持的百分比分配。来自个人的经济支持比来自企业的支持大概少了多少?

解: 来自个人的经济支持占比为22%, 来自公司的经济占比为37%, 所以答案是 $\frac{37\% - 22\%}{37\%} \times 100\% \approx 41\%$ 。

答: C

Questions 17–19 are based on the following data.

TEMPORARY EMPLOYMENT IN GERMANY, 1993–1999



17. Which of the following is closest to the percent increase in the number of temporary employees from 1993 to 1999?
- A. 36% B. 58%
C. 136% D. 158%
E. 236%
17. 从 1993 到 1999 年期间，临时工的数量大约增长了多少？请选出最接近的答案。
- 解：从 1993 年到 1999 年的增长率为 $(286 - 121) \div 121 = 1.36$ ，即 136%。
- 答：C
18. In 1999 approximately how many of the temporary employees had an employment contract with a length of at most 3 months?
- A. 185,000
B. 150,000
C. 101,000
D. 35,000
E. 19,000
18. 1999 年，大约多少临时工拥有一份至少三个月的雇佣合同？
- 解：1999 年总人数为 286,000，合同最长三个月的人数百分比为 $52.4\% + 12.4\% = 64.7\%$ ，则合同最长 3 个月的人数为 $286,000 \times 64.7\% = 185,042$ 。
- 答：A

19. In 1998 the ratio of the number of female temporary employees to the number of male temporary employees was 1 to x , where $x > 0$. In terms of x , what was the number, in thousands, of female temporary employees in 1998?
- A. $253(x - 1)$
 B. $253(x + 1)$
 C. $253/x$
 D. $253/(x - 1)$
 E. $253/(x + 1)$

19. 1998年，女性临时工数量和男性临时工的数量之比为 $1 : x$ ， $x > 0$ 。那么在1998年，女临时工的数量是多少？（用 x 表示，单位为千人）

解：1998年总人数为253,000，女性与男性之比为 $1 : x$ ，所以女性占比为 $\frac{1}{1+x}$ ，所以女性临时工数量为 $253,000 \cdot \frac{1}{1+x}$ ，换算单位后选 E。

答：E

Questions 20—22 are based on the following data.

A survey of 550 male managers and 650 female managers was conducted. All 1,200 managers identified whether, for each of six characteristics, the characteristic is important to consider when hiring a new employee. For each of the six characteristics, the percent of managers surveyed who identified that characteristic as important to consider is given in the following table.

SURVEY RESULTS

Characteristic	Percent
Work experience	72%
Proficiency in English	68%
Ability to follow directions	65%
Specific occupational skill	60%
Computer expertise	58%
Appropriate attire and behavior	55%

20. Which of the following statements about the managers surveyed must be true?

Indicate all such answers

- A. Less than 55 percent were male managers.
- B. Of the male managers, more identified work experience as an important characteristic to consider than identified proficiency in English.
- C. Less than 60 percent of the male managers identified specific occupational skill as an important characteristic to consider.

21. The number of managers surveyed who identified work experience as an important characteristic to consider was approximately what percent greater than the number who identified appropriate attire and behavior as an important characteristic to consider?

- A. 15%
- B. 20%
- C. 25%
- D. 30%
- E. 35%

20. 一项研究调查了 550 名男性经理和 650 名女性经理。所有 1200 名经理对六种特征进行评估, 这些特征在雇佣新雇员时非常重要。对于每一种特征, 认为它重要的经理所占总调查人数的百分比在下表中给出。

下列关于经历的描述中, 哪些一定是正确的? (选出所有答案)

- A. 男性经理占比少于 55%。
- B. 对于男性经理, 认为工作经验重要的比认为精通英语重要的人多。
- C. 男性经理中少于 60% 的人认为特殊的职业技能是重要的。

解: 男性经理占的比重是 45.8%, 所以 A 是对的。题目中只给出了男女总经理总的意向, 没有单独调查女经理或者男经理, 所以 BC 都是错的。

答: A

21. 在所有调查的经理中, 认为工作经验重要的比认为合适的着装和态度重要的多多少?

解: 认为工作经验重要的有 72%, 认为合适的着装和行为重要的有 55%, 那么 $(72\% - 55\%) \div 55\% = 31\%$ 。

答: D

22. If 48 percent of the managers surveyed identified both ability to follow directions and computer expertise as an important characteristics to consider, what percent of the managers surveyed identified neither of these characteristics as important to consider?
- A. 15%
 B. 18%
 C. 23%
 D. 25%
 E. 28%

22. 如果调查的经历中有 48% 的人认为执行力强和精通电脑都很重要，那么认为这两个特征都不重要的经理占总人数的多少？

解：65% 的经理认为执行力重要，58% 认为精通电脑重要，48% 的经理认为两者都很重要，那么说明 17% 的经理认为执行力重要而精通电脑并不重要，10% 的经理认为精通电脑重要而执行力不重要；所以认为至少有一种品质重要的经理占 17% + 10% + 48% = 75%，所以认为两种品质都不重要的经理占 25%。

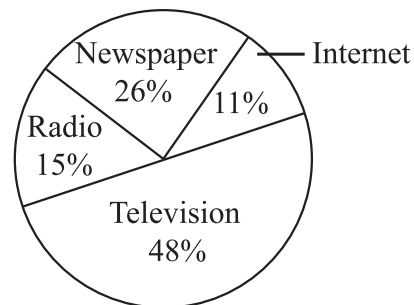
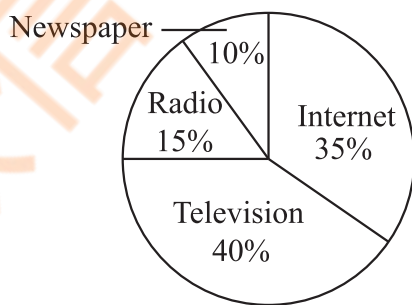
答：D

Questions 23—25 are based on the following data.

Survey* of preferred method to obtain news, by age-group

Age-Group 20 to 49
 Number Surveyed:240

Age-Group 50 to Older
 Number Surveyed:300



* Each person surveyed indicated one of the four methods as his or her preferred method to obtain news.

23. What fraction of the people in the age-group 20 to 49 indicated newspaper or the Internet as their preferred method to obtain news?

23. 参与调查的每个人从四种方式中选择一种最喜欢的获取新闻的方式在 20—49 年龄段中，选择报纸或者网络作为他们最喜欢获取新闻的方式的人占总数的比例是多少？

24. Which of the following is closest to the percent of all the people surveyed who indicated the Internet as their preferred method to obtain news?

- A. 18.8%
- B. 21.7%
- C. 23.0%
- D. 33.3%
- E. 46.0%

25. For the age-group 50 and older, the number of people who indicated the Internet as their preferred method to obtain news is approximately what percent less than the number of people who indicated radio?

- A. 12%
- B. 27%
- C. 36%
- D. 45%
- E. 50%

解：在 20—49 岁的人中，从报纸或网络获取新闻的比例是 $10\% + 35\% = 45\%$ 。

24. 在所有调查的人中，有多少选择网络作为他们最喜欢获取新闻的方式？

解：题目问选择网络获取新闻的在总人群中的比例最接近下面哪个，所以先算出总人数： $240 + 300 = 540$ 。在 20—49 岁的人中，选择网络获取新闻的人数为 $240 \times 35\% = 84$ ，在 50 岁及以上的人中，选择网络获取新闻的人数 $= 300 \times 11\% = 33$ ，所以 $\frac{84 + 33}{540} = 21.7\%$ 。

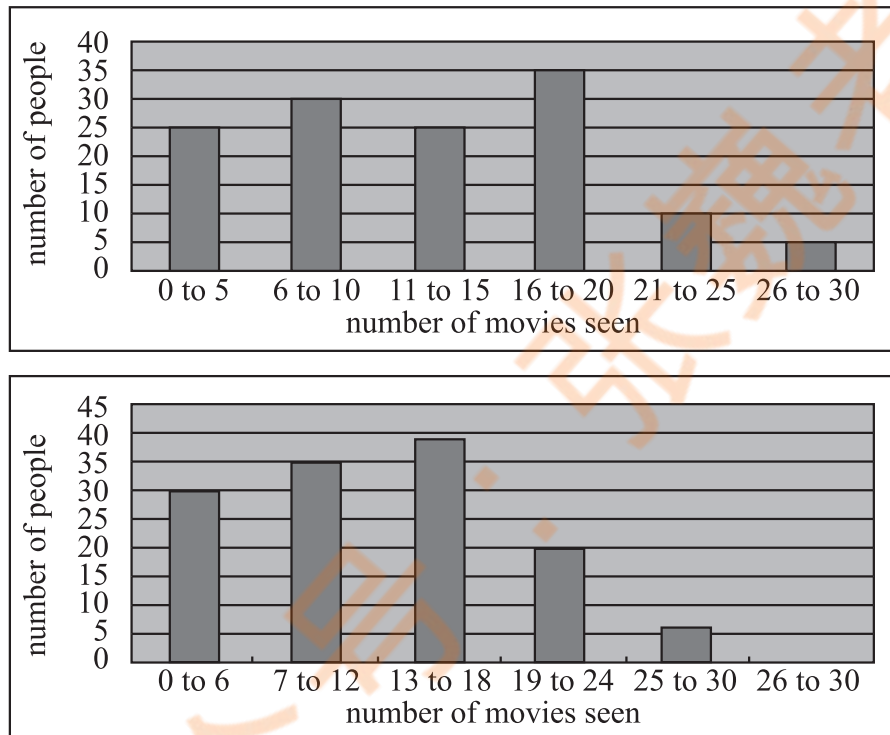
答：B

25. 对于 50 岁及以上受调查者，选择网络作为他们最喜欢获取新闻的方式的人数比选择收音机的人少多少？

解：选网络人数： $300 \times 11\% = 33$ ，选收音机人数： $300 \times 15\% = 45$ ， $\frac{45 - 33}{45} \approx 27\%$ 。

答：B

Question 26 is based on the following data.



26. In a survey, 130 people were asked how many movies they had seen in the preceding year. Their responses varied from 0 to 30 movies. The graphs above show two different summaries of the same survey results. How many people responded that they had seen 11 or 12 movies?

- A. 10
- B. 12
- C. 15
- D. 20
- E. 23

26. 一项调查统计了 130 人去年的观影数量。他们的回答范围在 0 到 30 之间。上面两幅图给出了该调查的结果。那么有多少人去年看了 11 或者 12 部电影?

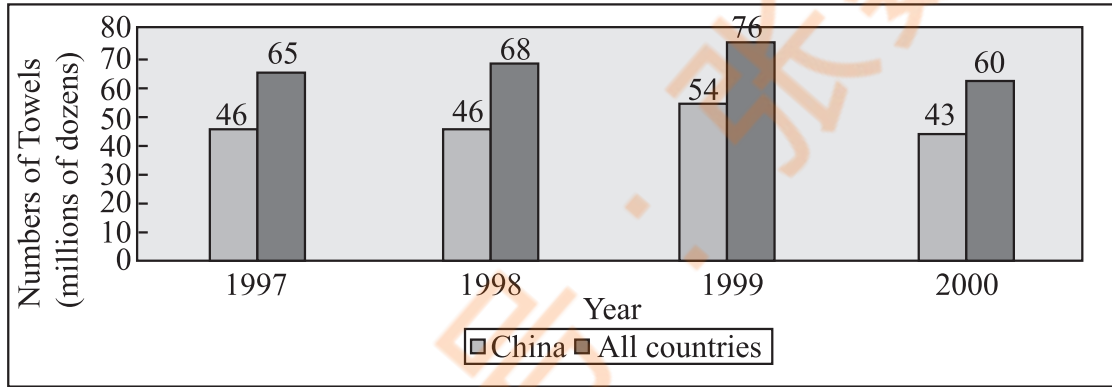
解：我们把两幅图结合着来看，去年观影数量在 0 到 5 之间的人数有 25 人，在 0 到 6 之间的有 30 人，那么去年观影数量为 6 的人数为 $30 - 25 = 5$ 人。去年观影数量在 6 到 10 之间的有 30 人，那么在 7 到 10 之间的就有 $30 - 5 = 25$ 人，7 到 12 的有 35 人，那么去年观影数量为 11 和 12 的人数为 $35 - 25 = 10$ 人。

答：A

Questions 27—29 are based on the following data.

For each of the years 1997 through 2000*, the graph shows the number of towels imported to Japan from China, and the total number of towels imported to Japan from all countries, including China.

Number of Towels Imported to Japan, 1997-2000*
(in millions of dozens **)



*For the first nine months of 2000

**1 dozen=12

图表给出了 1997 年到 2000 年期间每年日本从中国进口毛巾的数量，日本从其他各国进口毛巾的数量，包括中国。

* 2000 年只统计了前九个

** 1 打=12 个

27. In 1998, how many of the imported towels were not imported from China?

- A. 260 million B. 264 million
C. 268 million D. 272 million
E. 276 million

27. 在 1998 年，有多少进口的毛巾不是从中国进口的？

解：1998 年，进口毛巾中，不从中国进口的数量是： $(68 - 46) \times 12 = 264$ million，即 2.64 亿。

答：B

28. If the average (arithmetic mean) number of towels imported from China per month was the same for the last 3 months of 2000 as it was for the first 9 months of 2000, approximately how many million dozen towels were imported from China during the 12 months of 2000?

- A. 57 B. 63
C. 76 D. 80
E. 86

29. In 1999, the ratio of the number of towels imported from China to the total number of towels imported from countries other than China was closest to which of the following?

- A. 7 to 2 B. 3 to 1
C. 5 to 2 D. 2 to 1
E. 3 to 2

28. 如果在 2000 年后 3 个月平均每个月从中国进口的毛巾数量与前 9 个月平均数相等, 那么 2000 年 12 个月总共多少百万打毛巾从中国进口?

解: 在 2000 年, 平均每月从中国进口毛巾的数量为 $\frac{43}{9}$, 则整年的进口量为 $\frac{43}{9} \times 12 \approx 57$ 。

答: A

29. 1999 年从中国进口毛巾的数量与从中国以外的国家进口毛巾的数量的比值为多少? 从下列选项中选出最接近的答案。

解: 1999 年, 从除了中国以外的国家进口毛巾数量为: $76 - 54 = 22$, 所以中国: 其他国家 = $54 : 22$, 约为 $5 : 2$ 。

答: C

Questions 30—33 are based on the following data.

PERCENT OF THE 300 PEOPLE IN GROUP 1 AND THE 400 PEOPLE
IN GROUP 2 WHO HAVE SELECTED AILMENTS

Respiratory Ailment	Percent of People in Group 1 Who Have Ailment	Percent of People in Group 2 Who Have Ailment
Allergic sensitivity to endotoxins	14%	21%
Asthma(allergic)	3%	4%
Asthma(nonallergic)	2%	3%
Hay fever	4%	10%
Sneezing and itchy eyes	8%	11%
Wheezing(allergic)	5%	6%
Wheezing(nonallergic)	2%	5%

30. The number of people in group 2 who have hay fever is how much greater than the number of people in group 1 who have hay fever?

- A. 37
- B. 35
- C. 32
- D. 28
- E. 24

31. For the seven ailments, what is the median of the numbers of people in group 2 who have the ailments?

- A. 20
- B. 22
- C. 24
- D. 26
- E. 28

30. 第二组中患有花粉过敏的人数比第一组中多多少?

解: 第二组中共有 400 人, 其中患有花粉过敏的人数占 10%, 即一共有 $400 \times 10\% = 40$ 人; 第一组一共有 300 人, 其中患有花粉过敏的人数占 4%, 即一共有 $300 \times 4\% = 12$ 人; 所以多出了 $40 - 12 = 28$ 人。

答: D

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

31. 对于这七种病中的中位数, 第二组中患有这种病的人数有多少?

解: 我们将第二组这七种病所占比例从大到小进行排列, 那么中位数也就是排在第四位的是过敏性哮喘, 占比为 6%。所以患这种病的人数是 $400 \times 6\% = 24$ 。

答: C

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

32. The number of people in group 1 who have the ailment wheezing (allergic) is what percent greater than the number of people in group 1 who have the ailment wheezing (nonallergic)?

- A. 50%
- B. 75%
- C. 150%
- D. 200%
- E. 300%

33. What is the ratio of the number of people in group 1 with the ailment sneezing and itchy eyes to the total number of people in both groups with the ailment sneezing and itchy eyes?

Give your answer as a fraction.

32. 第一组中患有过敏性哮喘的人数比第一组中患有非过敏性哮喘的人数多多少?

解: 第一组中患有过敏性哮喘的人数所占比例是 5%, 患有非过敏性哮喘的人数所占比例是 2%, 所以要多出 $\frac{5\% - 2\%}{2\%} = 150\%$ 。

答: C

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

33. 第一组中患有 sneezing and itchy eyes 的人数和两组中患有 ailment sneezing and itchy eyes 的总人数之比是多少? 请以分数形式给出你的答案。

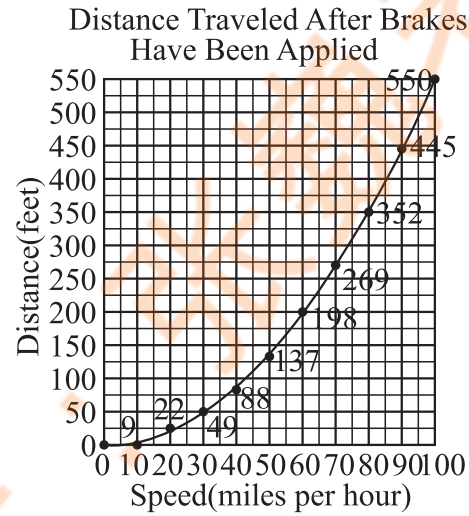
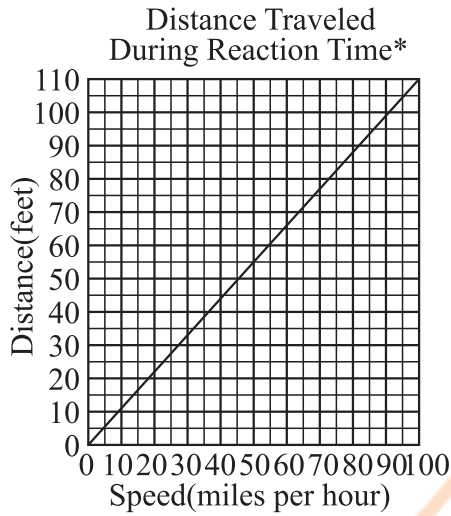
解: 第一组中患有 sneezing and itchy eyes 的人数所占比例是 8%, 所以第一组患 sneezing and itchy eyes 的人数是 $300 \times 8\% = 24$; 第二组中患有 sneezing and itchy eyes 的人数所占比例是 11%, 所以第二组中患 sneezing and itchy eyes 的人数是 $400 \times 11\% = 44$; 所以总人数为 $24 + 44 = 68$, 比例为 $\frac{24}{68} = \frac{6}{17}$ (可以不约分)。

答: $\frac{24}{68}$ 或 $\frac{6}{17}$

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

Questions 34—37 are based on the following data.

DISTANCE TRAVELED BY A CAR ACCORDING TO THE CAR'S SPEED
WHEN THE DRIVER IS SIGNALLED TO STOP



* Reaction time is the time period that begins when the driver is signaled to stop and ends when the driver applies the brakes.

Note: Total stopping distance is the sum of the distance traveled during reaction time and the distance traveled after brakes have been applied.

反应时间指的是驾驶员看到刹车信号开始到踩下刹车这一段时间长度；

注意：总刹车距离是反应时间内行驶的距离加上踩下刹车后行驶的距离。

34. The speed, in miles per hour, at which the car travels a distance of 52 feet during reaction time is closest to which of the following?

- A. 43
- B. 47
- C. 51
- D. 55
- E. 59

34. 当汽车在反应时间内行驶了 52 英尺时，汽车的行驶速度大概是多少？

解：这一题我们关注左图即可，当纵坐标为 52 时，直线的横坐标在 45—50 之间，根据选项看出只有 B 选项在 45—50 之间。

答：B

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

35. Approximately what is the total stopping distance, in feet, if the car is traveling at a speed of 40 miles per hour when the driver is signaled to stop?

- A. 130
- B. 110
- C. 90
- D. 70
- E. 40

35. 汽车行驶速度为 40 英里每小时，驾驶员看到停车信号，那么总刹车距离大约是多少英里？

解：左图中汽车行驶速度为 40 英里每小时，反应时间内行驶距离大约是 42 feet；右图中汽车行驶速度为 40 英里每小时，刹车时间内行驶距离是 88 feet，所以总刹车距离是 $42 + 88 = 130$ feet。

答：A

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

36. Of the following, which is the greatest speed, in miles per hour, at which the car can travel and stop with a total stopping distance of less than 200 feet?

- A. 50
- B. 55
- C. 60
- D. 65
- E. 70

36. 在下列选项中哪一个是最大速度，当汽车以该速度行驶时还能保持刹车距离小于 200 feet?

解：为了选出最大的速度，我们将选项从大到小进行分析。

当行驶速度为每小时 70 和 65 英里时，我们从右图能够看出踩下刹车后行驶的距离超过了 200 feet，所以 D、E 选项错误。

当行驶速度为每小时 60 英里时，我们能看出反应时间内行驶的距离是 65 feet，踩下刹车后行驶的距离是 198 feet，所以总刹车距离是 $198 + 65 = 263 > 200$ ，所以 C 选项错误。

当行驶速度为每小时 55 英里时，反应时间内行驶的距离是 60 feet，踩下刹车后行驶的距离大约是 175 feet，所以总刹车距离是 $175 + 60 = 235 > 200$ ，所以 B 选项错误。

当行驶速度为每小时 50 英里时，反应时间内行驶的距离是 55 feet，踩下刹车后行驶的距离大约是 137 feet，所以总刹车距离是 $137 + 55 = 192 < 200$ ，所以 A 选项正确。

答：A

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

37. The total stopping distance for the car traveling at 60 miles per hour is approximately what percent greater than the total stopping distance for the car traveling at 50 miles per hour?
- A. 22%
 B. 30%
 C. 38%
 D. 45%
 E. 52%

37. 行驶速度为每小时 60 英里时的总刹车距离比行驶速度为每小时 50 英里时的总刹车距离大约多多少?

解：由上一题分析我们知道行驶速度为每小时 60 英里时，刹车距离为 263 feet；当行驶速度为 50 英里时，刹车距离为 192 feet。所以多出 $\frac{263-192}{192} \approx 37\%$ ，所以 C 选项最为

接近。

答：C

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

Question 38 is based on the following data.

Country	Value of 1 United States Dollar
Argentina	0.93 peso
Kenya	32.08 shillings

38. Quantity A: The dollar value of 1 Argentine peso according to the table above
- Quantity B: The dollar value of 1 Kenyan shilling according to the table above
- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

38. A: 1 Argentine peso 价值多少美元；
 B: 1 Kenyan shilling 价值多少美元。

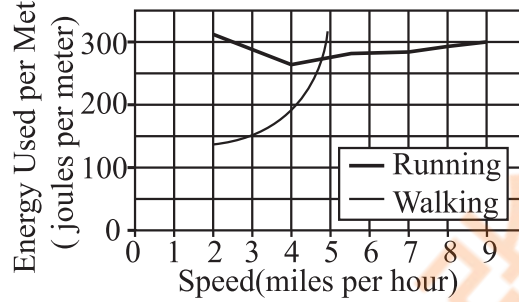
解：1 美元 = 0.93 Argentine peso = 32.08 Kenyan shilling。所以 1 Argentine peso = $1/0.93$ dollar, 1 Kenyan shilling = $1/32.08$ dollar, 所以 Quantity A > Quantity B。

答：A

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

Question 39 is based on the following data.

ENERGY USED PER METER VERSUS SPEED DURING RUNNING AND WALKING



39. If s is a speed, in miles per hour, at which the energy used per meter during running is twice the energy used per meter during walking, then, according to the graph above, s is between
- A. 2.5 and 3.0 B. 3.0 and 3.5
 C. 3.5 and 4.0 D. 4.0 and 4.5
 E. 4.5 and 5.0

39. 当以每小时 s 英里的速度跑步和走路时，跑步每米消耗的能量是走路的两倍，那么 s 的范围是多少？

解：当速度大于 3mile/h 时，跑步每米消耗的能量显然是小于走路的两倍的。我们观察选项只有 A 是小于 3mile/h 的，所以 A 选项正确。

答：A

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

Questions 40—43 are based on the following data.

VARIATION IN THE AMOUNT OF CAFFEINE IN COMMON BEVERAGES AND DRUGS*

Amount of Caffeine (milligrams)		0	25	50	75	100	125	150	175	200
Coffee	Decaffeinated coffee	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Percolated coffee	0	0	50	100	150	175	0	0	0
	Drip-brewed coffee	0	0	75	125	175	200	0	0	0
	Instant coffee	0	0	25	75	125	0	0	0	0
Other beverages	Brewed tea	0	0	25	75	100	0	0	0	0
	Instant tea	0	0	25	50	0	0	0	0	0
	Cocoa	0	25	50	0	0	0	0	0	0
	Caffeinated soft drinks	0	0	25	75	100	0	0	0	0
Drugs	Weight-loss drygs, diuretics, and stimulants	0	0	0	0	100	150	200	0	0
	Pain relievers	0	0	25	75	100	0	0	0	0
	Cold/allergy remedies	0	25	50	0	0	0	0	0	0

Source: Food and Drug Administration

*Based on 5-ounce cups of coffee,tea,and coca;12-ounce cups of soft drinks; and single doses of drugs.

40. The least amount of caffeine in a 5-ounce cup of drip-brewed coffee exceeds the greatest amount of caffeine in a 5-ounce cup of cocoa by approximately how many milligrams?
- A. 160
B. 80
C. 60
D. 40
E. 20

40. 一杯 5 盎司 drip-brewed coffee 包含的咖啡因的最少量比一杯 5 盎司 cocoa 包含的咖啡因的最多量大约多出多少毫克?

解: 从图中我们可以看出一杯 5 盎司 drip-brewed coffee 包含咖啡因的量的范围大概是 60-178 毫克, 所以最少量是 60 毫克; 一杯 5 盎司 cocoa 包含的咖啡因的量的范围是 2-20 毫克, 所以最多的量是 20 毫克。综上, 答案为 $60 - 20 = 40$ 毫克。

答: D

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

41. For how many of the 11 categories of beverages and drugs listed in the graph can the amount of caffeine in the given serving size be less than 50 milligrams?

41. 图中给出了 11 种饮料和药品, 这其中有多少种包含的咖啡因的量可能少于 50 毫克?

解: 注意题目要求的是可能少于 50 毫克, 所以我们需要找出最小值小于 50 的种类; 我们发现只有 drip-brewed coffee 和 Weight-loss drugs, diuretics, and stimulants 这两类的最小值大于 50, 所以满足条件的就有 $11 - 2 = 9$ 种。

答: 9

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

42. Approximately what is the minimum amount of caffeine, in milligrams, consumed per day by a person who daily drinks two 10-ounce mugs of percolated coffee and one 12-ounce cup of a caffeinated soft drink?

- A. 230
- B. 190
- C. 140
- D. 110
- E. 70

43. Which of the following shows the four types of coffee listed in order according to the range of the amounts of caffeine in a 5-ounce cup, from the least range to the greatest range?

- A. Decaffeinated, instant, percolated, drip-brewed
- B. Decaffeinated, instant, drip-brewed, percolated
- C. Instant, decaffeinated, drip-brewed, percolated
- D. Instant, drip-brewed, decaffeinated, percolated
- E. Instant, percolated, drip-brewed, decaffeinated

42. 一个人一天喝两杯 10 盎司的 percolated coffee 和一杯 12 盎司的 caffeinated soft drink, 那么他一天至少摄入多少毫克的咖啡因?

解: 从图中看出一杯 5 盎司的 percolated coffee 至少含有 40 毫克咖啡因, 一杯 12 盎司的 caffeinated soft drink 至少含有 30 毫克的咖啡因, 所以这个人一天至少摄入 $40 \times 2 \times 2 + 30 = 190$ 毫克的咖啡因。

答: B

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

43. 下列选项均给出了四种咖啡, 哪一种是按照 5 盎司一杯所包含咖啡因的量的范围从小到大进行排列的?

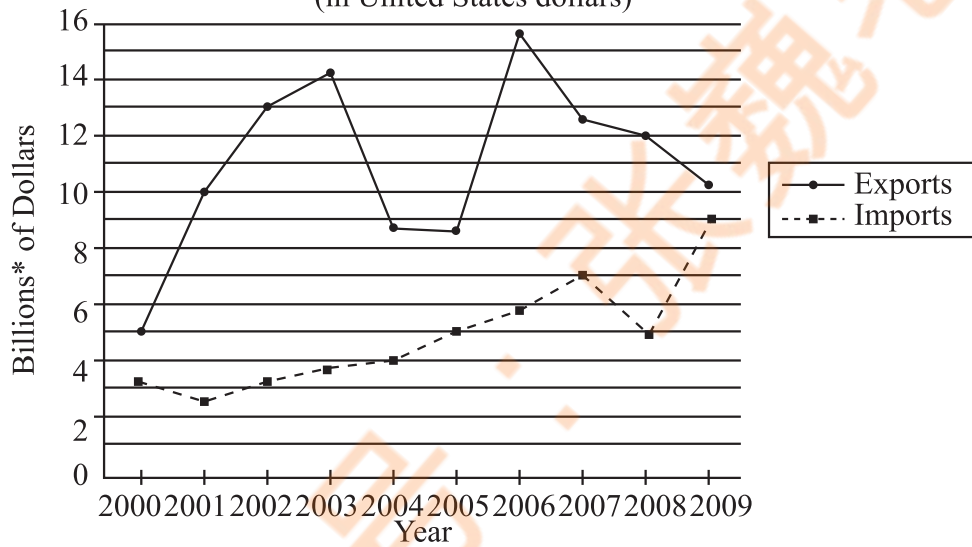
解: 从图中我们可以看出 Decaffeinated 包含咖啡因的量的范围是最小的, 所以排出选项 CDE。percolated 包含咖啡因的量的范围大约是 $170 - 40 = 130$, drip-brewed 包含咖啡因的量的范围大约是 $180 - 60 = 120$, 所以 percolated coffee 更大, 所以 A 选项排除。综上, B 选项正确。

答: B

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

Questions 44—47 are based on the following data.

VALUE OF IMPORTS TO AND EXPORTS FROM COUNTRY T, 2000-2009
(in United States dollars)



*1 billion=1,000,000,000

44. For which of the eight years from 2001 to 2008 did exports exceed imports by more than \$ 5 billion? Indicate all such years.
- A. 2001
 - B. 2002
 - C. 2003
 - D. 2004
 - E. 2005
 - F. 2006
 - G. 2007
 - H. 2008

44. 在 2001 至 2008 这 8 年间，哪些年出口超过进口 50 亿以上？

解：图中实线代表出口值，虚线代表进口值，我们将每一年的数据出口值减进口值，能看出来 2001、2002、2003、2006、2007 和 2008 的出口值比进口值多出 50 亿以上。选出所有正确答案。

答：ABCFGH

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

45. Which of the following is closest to the average (arithmetic mean) of the 9 changes in the value of imports between consecutive years from 2000 to 2009?

- A. \$ 260 million
- B. \$ 320 million
- C. \$ 400 million
- D. \$ 480 million
- E. \$ 640 million

46. In 2008 the value of exports was approximately what percent greater than the value of imports?

- A. 40%
- B. 60%
- C. 70%
- D. 120%
- E. 140%

45. 以下选项中, 哪个最接近 9 个变化的平均值? 9 个变化指的是在 2000 到 2009 年间, 共 9 个连续两年间进口值的变化。

解: 9 分变化求和实际上就是将 2009 年的进口值 9 减去 2000 年的进口值 3.2, 再除以 9 得到平均值为 0.64billion, 即 640million。

答: E

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

46. 2008 年, 出口值大约比进口值高出多少?

解: 2008 年出口值大约为 120 亿, 进口值为 50 亿, 所以大约高出 $\frac{120-50}{50} = \frac{7}{5} = 140\%$ 。

答: E

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

47. If it were discovered that the value of imports shown for 2007 was incorrect and should have been \$5 billion instead, then the average (arithmetic mean) value of imports per year for the 10 years shown would have been approximately how much less?
- A. \$200 million
 B. \$50 million
 C. \$20 million
 D. \$7 million
 E. \$5 million

47. 我们发现 2007 年的进口值记录错误, 正确的值应该为 50 亿, 那么这 10 年进口值的平均数少算了多少?

解: 10 年间只有 2007 年这一年记录错误, 所以进口值的总和少计算了 $7\text{billion} - 5\text{billion} = 20$ 亿, 平均值也就少计算了 2 亿。

答: A
 [出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

Question 48 is based on the following data.

Y	Frequency
$\frac{1}{2}$	2
$\frac{3}{4}$	7
$\frac{5}{4}$	8
$\frac{3}{2}$	8
$\frac{7}{4}$	9

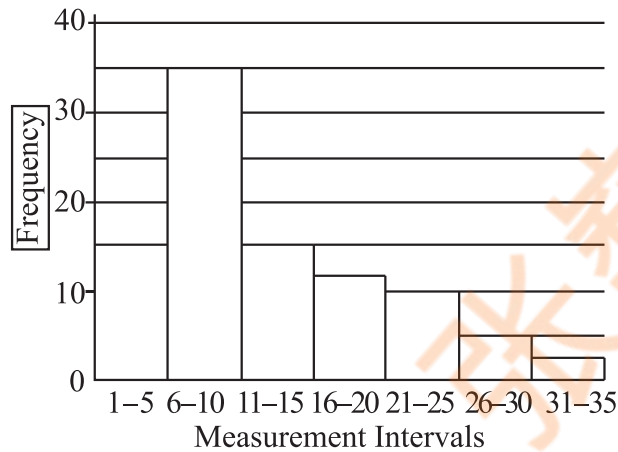
48. The table above shows the frequency distribution of the values of a variable Y. What is the mean of the distribution?
 Give your answer to the nearest 0.01.

48. 上表给出了变量 Y 的频率分布。那么该分布的平均值是多少? 答案请精确到百分位。

解: $\bar{Y} = \frac{\frac{1}{2} \times 2 + \frac{3}{4} \times 7 + \frac{5}{4} \times 8 + \frac{3}{2} \times 8 + \frac{7}{4} \times 9}{2 + 7 + 8 + 8 + 9}$
 $= \frac{44}{34} \approx 1.29$ 。

答: 1.29
 [出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

Question 49 is based on the following data.



49. In the course of an experiment, 95 measurements were recorded, and all of the measurements were integers. The 95 measurements were then grouped into 7 measurement intervals. The graph above shows the frequency distribution of the 95 measurements by measurement interval.

Quantity A: The average (arithmetic mean) of the 95 measurements

Quantity B: The median of the 95 measurements

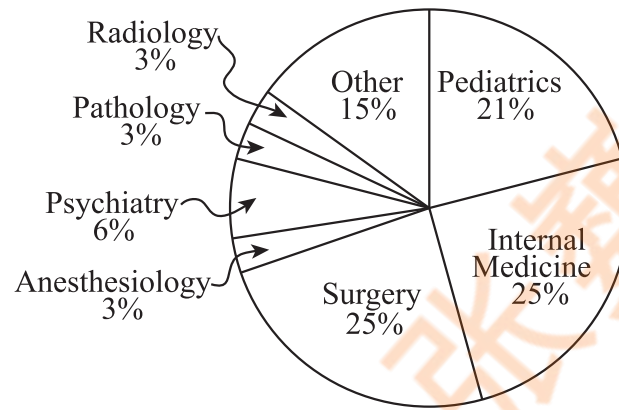
- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.

49. 在一项实验中记录了 95 个数据，且所有的数据都是整数。这 95 个数据被分成 7 组。这下图给出了分组后得到的这 95 个数据的频率分布。A: 95 个数据的平均值，B: 95 个数据的中位数。

解：这个题要用到极限思维。当每一个间隔里面都取最小数字的时候，所有数据的算术平均值 $= (1 \times 15 + 6 \times 35 + 11 \times 15 + 16 \times 12 + 21 \times 10 + 26 \times 5 + 31 \times 2) / 95 \approx 10.35$ 。但是这些数据的中位数是第 48 个，这个数字一定在 6-10 这个区间内，6-10 区间内最大值 10 都小于 10.35，所以这里的算术平均值一定是大于中位数，即 $A > B$ 。

答：A

Question 50 is based on the following data.



50. The circle graph above shows the distribution of 200,000 physicians by specialty. Which of the following sectors of the circle graph represent more than 40,000 physicians?

Indicate all such sectors.

- A. Pediatrics
- B. Internal Medicine
- C. Surgery
- D. Anesthesiology
- E. Psychiatry

50. 饼图给出了 200,000 位医生的专长的分布。那么饼图中的扇形哪些代表了超过 40,000 位医生? 请选择所有正确答案。

解: $\frac{40000}{200000} = \frac{1}{5} = 20\%$, 即超过 40000

位医生的扇形所占比例超过 20%, 从饼图中我们看出 Pediatrics、Internal Medicine、Surgery 三种所占比例超过了 20%。

答: ABC

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

Question 51 is based on the following data.

51. Based on the information given, which of the following statements must be true?

Indicate all such statements.

ANNUAL PERCENT CHANGE IN DOLLAR AMOUNT OF SALES AT FIVE RETAIL STORES FROM 2006 TO 2008

Store	Percent Change from 2006 to 2007	Percent Change from 2007 to 2008
P	10	-10
Q	-20	9
R	5	12
S	-7	-15
T	17	-8

- A. For 2008 the dollar amount of sales at Store R was greater than that at each of the other four stores.
- B. The dollar amount of sales at Store S for 2008 was 22 percent less than that for 2006.
- C. The dollar amount of sales at Store R for 2008 was more than 17 percent greater than that for 2006

51. 根据下表给出的信息，下列选项中哪个是正确的？请选择所有正确的答案。

- A. 2008 年商店 R 的销售额比其他商店都高。
- B. 2008 年商店 S 的销售额比 2006 年少 22%。
- C. 2008 年商店 R 的销售额比 2006 年高出的百分比大于 17%。

解：因为没有告诉我们各个商店的销售额的基数，所以仅仅从百分比无法得出绝对数量的大小，A 选项错误。S 商店从 2006 到 2007 年减少了 7%，所以 2007 年的基数变小了，所以尽管 2007 年到 2008 年减少了 15%，但是因为 2007 年基数小于 2006 年，所以 2006 到 2008 年减少的百分比是小于 22% 的，即 B 选项错误。我们也可以用计算的方法给出解释。设 2006 年商店 S 的销售额为 x ，那么 2007 年的销售额为 $0.93x$ ，2008 年的销售额为 $0.93x \cdot (1 - 15\%) = 0.7905x$ ，即大约减少了 21%。

C 选项与 B 选项道理接近，2006 到 2007 年 R 商店销售额上涨 5%，所以 2007 年基数增加了，所以尽管 2007 到 2008 年上涨 12%，但是 2006 到 2008 年上涨的百分比是大于 17% 的。读者也可以自行用 B 选项给出的计算方法进行计算。C 选项正确。

答：C

Question 52 is based on the following data.

RESULTS OF A USED-CAR AUCTION

Number of cars offered	32	23
Number of cars sold	16	20
Projected sales total for cars offered (in thousands)	\$ 70	\$ 150
Actual sales total(in thousands)	\$ 41	\$ 120

52. For the large cars sold at an auction that is summarized in the table above, what was the average sale price per car?

52. 对于上表中给出的在拍卖中卖出的大车，平均每辆车售价是多少？

解：注意表格只有第二和第四行是有用信息，平均售价为 $120000/20=6000$ 。

答：6000

4.2 描述数据的数值方法 (Numerical Methods for Describing Data)

数据可以通过各种统计数据或统计学方法进行数字描述。这些统计数据通常分为三类：数据的集中趋势，每个具体数据在该组数据中的位置和整体数据的分布情况。

1. 集中趋势 (Central Tendency)

我们首先将收集到的数据呈现在数轴上，从中选出(或计算出)一些重要的值，这些值对于收集到的数据来说具有一定的代表性。通常在—组数据中有三个常见的数据集中趋势的度量：(i)算术平均值(arithmetic)——通常称为平均值(average)或简称为均值(mean)，(ii)中位数(median)，(iii)众数(mode)。

为了计算 n 个数的平均值，我们先计算 n 个数的和然后再用和除以 n 。

例 4.2.1 包含 5 个数的一组数据：

$$6, 4, 7, 10, 4$$

$$\text{这组数据的平均数是 } \frac{6+4+7+10+4}{5} = \frac{31}{5} = 6.2$$

当—组数据中有几个值重复的出现时，我们很容易想到这组数据的平均数便是那几个不同的值的加权平均数(weighted mean)。

例 4.2.2 下面给出一组有 16 个数字的数据：

$$2, 4, 4, 5, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 9$$

在这组数据中只有 6 个不同的值：2, 4, 5, 7, 8, 9。那么这组数据的平均数可以这么计算：

$$\frac{1 \times 2 + 2 \times 4 + 1 \times 5 + 6 \times 7 + 2 \times 8 + 4 \times 9}{1 + 2 + 1 + 6 + 2 + 4} = \frac{109}{16} = 6.8125$$

某一个值在数据中出现的次数，或者说这个值的频率，叫作这个值的权值 (weight)。所以上面那 16 个数字的平均数就是 2, 4, 5, 7, 8, 9 的加权平均数，他们的权值分别为 1, 2, 1, 6, 2, 4。注意：权值的总和一定是这组数据中数字的总数，例如上例中就是 16。

平均值很容易受到一些极值(比其他值大很多或小很多)的影响，因为这些值将直接影响到一组数据的总和，进而影响平均值。相反，中位数(median)通常不会被这些极值影响。

在我们需要去计算 n 个数字的中位数时，首先我们要将数字从小到大进行排序得到一个有序数列。如果 n 是奇数，那么这组数据的中位数就是有序数列最中间的那个数。如果 n 是偶数，那么这个有序数列最中间便有两个数。中位数就是这两个数的平均数

例 4.2.3 我们把例 4.2.1 给出的 5 个数从小到大进行排列，得到有序数列：4, 4, 6, 7, 10，所以这组数据的中位数是 6。需要注意的是，如果我们用 24 代替原来数据中的 10，那么平均数将从 6.2 增加到

$$\frac{4+4+6+7+24}{5} = \frac{45}{5} = 9$$

但是中位数不变，还是 6。从这个例子我们可以看出，相对来说中位数不会受到极值的影响。

中位数能够把一组数据分成两个大致相同的部分。然而，如果中位数与这组数据中某一个值相等而且这个值在这组数据多次重复，中位数划分的这两个部分就出现不同。例如例 4.2.2，这组数据的中位数是 7，但是数据中有 4 个值小于 7，6 个值大于 7。

一组数据的众数是指在这组数据中出现次数最多的那个数。

例 4.2.4 给出一组数据：

$$1, 3, 6, 4, 3, 5$$

这组数据的众数是 3。有时一组数据的众数可能不止一个。比如：

$$1, 2, 3, 3, 3, 5, 7, 10, 10, 10, 20$$

这组数据有两个众数：3 和 10。

某个数据在整体数据中的位置：一组从小到大排列好的数据有三个最基本的位置：第一个数，最后一个数和中间的那个数。这里我们可以用 L 指代最小的数，G 指代最大的数，M 指代中位数。除此之外，一组数据中最常见的位置是四分位数和百分位数。中位数 M、四分位数和百分位数可以将一组从小到大排列好的数据分成若干个大致的部分。一组数据中有三个四分位数把这组数据分为 4 个部分，有 99 个百分位

数把这组数据分成 100 个大致相同的部分。和平均数、中位数一样，四分位数和百分位数也可能不是该组数据中出现的值。

我们把三个四分位数从小到大分别记为：第一个四分位数 Q_1 ，第二个四分位数 Q_2 （也就是中位数 M ），第三个四分位数 Q_3 。这三个数把一组数据分为四个部分：第一部分由从 L 到 Q_1 之间的数据组成，第二部分由 Q_1 到 M 之间的数据组成，第三部分由 M 到 Q_3 之间的数据组成，第四部分由 Q_3 到 G 之间的数据组成。因为一组数据中数据个数不一定能够 4 整除，所以在不同情况下，我们对于 Q_1 和 Q_3 的计算有着不同的规则（但是无论什么情况下， $Q_2=M$ 是一定的）。我们在这里描述一下最常见的规则： $Q_2=M$ 将这组数据分成两个相同的部分——较小的数和较大的数——之后， Q_1 就是那组较小的数的中位数， Q_3 就是那组较大的数的中位数。

例 4.2.5 我们给出一组数据（包括 16 个数据）：

2, 4, 4, 5, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 9, 9, 9, 9

首先我们把这组数据分成两组数据，每组有 8 个数据。第一组是 2, 4, 4, 5, 7, 7, 7, 7，第二组是 7, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 9。所以第二个四分位数，也就是中位数是 $Q_2=M=7$ 。为了计算剩下两个四分位数，我们先看较小的那组数据并找出它的中位数：第一个中位数 $Q_1=6$ （5 和 7 的平均数）。我们再看较大的那组数据并找出它的中位数：第三个中位数 $Q_3=8.5$ （8 和 9 的中位数）。

在例 4.2.5 中，我们将数据从小到大排列之后发现 4 排在有序数组的前 25%。我们用一种不同的方式来描述这种情况：我们可以说 4 比第一个四分位数小，即小于（below Q_1 ）。我们还可以说 4 在第一个四分位数里（in the first quartile）。短语“在某个四分位数里（in a quartile）”适用于三个四分位数。

百分位数适用于数量比较多的一组数据中。99 个百分位数 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{99}$ 把一组数据分成了 100 组，其中 $Q_1=P_{25}$ ， $M=Q_2=P_{50}$ ，and $Q_3=P_{75}$ 。因为一组数据的数量不一定能被 100 整除，所以在计算百分位数是我们也经常采用不同的方法。

2. 整体数据的分布情况 (Measures of Dispersion)

散布程度的测定能够体现数据的分散程度。最常见的作为分散度测量的统计量有极差(range)、四分位数距(interquartile range)和标准差(standard deviation)。

一组数据的极差指的是这组数据最大值与最小值之间的差值，即 $G-L$ 。举个例子，给出一组数据 11, 20, 5, 13, 21，这组数据的极差是 $21-5=16$ 。

极差的计算是十分简单而且有效的，它能够反映一组数据最大的偏差。然而，有时一组数据中会存在过大或者过小的值，当我们在分析这一组数据时会对这些过大或过小的值持怀疑态度——因为这些值本质上可能是错误的或者是偶然出现的。这些值通常被称为异常值(outlier)，因为在大多数情况下，这些值是不可能出现的。所以当我们分析数据时，会忽略这些异常值。然而，极差会很大程度上受到异常值的影响。

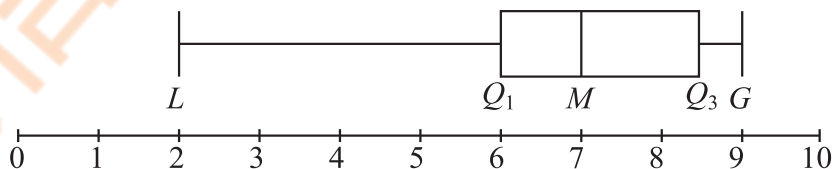
对于一组数据散布程度的测定，四分位距是不会受到异常值的影响的。四分位距的定义是第一个四分位数和第三个四分位数之间的差值，即 $Q_3 - Q_1$ 。因此，四分位距测量的是一组数据中间那一半(Q_1 到 Q_3 之间的数据)的散布程度。

例 4.2.6 给出一组数据：

2, 4, 4, 5, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 9

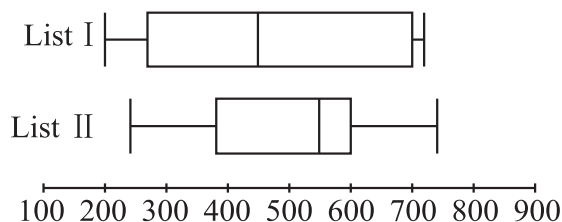
这组数据中共 16 个数据。极差是 $9 - 2 = 7$ ，第一个四分位数 $Q_1 = 6$ ，第三个四分位数 $Q_3 = 8.5$ 。所以这组数据的四分位距是 $8.5 - 6 = 2.5$ 。

通过之前的讲解，我们发现我们可以使用 L, Q_1, Q_2, Q_3, G 这五个数字来概括一组数据并描述其集中和分散程度。我们可以把这五个数字画在数轴上，这样能够更方便地看出四个四分位组所在的位置。这样的图叫箱图(boxplot)或者箱线图(box-and-whisker plots)，“箱”用来展现中间两个四分位组中的数据，“线”从“箱”延伸出来分别到最大值和最小值。下面这幅图展现了例 4.2.6 中数据的箱线图。



绘制箱线图可能会有不同的方式，不同的方式区别在于“箱”的末尾的位置可能有所不同而且一些箱线图可能会标注出异常值的位置。但是所有的箱线图都在中位数处体现了数据的中心并且展现了每个四分位组中数据的分散程度。综上，箱线图可以帮助我们比较多组数据。

例 4.2.7 下面给出了两组数据 list I 和 list II 的箱线图



根据上面的箱线图，我们可以对两组数据进行比较。首先，第二组数据的中位数大约是 550，比第一组中位数(大约是 450)要大。其次，第一组数据的极差

和四分位距都比第二组数据的大。第一组数据的极差和四分位距大约分别是 520 和 430，而第二组数据的极差和四分位距大约分别是 500 和 220。

与极差和四分位距有所不同，标准差(standard deviation)与一组数据中每个数据都有联系。标准差所能体现的是每个数据与平均值的差有多大，并且对这些差值取一个平均(并不是简单的计算差值的算术平均值)。所以，这些数据偏离平均值越远，标准差就越大。相反，这些数据越集中在平均值附近，标准差就越小。

一组数据(假设有 n 个数据)的标准差的计算需要五步：(1)计算 n 个值的平均值；(2)计算每个数据与平均值的差；(3)计算每个差值的平方；(4)计算差值的平方的平均值；(5)计算(4)中得到的平均值的算术平方根。得到的算术平方根就是这组数据的标准差。

例 4.2.8 给出一组数据：

$$0, 7, 8, 10, 10$$

我们按照上述步骤计算该组数据的标准差：这组数据的平均值是 7，差的平方分别是

$$(7-0)^2, (7-7)^2, (7-8)^2, (7-10)^2, (7-10)^2$$

即 49, 0, 1, 9, 9，差的平方的平均值是 $\frac{68}{5}$ 即 13.6，13.6 的算术平方根大约是 3.7。

对使用的专业术语我们需要注意：我们上面提到的标准差与样本标准差(sample standard deviation)是有所区别的。后者被样本“sample”这个词所限制，在计算过程中体现第(4)步中，计算平均值时将除以 $(n-1)$ 而不是 n 。样本标准差虽然与标准差差别不大，但是在工业中需要处理大量数据时，更推荐使用样本标准差。有时候我们把标准差称为总体标准差(population standard deviation)，以避免混淆。

例 4.2.9 面试官对六百位邮局工作的申请者打分，打分范围为 1—50 分。打分结果是，六百位申请者得分的平均值是 32.5 分，标准差是 7.1 分。问题是：48 分比平均值高出(或低)几个标准差？30 分呢？20 分呢？

解：先计算高出平均值一倍标准差的分值是

$$32.5 + 7.1 = 39.6$$

高出平均值两倍标准差的分值是

$$32.5 + 2 \cdot 7.1 = 46.7$$

所以 48 分比高出平均值两倍标准差的分值略高。准确地说, 48 分比平均值高出 15.5 分, 48 比平均值高出的标准差倍数是 $\frac{15.5}{7.1} \approx 2.2$ 。因此, 为了回答这个问题, 我们首先找出给出的分值与平均值的差, 然后用差值除以标准差。那么第二个问题的答案就是:

$$\frac{30-32.5}{7.1} = \frac{-2.5}{7.1} \approx -0.4$$

这个负号意味着 30 分要比平均值低 0.4 倍的标准差。

那么显然, 第三个问题的答案就是

$$\frac{20-32.5}{7.1} = \frac{-12.5}{7.1} \approx -1.8$$

这个负号也说明了 20 分比平均值要低大约 1.8 倍的标准差。

我们总结一下: 48 分比平均值高 15.5 分, 即比平均值大约高出 2.2 倍的标准差。30 分比平均值低 2.5 分, 即比平均值大约低了 0.4 倍的标准差。20 分比平均值低 12.5 分, 即比平均值大约低了 1.8 倍的标准差。

还有一个比较重要的情况: 32.5 分与平均值完全相同, 即与平均值相差 0 个标准差。

例 4.2.9 说明了, 对于一组数据, 每个值都可以利用标准差进行定位。接下来我们引入标准化的该概念: 一组数据中的每个值都减去平均值, 得到的差值除以标准差, 我们把这一过程称为标准化。

我们能看到, 在上述例子中我们得到了三个标准化之后的值 2.2, -0.4 和 -1.8。这三个值都在 -3 到 3 之间, 这就是说这三个标准化的值对应的分数 48, 30 和 20 偏离平均值不超过 3 倍的标准差。这并不奇怪, 下面的定理就说明这一事实。

在任何一组数据中, 大多数的数据偏离平均值不超过 3 倍的标准差。因此, 当我们将任意一组数据进行标准化并把标准化之后的值画在数轴上, 我们会发现数据会集中在 0 附近, 延伸至 -3 和 3。所以平均值经常会变为 0。

综合训练

1. The first term in a certain sequence is 1, the 2nd term in the sequence is 2, and, for all integers $n \geq 3$, the n th term in the sequence is the average (arithmetic mean) of the first $n-1$ terms in the sequence. What is the value of the 6th term in the sequence?

Give your answer as a fraction.

1. 在一序列内，第一项是 1，第二项是 2。对于大于等于 3 的所有整数 n ，这一序列内第 n 项是前 $n-1$ 项的算术平均值。那么第六项是多少？请以分数形式给出你的答案。

解：第三项等于 $\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$ ；第四项等于

$$\frac{1+2+\frac{3}{2}}{3} = \frac{3}{2}；第五项等于$$

$$\frac{1+2+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}{4} = \frac{3}{2}；第六项等于$$

$$\frac{1+2+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}{5} = \frac{3}{2}。$$

答： $\frac{3}{2}$

[出处]《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

2. x is an integer and $23 < x < 27$.

Quantity A: The median of the five integers 23, 24, 26, 27, and x .

Quantity B: 25

A. Quantity A is greater.

B. Quantity B is greater.

C. The two quantities are equal.

D. The relationship cannot be determined from the information given.

2. x 是一个整数，且 $23 < x < 27$ 。A: 五个整数 23, 24, 26, 27 和 x 的中位数；B: 25。

解：因为 $23 < x < 27$ ，且 x 是整数，所以 $x=24, 25, 26$ 。

当 $x=24$ 时，五个整数从小到大排列为 23, 24, 24, 26, 27，所以中位数为 24， $A < B$ ；

当 $x=25$ 时，五个整数从小到大排列为 23, 24, 25, 26, 27，所以中位数为 25， $A = B$ ；

当 $x=26$ 时，五个整数从小到大排列为 23, 24, 26, 26, 27，所以中

位数为 26, $A > B$;

综上, A 和 B 的大小关系不确定。

答: D

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

3. The table below shows the frequency distribution of the values of a variable Y. What is the mean of the distribution?

Give your answer to the nearest 0.01.

Y	Frequency
$\frac{1}{2}$	2
$\frac{3}{4}$	7
$\frac{5}{4}$	8
$\frac{3}{2}$	8
$\frac{7}{4}$	9

3. 下表给出了变量 Y 的概率分布, 那么该分布的平均值是多少? 请将你的答案精确到百分位。

解: 平均值 = $(\frac{1}{2} \times 2 + \frac{3}{4} \times 7 + \frac{5}{4} \times 8 + \frac{3}{2} \times 8 + \frac{7}{4} \times 9) / (2 + 7 + 8 + 8 + 9) = \frac{44}{34} \approx 1.29$ 。

答: 1.29

Question 4 is based on the following data.

DISTRIBUTION OF THE HEIGHTS OF 80 STUDENTS

Height (centimeters)	Number of Students
140-144	6
145-149	26
150-154	32
155-159	12
160-164	4
Total	80

4. The table above shows the frequency distribution of the heights of 80 students. What is the least possible range of the heights of the 80 students?

- A. 15
- B. 16
- C. 20
- D. 24
- E. 28

5. For a certain distribution, the measurement 12.1 is 1.5 standard deviations below the mean, and the measurement 17.5 is 3.0 standard deviations above the mean. What is the mean of the distribution?

- A. 13.8
- B. 13.9
- C. 14.0
- D. 14.1
- E. 14.2

4. 上表给出了 80 位学生的身高分布, 那么这 80 位学生可能的最小的极差是多少?

解: 从上表我们能看出 80 位学生中最高身高可能的最小值是 160, 最矮身高的最大值是 144, 所以最小的极差是 $160 - 144 = 16$ 。

答: B

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

5. 在某一分布中, 测量值 12.1 比平均值低 1.5 倍的标准差, 测量值 17.5 比平均值高 3 倍标准差。那么该分布的平均值是多少?

解: 设该分布的平均值为 x , 标准差为 y , 可以列出方程组:

$$\begin{cases} 12.1 = x - 1.5y \\ 17.5 = x + 3y \end{cases}$$

解得: $x = 13.9$ 。

答: 13.9

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

6. Each of the following linear equations defines y as a function of x for all integers x from 1 to 100. For which of the following equations is the standard deviation of the y -values corresponding to all the x -values the greatest?

- A. $y=x/3$
- B. $y=x/2+40$
- C. $y=x$
- D. $y=2x+50$
- E. $y=3x-20$

7. Quantity A: The sum of the first 7 positive integers

Quantity B: 7 times the median of the first 7 positive integers

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.

6. 下列选项给出了关于 x 的线性等式 y ，定义域为 1 到 100 的整数。在下列线性等式中，哪一项中 y 的标准差最大？

解：一个连续的数列，所有的数加上 a ，标准差不变，所有数乘 a ，那么标准差也乘 a 。所以本题就等价于看系数， x 的系数越大， y 的标准差就越大。在五个选项中，E 选项的标准差最大。

答：E

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

7. A: 前 7 个正整数之和；B: 前 7 个正整数的中位数的 7 倍。

解：前 7 个正整数是 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7，所以 $A=1+2+3+4+5+6+7=28$ ；中位数是 4，所以 $B=4\times 7=28$ 。即 $A=B$ 。

答：C

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

Questions 8 is based on the following data.

AGE DISTRIBUTION OF EMPLOYEES OF A BUSINESS

Age Interval	Number of Employees
15-24	17
25-34	25
35-44	26
45-54	21
55-64	18
Toal	106

8. Quantity A: The range of the ages of the 20 oldest employees of the business

Quantity B: 11 years

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.

8. A: 该公司中年龄最大的 20 位职工的年龄的极差

B: 11。

解: 从表中可以看出年龄在 55-64 岁之间的职工有 18 位, 那么该公司最老的 20 位员工还有两名的年龄落在 45-54 这一区间内。我们假设 55-64 岁之间的职工年龄最大的就是 64 岁。如果 45-54 这一年龄段之间 21 名员工有 19 名是 45 岁, 2 名年龄为 46 岁, 那么该公司中年龄最大的 20 位职工的年龄的极差就是 $64 - 45 = 19$; 如果 45-54 这一年龄段的年龄全是 54 岁, 那么极差就是 $64 - 54 = 10 < 11$; 所以 A 和 B 的大小关系不确定。

答: D

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

9. For a sample of 210 households, one-third of the households do not have any pets, one-third of the households each have 1 pet, and the rest of the households each have 2 pets. Which of the following statistics for the sample are equal to 1?

Indicate all such statistics.

- A. The average (arithmetic mean) number of pets per household.
 B. The median number of pets per household.
 C. The range of the numbers of pets per household.

10. A historian asserts that at the beginning of 1852, the population of a certain mining town was 16,000. The historian also asserts that for each of the years from 1849 through 1853, the town's population at the beginning of the year was twice that of the preceding year. According to the historian, what was the range of the town's populations at the beginning of each year from 1848 through 1853?

- A. 14,000 B. 15,000
 C. 28,000 D. 30,000
 E. 31,000

9. 在 210 家住户里，有三分之一没有养任何宠物，三分之一养了一只宠物，剩下的都养了两只宠物。下列数据中哪些等于 1？请选出所有正确答案。

- A. 每家住户养宠物数量的平均数
 B. 每家住户养宠物数量的中位数
 C. 每家住户养宠物数量的极差

解： $210 \times 1/3 = 70$ ，即 70 家没宠物，70 家有一只宠物，70 家有两只宠物，那么每家住户养宠物数量的平均数为 $(70 + 70 \times 2) / 210 = 1$ 。即选项 A 正确。

从上述分析中，容易知道每家住户养宠物数量的中位数为 1，即选项 B 正确。每家住户养宠物数量的极差应该为 $2 - 0 = 2$ ，即选项 C 不正确。

答：AB

10. 一位历史学家断言，在 1852 年开始时，一个矿业城镇总人口为 16,000。这位历史学家还说，在 1849 至 1853 年期间，每一年伊始该城镇的人口数量都是前一年的两倍，根据这些推论，1848 至 1853 年间该城镇人口的极差为多少？

解：我们假设 1848 年伊始该城镇人口为 x ，那么 1852 年伊始该城镇人口数量为 $2^4 \cdot x = 16000$ ，那么 $x = 1,000$ 。所以从 1848 年到 1853 年的人口数量分别为 1,000, 2,000, 4,000, 8,000, 16,000, 32,000。所以极差为 $32,000 - 1,000 = 31,000$ 。

答：E

Question 11 is based on the following data.

Length of Employment	Number of Employees	Hourly Wage
Less than 1 year	30	\$ 10
From 1 to 5 years	10	\$ 18
From 6 to 10 years	20	\$ 25
From 11 to 20 years	28	\$ 30
More than 20 years	12	\$ 40

11. According to the table, what is the average (arithmetic mean) hourly wage of the employees at Company C?

- A. \$ 12 B. \$ 17 C. \$ 23
D. \$ 25 E. \$ 30

11. 根据上表，公司 C 的员工的平均时薪是多少？

解：根据不同工龄的人数进行加权平均，可以计算得到：

$$\frac{30 \times 10 + 10 \times 18 + 20 \times 25 + 28 \times 30 + 12 \times 40}{30 + 10 + 20 + 28 + 12} = 23$$

答：C

12. The average (arithmetic mean) of the two numbers $3x$ and $3y$ is 48.

Quantity A: The average of the two numbers $2x$ and $2y$.

Quantity B: 30

- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.

12. $3x$ 和 $3y$ 的平均数是 48。A: $2x$ 和 $2y$ 的平均数，B: 30。

解： $3x$ 和 $3y$ 的平均数为 $\frac{3x+3y}{2} = 48$,

所以 $x+y=32$ 。那么 $2x$ 和 $2y$ 的平

均数为 $\frac{2x+2y}{2} = x+y=32 > 30$ 。

答：A

13. A research report states that the average (arithmetic mean) of 120 measurements was 72.5, the greatest of the 120 measurements was 92.8, and the range of the 120 measurements was 51.6.

The information given above is sufficient to determine the value of which of the following statistics?

Indicate all such statistics.

- A. The least of the 120 measurements
- B. The median of the 120 measurements
- C. The standard deviation of the 120 measurements
- D. The sum of the 120 measurements

14. A certain class of 90 students took a typing proficiency test. The average (arithmetic mean) score of the students who passed the test was 84, and the average score of the students who failed the test was 60. If the average score of all students was 80, how many students passed the test?

- A. 15 B. 20 C. 42
- D. 70 E. 75

13. 一项调查结果表明 120 个测量值的平均值为 72.5, 最大值为 92.8, 极差为 51.6。从这些结果我们能得到以下那些数据? 请选择所有正确的选项。

- A. 120 个调查结果的最小值
- B. 120 个调查结果的中位数
- C. 120 个调查结果的标准差
- D. 120 个调查结果的和

解: 由 120 个样本数据的平均值为 72.5 可知, 120 个样本数据的和为 8700, 所以 D 选项可知。已知最大值和极差, 那么最小值 A 可知。B 和 C 选项由题目不足以得出。

答: AD

14. 一个班级 90 名学生参加打字熟练度测试。通过测试的学生的平均分为 84 分, 未能通过测试的学生平均分为 60。如果所有学生的平均分为 80, 那么有多少学生通过了测试?

解: 设有 x 名学生通过测试, 那么未通过测试的就有 $(90-x)$ 名学生。

因为这 90 人的平均分为 80, 那么可以列出方程:

$$\frac{84x + 60(90 - x)}{90} = 80$$

解得: $x = 75$, 即通过考试的有 75 人。

答: E

Question 15 is based on the following data.

Data Set X	Data Set Y
x_1	$5x_1 + 16$
x_2	$5x_2 + 16$
x_3	$5x_3 + 16$
x_4	$5x_4 + 16$

15. Data sets X and Y each consist of 4 values, as shown in the table. If the range of data set X is 21, what is the range of data set Y ?
- A. 0
B. 37
C. 84
D. 100
E. 105

15. 如上表所示, 数列 X 和 Y 都含有四个值。如果数据组 X 的极差是 21, 那么数列 Y 的极差是多少?

解: 不妨假设数列 X 的最大值和最小值是分别为 x_1 和 x_2 , 则数列 X 的极差可以表示成 $x_2 - x_1 = 21$ 。因为数列 Y 的每个元素是在数列 X 每个元素的基础上乘 5 再加上 16 所得, 所以最小和最大的元素分别是 $5x_1 + 16$ 和 $5x_2 + 16$, 数列 Y 的极差为 $(5x_2 + 16) - (5x_1 + 16) = 5(x_2 - x_1) = 105$ 。

答: E

16. The average (arithmetic mean) of m and n is 1 more than k .
Quantity A: $m + n$
Quantity B: $2k + 1$
- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.

16. 已知 m 和 n 的平均值比 k 大 1。 $A = m + n$, $B = 2k + 1$ 。

解: 我们根据题目已知条件列出关系式 $\frac{m+n}{2} = k + 1$, 即 $m + n = 2k + 2 > 2k + 1$, 即 A 更大。

答: A

17. From a set of 100 numbers, half were selected to form group I, and 60 percent of the remaining numbers were selected to form group II. The average (arithmetic mean) of the numbers in group I is 24.4, and the average of the numbers in group II is 31.5.

Which of the following is closest to the average of the numbers in groups I and II combined?

- A. 27.1
- B. 27.6
- C. 27.8
- D. 28.0
- E. 28.3

18. In a neighborhood consisting of 2,000 homes, 80 percent of the homes are valued at \$325,000 or less. Which of the following statements about the values of the homes in the neighborhood must be true?

Indicate all such statements.

- A. The average (arithmetic mean) value is at most \$325,000.
- B. The median value is at most \$325,000.
- C. At most 400 homes have values greater than \$325,000.

17. 从一个 100 个数的集合中选出一半来组成组 I, 再从剩下的数里选出 60% 组成数 II。组 I 内的平均值为 24.4, 组 II 内的平均值为 31.5。那么组 I 和组 II 内所有的数的平均值是多少?

解: 第一组有 50 个数, 平均值为 24.4, 第二组有 30 个数, 平均数为 31.5 所以总的平均数为 $\frac{24.4 \times 50 + 31.5 \times 30}{80} \approx 27.1$ 。

答: A

18. 一地区有 2000 栋房子, 其中 80% 价值 325,000 或者更低。下列关于该地区房屋价值的说法中, 哪些是正确的? 请选出所有正确答案。

- A. 房屋价值的平均值最大是 325,000。
- B. 房屋价值的中位数最大为 325,000。
- C. 最多有 400 栋房子的价值超过 325,000。

解: A 选项错误, 因为剩下 20% 的房子价格不知道, 可能是超级豪宅价格很高, 这样平均房价就比 325000 大了。易知, B 选项正确。房子价值超过 325000 的数量 $2000 \times (1 - 80\%) = 400$, 所以 C 选项正确。

答: BC

19. List L consists of the 7 numbers $u, -2u, -3u, -4u, -5u, -6u$, and $-7u$, where $u \neq 0$.

Quantity A: The median of the 7 numbers in list L.

Quantity B: u

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.

20. In a data set of 10,000 numbers varying from 20 to 80, the number 62 is the 60th percentile and the number 74 is the n th percentile.

Quantity A: n

Quantity B: 70

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.

19. 集合 L 内有 7 个数: $u, -2u, -3u, -4u, -5u, -6u, -7u$ 且 $u \neq 0$ 。A: 这 7 个数的中位数, B: u 。

解: 我们首先需要找出中位数。 $u > 0$ 时, 这 7 个数的中位数是 $-4u, -4u < u$ 。
 $u < 0$ 时, 这 7 个数的中位数也是一 $4u, -4u > u$ 。综上 A 和 B 的大小关系不确定。

答: D

20. 一个数据组有 10000 个数, 范围是 20—80, 第 60 个百分位数是 62, 第 n 个百分位数是 74, $A=n, B=70$ 。

解: 题目只说了有 10000 个在 20 到 80 之间的数字, 没有说每个数字的个数, 如果在 62 到 74 之间的数字超过了 1000 个, 那么 $n > 70$ 。如果 62 到 74 之间的数字小于 1000 个, 那么 $n < 70$, 所以无法判断 n 与 70 的大小关系。

答: D

Question 21 is based on the following data.

X	Frequency
0	6
1	11
2	18
3	23
4	15

21. The table shows the frequency distribution of the random variable X . What is the median of the distribution of the values of X ?

- A. 1.0 B. 1.8
C. 2.0 D. 2.5
E. 3.0

22. In a distribution of 8,500 different measurements of the variable x , 26.5 is the 56th percentile and 37.1 is the 78th percentile. Which of the following is closest to the number of measurements of x that are in the distribution such that $26.5 \leq x \leq 37.1$?

- A. 1,850 B. 2,200
C. 3,500 D. 4,750
E. 6,650

23. List L consists of 7 numbers. The range of the numbers in list L is 0.

Quantity A: The average (arithmetic mean) of the numbers in list L .

Quantity B: 0

- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.

21. 上表给出了变量 X 的频率分布, 那么变量 X 的中位数是多少?

解: 总共有 $6 + 11 + 18 + 23 + 15 = 73$ 个数字, 那么中位数应该是第 37 个数字, $X=0, 1, 2$ 时总共有 35 个数, 所以第 37 个数字应该位于 $X=3$ 。

答: E

22. 在变量 x 的分布中, 有 8500 个不同的测量值。26.5 是第 56 个百分位数, 37.1 是第 78 个百分位数。那么在 x 的分布中, 有多少个测量值落在区间 $26.5 \leq x \leq 37.1$ 内? 请选出最接近的答案。

解: 26.5 位于 56% 的位置, 37.1 位于 78% 的位置, 那么 26.5 到 37.1 共有 $(78\% - 56\%) \times 8500 = 1870$ 个数, A 与这个数字最接近。

答: A

23. 集合 L 包含 7 个数, 且这 7 个数的极差为 0。A: 集合 L 内 7 个数的平均数 B: 0

解: 集合 L 内的 7 个数字相等, 但是题目并没有告诉我们这 7 个相等的值是多少, 所以没法判断 A 和 B 的大小关系。

答: D

24. The sum of n numbers is greater than 48. If the average (arithmetic mean) of the n numbers is 1.2, what is the least possible value of n ?
24. n 个数的和大于 48。若这 n 个数的平均值是 1.2, 那么 n 的最小值是多少?
- 解: 已知这 n 个数的平均数为 1.2, 那么他们的总和为 $1.2n$, 而这个总和大于 48, 即 $1.2n > 48$, 所以 $n > 40$ 。因为 n 一定是整数, 那么 n 的最小值为 41。
25. The numbers in data set S have a standard deviation of 5. If a new data set is formed by adding 3 to each number in S, what is the standard deviation of the numbers in the new data set?
25. 集合 S 中的数字标准差为 5。如果一个新的集合是由集合 S 中每个数字加上 3 组成的, 那么新的集合中数字的标准差是多少?
- 解: 一组数据进行加减后标准差不变, 所以每个数字加 3 之后标准差不变还是 5。
- 答: C
- [出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》
- A. 2
B. 3
C. 5
D. 8
E. 15

26. In a quality-control test, 50 boxes — each containing 30 machine parts — were examined for defective parts. The number of defective parts was recorded for each box, and the average (arithmetic mean) of the 50 recorded numbers of defective parts per box was 1.12. Only one error was made in recording the 50 numbers: “1” defective part in a certain box was incorrectly recorded as “10”.
- Quantity A: The actual average number of defective parts per box
Quantity B: 0.94
- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
27. A list of numbers has a mean of 8 and a standard deviation of 2.5. If x is a number in the list that is 2 standard deviations above the mean, what is the value of x ?

26. 在质量检测中，将对 50 个箱子（每个都装 30 个零件）进行检查。每个箱子中有缺陷的零件个数量将会被记录在每个箱子上。50 个箱子中有缺陷零件数量的平均数为 1.12，在记录过程中仅有一个记录错误：有一个箱子上的数字“1”错记成“10”。A：实际上平均每个箱子有缺陷的零件数量的平均数，B：0.94。

解：因为有一箱标记错误，把 1 写成了 10，多出来了 9 个有缺陷的零件。由题意可知 50 箱里有缺陷的产品总数应该是 $50 \times 1.12 - 9 = 47$ ，有缺陷产品的平均数应该是 $47/50 = 0.94$ 。即 $A=B$ 。

答：C

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

27. 一组数平均是为 8，标准差为 2.5。 x 是这组数其中一个，且 x 比平均值高出 2 倍的标准差，那么 x 的值是多少？

解： $x = 8 + 2 \times 2.5 = 8 + 5 = 13$ 。

答：13

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

Question 28 is based on the following data.

Frequency Distribution for List X

Number	1	2	3	5
Frequency	10	20	18	12

Frequency Distribution for List Y

Number	6	7	8	9
Frequency	24	17	10	9

28. List X and list Y each contain 60 numbers. Frequency distributions for each list are given above. The average (arithmetic mean) of the numbers in list X is 2.7, and the average of the numbers in list Y is 7.1. List Z contains 120 numbers: the 60 numbers in list X and the 60 numbers in list Y.

Quantity A: The average of the 120 numbers in list Z

Quantity B: The median of the 120 numbers in list Z

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.

28. X 和 Y 都包含 60 个数，上表给出了它们的频率分布。X 中数的平均值为 2.7，Y 中数的平均值为 7.1。Z 中包含 120 个数，即 X 中的 60 个数和 Y 中的 60 个数。A: Z 中 120 个数的平均数；B: Z 中 120 个数的中位数。

解: Z 中 120 个数的总和为 $2.7 \times 60 + 7.1 \times 60 = 588$ ，那么 Z 中 120 个数的平均数为 $\frac{588}{120} = 4.9$ 。从给出的 X 和 Y 的分布容易看出 Z 中 120 个数的中位数是 $\frac{5+6}{2} = 5.5 > 4.9$ ，即 $A < B$ 。

答: B

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

29. $b-3, b-1, b+2, b+3, b+4$

The median of the five terms listed above is 5, where b is a constant. What is the average (arithmetic mean) of the five terms?

- A. 3
B. 4
C. 5
D. 6
E. 7

- 30.

Textbook	Number of Pages
A	510
B	480
C	490
D	520
E	x

The table shows the number of pages in each of 5 textbooks. What is the greatest possible value of x for which the average (arithmetic mean) number of pages of the 5 textbooks is equal to the median number of pages of the 5 textbooks?

29. $b-3, b-1, b+2, b+3, b+4$ 这五项的中位数是 5, 那么这五项的算术平均值是多少?

解: 这五项的中位数是 $b+2$, 所以 $b+2=5$, 解得 $b=3$; 所以这五项的算术平均值为 $\frac{b-3+b-1+b+2+b+3+b+4}{5} = \frac{5b+5}{5} = b+1=4$ 。

答: B

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

30. 上表给出了 5 本课本的页数。当这 5 本课本页数的平均数等于其中位数时, x 的最大值是多少?

解: 当这五个数的平均数等于中位数时, x 可以取得最大值。把四个数字从小到大排列: 480, 490, 510, 520。若要 x 取得最大值, x 应该大于 520, 即 480, 490, 510, 520, x 。中位数为 510, 当平均数为 510 时, $x=510 \times 5 - (480+490+510+520) = 550$ 。

4.3 统计方法(Counting Method)

在做决定和预测结果时，不确定性不可避免。不确定性可以用概率理论中一些理念和方法解释。因为最基本的概率都涉及到对计数方式的理解，所以在讨论概率之前，我们先系统地复习一下计数方法。

当总数较少时，我们可以采用枚举法(即一个一个地数)。当集合变得很大无法再采取枚举法而且集合中元素是有一定规律时，我们可以使用一些有效的技巧进行计数而不用一一列举。

1. 集合与数组(sets and lists)

我们这里提到的集合通常是指具有某一性质的对象的一个合集，例如所有的正数组成的集合，圆内所有的点组成的集合，学校里学习法语的学生组成的集合。集合中的对象称之为元素(member/element)。有些集合是有限的(finite)，即该集合中的元素可以被列举完。原则上来说，有限集可以列举出所有的元素并用大括号括起来，例如一位偶数集 $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ 。非有限集称为无限(infinite)集，例如整数集。不包含任何元素的集合叫作空集(empty set)，我们用符号 \emptyset 表示。包含一个或多个元素的集合叫非空集(nonempty)。如果集合 A 中所有的元素都是集合 B 中的元素，那么集合 A 就是集合 B 的子集(subset)。比如， $\{2, 8\}$ 是 $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ 的子集。 \emptyset 是所有集合的子集。

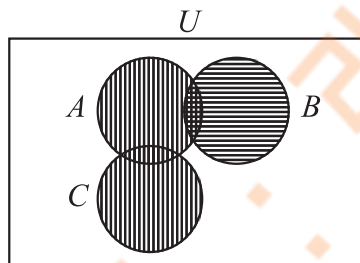
数组(lists)与一个有限集类似，其中的元素可以被列举完，但有两个不同。在数组中，元素是按一定顺序排列的，将一个数组中的元素重新排列就构成一个新的数组。所以在数组中，像“第一个元素”、“第二个元素”这样的短语是成立且有意义的。而且，在数组中元素可以重复出现而且重复出现是有意义的。比如数组 1, 2, 3, 2 和数组 1, 2, 2, 3 是完全不同的数组，每个数组都包含四个元素，而且他们都和数组 1, 2, 3 不同，这个数组包含 3 个元素。

与数组相反，集合里元素重复出现时是不另算做一个新元素的，而且元素的顺序也没有意义。比如，集合 $\{1, 2, 3, 2\}$ 和集合 $\{3, 1, 2\}$ 是同一个集合，都是包含 3 个元素的集合。对于任一有限集 S，S 中元素的数量可以用 $|S|$ 表示。因此，如果 $S = \{6.2, -9, \pi, 0.01, 0\}$ ，那么 $|S| = 5$ 。而且 $|\emptyset| = 0$ 。

几个集合通过运算可以构成新的集合。集合 S 和集合 T 的交集(intersection)是由所有既属于 S 又属于 T 的元素组成的集合，记作 $S \cap T$ 。集合 S 和集合 T 的并集(union)是由集合 S 和集合 T 中所有的元素组成的集合，记作 $S \cup T$ 。如果不存在元素既属于集合 S 又属于集合 T，那么它们称为互斥(disjointed/mutually exclusive)。

维恩图(Venn diagram)是一种能够有效地展示两个或三个集合以及它们的交集的方式。在维恩图中,我们用圆形区域表示集合。如果集合之间不互斥,那么圆形区域将会有重叠。如果集合互斥,那么圆形区域将不会有重叠。有时圆形区域画在一个矩形区域内部,该矩形区域表示全集(universal set),所有的集合都是全集的子集。

例 4.3.1 下面的维恩图展示了集合 A、B、C 以及全集 U



有竖条纹的区域代表集合 $A \cup C$ 。有横条纹的区域代表集合 B。既有竖条纹又有横条纹的区域代表集合 $A \cap B$ 。集合 B 和集合 C 是互斥的,我们通常记作 $B \cap C = \emptyset$ 。

上面这个例子阐明了一个关于交集的基本统计原理,叫作容斥原理(inclusion-exclusion principle)。这个原理与两个有限集的交集和并集中元素的数量有关:两个集合的并集中元素的数量等于两个集合中元素数量相加再减两个集合的交集中元素的数量。若例 4.3.1 中的集合是有限集,我们可以得到

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

因为集合 $A \cap B$ 既是集合 A 的子集也是集合 B 的子集,所以减法是为了避免将 $A \cap B$ 中的元素重复计算。而对于集合 B 和集合 C,我们可以得到:

$$|B \cup C| = |B| + |C|$$

因为 $B \cap C = \emptyset$ 。

2. 乘法原理(Multiplication Principle)

假设我们现在要依次做出两个选择,而且第二个选择与第一个选择无关,第一次有 k 个选择,第二次有 m 个选择。乘法原理指的是,在这种情况下共有 km 个选择。举个例子,我们到餐馆看着菜单点菜,这一顿饭包括主菜和甜点。如果菜单中有 5 种主菜和 3 种甜点,那么我们这一顿饭一共有 $3 \times 5 = 15$ 种选择。

乘法原理在一些复杂情况中也适用。如果有超过两个相互独立的选择要去做,将每一个选择的情况数量依次相乘,得到的就是最终不同结果的数量。

例 4.3.2 假设一个电脑密码有 4 位,第一位是数字 0-9 中的一个,剩下三位都是 26 个大写英文字母中的一个。那么这个密码一共有多少种可能呢?

解：这个密码是允许字母重复的。因此对于第一位共有 10 种选择，对于剩下三位都有 26 种选择。我们应用乘法原理，密码共有 $10 \times 26 \times 26 \times 26 = 175760$ 种可能。

需要注意的是，如果我们不允许字母重复出现在密码中，那么选择就不是独立的了。乘法原理的变式仍然有效。第一位仍然是有 10 种选择，第二位有 26 种选择，第三位则有 25 种选择，第四位则只有 24 种选择。因此，密码共有 $10 \times 26 \times 25 \times 24 = 156000$ 种可能。

例 4.3.3 每抛一次硬币，会产生两种结果——正面朝上或者背面朝上。我们应用乘法定理，如果我们抛八次硬币，将会有 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$ 种可能的结果。

3. 排列与阶乘(Permutations and Factorials)

假设你想把 A、B、C 三个字母按照不同的顺序进行排列，下面这个数组列举出了所有可能的结果：

ABC ACB BAC BCA CAB CBA

我们可以看出，对三个字母进行排列一共有 6 种可能的结果。现在假设你想把 A、B、C、D 四个字母按照不同的顺序进行排列，把所有情况都列举出来有些浪费时间。所以我们需要一种计数方法去计算出所有可能的排列而不是把它们一个一个列举出来。

一般来说，假如我们希望对 n 个对象按照不同的顺序进行排列，并计算出有多少种不同的排列方式。对于第一个对象，有 n 种选择(n 个对象排列后组成一个 n 位的数列，即对应 n 个位置，第一个对象就是从这 n 个位置中选择一个位置)；对于第二个对象有 $(n-1)$ 种选择，对第三个对象有 $(n-2)$ 种选择，以此类推，对于最后一个对象只有一种选择。因此，我们可以利用乘法原理， n 个对象一共有 $n(n-1)(n-2)\cdots 3 \times 2 \times 1$ 种不同的排列方式。其中每一种顺序我们都可以叫作一种排列(permutation)，上面的乘积就是 n 个对象排列方式的数量。

因为 $n(n-1)(n-2)\cdots 3 \times 2 \times 1$ 这种形式的乘积在计数时经常出现，我们可以用一个特殊的符号来表示： $n!$ ，叫作 n 的阶乘(factorial)。

我们举几个例子：

$$1! = 1$$

$$2! = 2$$

$$3! = 6$$

$$4! = 24$$

有一种特殊情况， $0! = 1$

需要注意的是： $n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)!$ ，以此类推。

例 4.3.4 十名学生准备乘公共汽车去旅行，在公共汽车上每位学生可以在 10 个座位中任选一个坐下，那么就一共有 $10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3628800$ 种情况。

现在假设你想从 A、B、C、D、E 五个字母中选出三个，并把它们按顺序排列。根据前面的讲解与分析，我们能够计算出一共有 $5 \times 4 \times 3 = 60$ 种情况。

现在我们考虑更一般的情况，我们要从 n 个对象中选出 k 个对象 ($k \leq n$)，然后对 k 个对象按顺序排列。排列的第一个位置有 n 种选择，第二个位置有 $(n-1)$ 种选择，第三个位置有 $(n-2)$ 种选择，以此类推，第 k 个位置有 $(n-k+1)$ 种选择。我们利用乘法定理，可以得到从 n 个对象中选择 k 个对象进行有序排列共有 $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$ 种可能。通常我们记为 $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$ ，我们可以利用这个公式计算从 n 个对象中选取 k 个对象进行排列共有多少种情况。

例 4.3.5 从 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 这 7 个数中选出 5 个数组成一个五位数而且每个数字只能用一次，能组成多少个不同的五位数？

解：根据上述计数原理，答案应该是 $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$ 种。注意：这个结果和 $\frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$ 是完全一样的。

4. 组合 (Combinations)

现在我们还是从 A、B、C、D、E 这五个字母中选出三个字母，不过与之前不同的是，现在不要求对三个字母进行排列。这样的话一共有多少种情况呢？下面我们列举出了所有的情况：

ABC ABD ABE ACD ACE ADE BCD BCE BDE CDE

在不考虑排序的情况下，从五个字母选出三个一共有 10 种不同的情况。接下来，我们讲一下排序与不排序之间的关系。

当不需要排序时，结果是 10，我们知道对三个字母进行排序共有 $3! = 6$ 种不同的情况，我们将这两个结果相乘得到的结果等于从 5 个字母中选出 3 个字母并进行排序的结果，即 $\frac{5!}{2!} = 60$ 。简而言之，我们可以用下面的公式来描述这其中的关系：

$$\text{选但不排序的结果} = \frac{\text{选且排序的结果}}{\text{只选的结果}} = \frac{5!}{3!} = \frac{5!}{3! 2!} = 10$$

我们假设从 n 个对象中选出 k 个对象 ($k \leq n$)，但不对选出的 k 个对象进行排序。在这种情况下，一共有 $\frac{n!}{k! (n-k)!}$ 种选择。

例 4.3.6 你要从 9 名学生中选出三人组成一个委员会，共有多少种选法？

解：因为组成委员会的三人不需要排序的，所以我们可以运用上述公式(9 选 3)：

$$\frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9!}{3!6!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$$

现在有一个集合 S 由 n 个元素组成，那么问题“ n 选 k ”就等价于计算由 k 个元素构成的集合 S 的子集有多少个。

当 $k=0$ 或者 $k=n$ 时，公式 $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ 依然成立：

当 k 取 0 时， $\frac{n!}{0!n!} = 1$ ，这也对应了问题“ n 选 0”：集合 S 的子集中只有一个子集不包含任何元素，也就是空集。

当 k 取 n 时， $\frac{n!}{n!0!} = 1$ ，这也对应了问题“ n 选 n ”：集合 S 的子集中只有一个子集包含 n 个元素，也就是集合 S 本身。

最后，我们需要注意的是问题“ n 选 k ”与问题“ n 选 $(n-k)$ ”的结果是完全一样的，因为 $\frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 。

综合训练

1. The 5 letters in the list G, H, I, J, K are to be rearranged so that G is the 3rd letter in the list and H is not next to G. How many such rearrangements are

- A. 60
- B. 36
- C. 24
- D. 12
- E. 6

1. 五个字母 G, H, I, J, K 进行排列，G 位于第三个字母，且 H 和 G 并不是挨着的。那么一共有多少种排列方式？

解：G 位于第三个位置且 H 和 G 不挨着，所以 H 不能在第二个和第四个位置，所以 H 可以在第一个或者第五个位置。假定 H 在第一个位置，那么就是剩下三个位置排三个字母，即共 $A_3^3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$ ；所以 H 在第五个位置的时候也是有 6 种排列方式，所以一共有 $6 + 6 = 12$ 种。

答：D

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

2. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
 Quantity A: The number of 4-member subsets of S.
 Quantity B: The number of 5-member subset of S.
 A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

3. Set A has 50 members and set B has 53 members. At least 2 of the members in set A are not in set B. Which of the following could be the number of members in set B that are not in set A?
 Indicate all such numbers.
 A. 3
 B. 5
 C. 13
 D. 25
 E. 50
 F. 53

2. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; A: 集合 S 由 4 个元素组成的子集, B: 集合 S 由 5 个元素组成的子集。

解: 从 8 个元素中选出 4 个元素组成子集一共有 $C_8^4 = 70$ 种选择, 即有 70 个元素个数为 4 的子集; 同理有 $C_8^5 = 56$ 个元素个数为 5 的子集, 所以 $A > B$ 。

答: A

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

3. 集合 A 有 50 个元素, 集合 B 有 53 个元素。集合 A 中至少有两个元素不属于集合 B。那么下列选项中, 哪个可能是集合 B 中不属于集合 A 的元素的数目? 请选择所有正确的答案。

解: 我们设有 x 个元素属于集合 A, 但不属于集合 B。 $x \geq 2$, 那么既属于集合 A 又属于集合 B 的元素有 $50 - x$ 个, 那么属于集合 B 不属于集合 A 的元素数量为 $53 - (50 - x) = x + 3 \geq 2 + 3 = 5$, 同时因为 $50 - x > 0$, 所以 $5 \leq x \leq 53$, 即 BCDEF 均符合要求。

答: BCDEF

4. R is a list of 15 consecutive integers, and T is a list of 21 consecutive integers. The median of the integers in list R is equal to the least integer in list T. If the two lists are combined into one list of 36 integers, how many different integers are on the combined list?

- A. 25
- B. 27
- C. 28
- D. 32
- E. 36

5. $T = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Quantity A: The total number of positive 4-digit integers that can be formed where each digit is in set T and the 4 digits in each 4-digit integer are different from each other

Quantity B: $7 \times 6 \times 5 \times 4$

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.

4. 数组 R 由 15 个连续整数组成，数组 T 由 21 个连续整数组成。集合 R 中的中位数等于数组 T 中最小的那个整数。现在将两个数组整合成一个数组，组成的新数组中有多少个不同的整数？

解：设数组 R 中 15 个连续整数的中位数是 x ，那么数组 R 中的 15 个整数是 $x-7, x-6, \dots, x, \dots, x+6, x+7$ 。所以数组 T 中最小的整数是 x ，那么数组 T 中的 21 个整数是 $x, x+1, x+2, \dots, x+7, \dots, x+21$ 。所以数组 S 和 T 都包含的整数 $x, x+1, x+2, \dots, x+7$ 共 8 个。根据容斥原理，在新组成的数组中，一共有 $15+21-8=28$ 个不同的整数。

答：C

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

5. $T = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$, A:

用集合 T 内的数字组成的不同的四位数的数量且组成的四位数各数位上数字不同, B: $7 \times 6 \times 5 \times 4$ 。

解：A 中要求的是由 T 中四个互不相同的数组成的四位数，首先选千位数，有 7 种选择，再选百位数时，除去已经被选为千位的数还有 6 种选择。十位数和个位数依次按照上述方法选择，则共有 $7 \times 6 \times 5 \times 4$ 种选择方式。

答：C

6. Ben has 30 pencils in a box. Each of the pencils is one of 5 different colors, and there are 6 pencils of each color. If Ben selects pencils one at a time from the box without being able to see the pencils, what is the minimum number of pencils that he must select in order to ensure that he selects at least 2 pencils of each color?

- A. 24 B. 25
C. 26 D. 27
E. 28

7. $\frac{60! - 59!}{58!} =$

- A. $(59)(58)$ B. $(60)(59)$
C. $(58)^2$ D. $(59)^2$
E. $(60)^2$

8. Set A consists of 40 integers, and set B consists of 150 integers. The number of integers that are in both set A and set B is 20.

Quantity A: The total number of integers that are in set A or set B, or both

Quantity B: 170

- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.

6. Ben 在盒子里装了 30 只铅笔。30 只铅笔中有 5 种不同的颜色，每个颜色有 6 只铅笔。如果 Ben 从箱子里每次取出一支铅笔，那么为了保证每个颜色都取出两支铅笔，他至少需要取多少次？

解：有 5 种不同的颜色，每种颜色有 6 个，为了确保每种颜色都至少两个，我们可以假设先取出的 24 个里只有 4 种颜色，每种 6 个，那么还需要拿出两个才能保证每种颜色至少两个。总共 $24 + 2 = 26$ 个。

答：C

7. $\frac{60! - 59!}{58!} =$

解： $\frac{60! - 59!}{58!} = \frac{58! (60 \times 59 - 59)}{58!} = 60 \times 59 - 59 = 59 \times (60 - 1) = 59^2$ 。

答：D

8. 集合 A 由 40 个整数组成，集合 B 由 150 个整数组成，既是 A 中又是 B 中的整数有 20 个。A: 在集合 A 或 B 或者既在 A 又在 B 中的整数的个数，B: 170。

解：根据容斥原理， $A =$ 集合 A 中整数的个数 + 集合 B 中整数的个数 - 既是集合 A 又是集合 B 中整数的个数 $= 40 + 150 - 20 = 170$ ，所以 $A = B$ 。

答：C

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

9. How many positive integers can be expressed as a product of two or more of the prime numbers 5, 7, 11, and 13 if no one product is to include the same prime factor more than once?

- A. Eight B. Nine
C. Ten D. Eleven
E. Twelve

10. A certain holiday is always on the fourth Tuesday of Month X. If Month X has 30 days, on how many different dates of Month X can the holiday fall?

- A. Four
B. Five
C. Six
D. Seven
E. Eight

11. There are 10 people in a room. If each person shakes hands with exactly 3 other people, what is the total number of handshakes?

- A. 15
B. 30
C. 45
D. 60
E. 120

9. 给出 4 个质数 5, 7, 11, 13。有多少个正整数可以表示成这四个数中 2 个或者更多个数的乘积, 且每个质数只使用一次?

解: 易知这 4 个数选出数字组成乘积不会存在重复的情况, 因为都是质数。所以共有三种情况, 从 4 种选出 2、3、4 个数进行乘法运算。所以共有 $C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 11$ 个。

答: D

10. 规定某节日在 X 月的第四个周二。如果 X 月有 30 天, 那么这个节日的日期可能有几种不同情况?

解: 我们首先假设 X 月第一个周二是 1 日, 那么第四个星期二就是 22 号; 我们知道 X 月第一个周二最晚是 7 号(若第一个周二是 8 号, 那么该月 1 号也是周二, 矛盾), 所以该节日最晚的日期是 28 日, 所以 22—28 日都可以是该节日的日期, 共 7 种情况。

答: D

11. 一间屋里一共有 10 个人。如果每个人都与 3 人握手, 那么一共出现了多少次握手?

解: 先不考虑重复的情况下, 每个人都与 3 个人握手, 则一共出现 $3 \times 10 = 30$ 次握手, 但是自己与另一人握手同时也是另一人与自己握手, 即每一次握手都被计算了两次, 所以 30 要除以 2, 即一共出现了 15 次握手。

答: A

12. In how many different ways can 3 identical green shirts and 3 identical red shirts be distributed among 6 children such that each child receives a shirt?

- A. 20
- B. 40
- C. 216
- D. 720
- E. 729

13. A knockoff website requires users to create a password using letters from the word MAGOSH. If each password must have at least 4 letters and no repeated letters are allowed, how many different passwords are possible?

12. 有 3 件相同的绿衬衫和 3 件相同的红衬衫分给六个小孩。在保证每个小孩分到一件衬衫的情况下，一共有多少种不同的分配方式？

解：我们只需要考虑每个小孩分到什么颜色即可。从 6 个小孩中选择 3 个小孩分配某一个，那么显然剩下 3 个小孩就分配另一个颜色。从 6 个小孩中选出 3 个有 $C_6^3 = 20$ 种选法，即一共有 20 种不同的分配方式。

答：A

13. 某一冒牌网站要求用户创建一个密码，每个密码都是由 MAGOSH 中的字母组成。如果密码至少含有 4 个字母，且字母不可重复使用，那么一共有多少种不同的密码？

解：密码有 4 个字母，那么从 MAGOSH 选出 4 个字母进行排列，共 $A_6^4 = 360$ 。

密码有 5 个字母，那么从 MAGOSH 选出 5 个字母进行排列，共 $A_6^5 = 720$ 。

密码有 6 个字母，那么从 MAGOSH 选出 6 个字母进行排列，共 $A_6^6 = 720$ 。

所以一共有 $360 + 720 + 720 = 1800$ 种不同的密码。

14. From a group of 8 people, it is possible to create exactly 56 different k - person committees. Which of the following could be the value of k ?

Indicate all such values.

- A. 1 B. 2
C. 3 D. 4
E. 5 F. 6
G. 7

15. N equals the number of positive 3 - digit numbers that contain odd digits only.

Quantity A: N

Quantity B: 125

- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.

16. In how many different ways can 3 boys and 3 girls be seated in a row of 6 chairs such that the girls are not separated, and the boys are not separated?

- A. 24
B. 36
C. 72
D. 144
E. 288

14. 对于一组 8 个人, 组成一个 k 人的委员会刚好有 56 种完全不同的情况, 那么 k 的值可能是多少? 请选择所有正确答案。

解: 从 8 个人中选出 k 个人组成委员会共有 C_8^k 种情况, 所以 $C_8^k = 56$ 。解得 $k=3$ 或者 5。

答: CE

15. N 等于每个数位上都是奇数的正三位数的个数, $A=N$, $B=125$ 。

解: 奇数有 1, 3, 5, 7, 9, 所以百位、十位、个位均有 5 种选择, 所以每个数位上都是奇数的正三位数共有 $5 \times 5 \times 5 = 125$ 个, 所以 $N=125$ 。

答: C

16. 一排 6 个椅子, 3 个男生和 3 个女孩随机选择椅子坐下。如果要求三个男生坐在一起三个女生坐在一起, 那么一共有多少种不同的坐法?

解: 假设三个男生全部在左女生全部在右, 那么男生的排列方式共有 $A_3^3 = 6$ 种, 同样女生也有 $A_3^3 = 6$ 种, 根据乘法原理共有 $6 \times 6 = 36$ 种。同理当男生在右女生在左时, 也有 36 种, 所以共 $36 + 36 = 72$ 种坐法。

答: C

17. Sid intended to type a seven-digit number, but the two “3” he meant to type did not appear. What appeared instead was the five-digit number 52115. How many different seven-digit numbers could Sid have meant to type?
- A. 10
B. 16
C. 21
D. 24
E. 27

18. In a certain sock drawer, there are 4 pairs of black socks, 3 pairs of gray socks and 2 pairs of orange socks. If socks are removed at random without replacement, what is the minimum number of socks that must be removed in order to ensure that two socks of the same color have been removed?
- A. 4
B. 7
C. 9
D. 10
E. 12

17. Sid 准备打印一个七位数，由于漏打两个“3”导致打出的五位数 52115，那么 Sid 本想要打出的七位数有多少不同的情况？

解：有两种情况：第一种情况是把两个 3 绑在一起插入五位数 52115，则共有 6 种情况。第二种是两个 3 分开插入五位数 52115，即从六个空选择两个，共有 $C_6^2 = 15$ 种情况，所以一共有 $15 + 6 = 21$ 种情况。

答：C

18. 在一个装袜子的抽屉中，有 4 双黑色的袜子，3 双灰色的袜子，两双橘色的袜子。如果不放回地随机取出袜子，最少要取多少次能确保有两只同色袜子被取出？

解：我们考虑最极端的情况，前三次取出的袜子颜色均不相同，即黑色、灰色、橘色各一只，那么第四次无论取到什么颜色的袜子都能保证取出的袜子中有两只同色。所以至少需要四次。

答：A

19. In a certain state, each license plate consists of either three digits (between 0 and 9, inclusive) followed by two letters or three letters followed by two digits. For example, 055 - XY, 123 - PP, and AAA - 70 are all acceptable plates. How many different license plates can the state issue?

20. Quantity A: The number of 3-digit integers all of whose digits are even
Quantity B: The number of 3-digit integers all of whose digits are odd

A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.

19. 某一个州内，牌照有两种情况：三位数字(0-9)后面加上两位字母，或者三位字母后跟两位数字，比如：055-XY, 123-PP, 和 AAA-70。那么该州内一共有多少种可能的牌照号码？

解：第一种情况中，前三位每一位都有10种选择，后两位每一位都有26种选择，根据乘法原理得到共有 $10 \times 10 \times 10 \times 26 \times 26$ 种选择。第二种情况同理可得一共有 $26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10$ 种选择。那么一共有 $10 \times 10 \times 10 \times 26 \times 26 + 26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 = 2433600$ 种选择。

答：2433600

20. A: 所有数位上的数字都是偶数的三位数的个数；B: 所有数位上的数字都是奇数的三位数的个数。

解：偶数有0, 2, 4, 6, 8, 由于0不能放在百位，那么百位上共有4种选择，十位和各位均有5种选择，那么根据乘法原理则所有数位上的数字都是偶数的三位数共有 $4 \times 5 \times 5$ 个；奇数有1, 3, 5, 7, 9, 百位、十位、个位均有5种选择，根据乘法原理，所有数位上的数字都是奇数的三位数共有 $5 \times 5 \times 5$ 。显然 $B > A$ 。

答：B

21. For a certain probability experiment, the probability that event A will occur is $1/2$ and the probability that event B will occur is $1/3$. Which of the following values could be the probability that the event $A \cup B$ (that is, the event A or B, or both) will occur?

Indicate all such values.

- A. $1/3$
- B. $1/2$
- C. $3/4$

21 在某一概率试验中, 事件 A 发生的概率为 $\frac{1}{2}$, 事件 B 发生的概率为 $\frac{1}{3}$ 。那么事件 $A \cup B$ (即事件 A 发生、事件 B 发生或两者同时发生) 发生的概率可能是多少? 请选择所有可能的答案。

解: 根据容斥原理我们知道 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 。易知 $0 \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$ (即事件 A 和事件 B 中发生概率较小的那一个), 所以 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - P(A \cap B) = \frac{5}{6} - P(A \cap B) \in [\frac{5}{6} - \frac{1}{3}, \frac{5}{6} - 0] = [\frac{1}{2}, \frac{5}{6}]$, 只有 BC 选项属于该区间。

答: BC

4.4 概率 (Probability)

概率是以数值方式描述不确定性的一种方法。在这一节我们回顾基本概率论中使用的一些术语。

概率实验 (probability experiment), 也称为随机实验 (random experiment) 是结果不确定的实验。假设我们知道实验所有可能发生的结果, 但是具体哪个结果会发生我们是不知道的。一组随机实验所有可能的结果称为样本空间 (sample place), 一个特定的结果序列称为事件 (event)。比如, 一个色子六个面上分别有数字 1-6。滚动一次色子就是一次随机实验, 有六种可能的结果。这个实验的样本空间是数字 1, 2, 3, 4, 5, 6 的集合。举两个这个实验中的事件: (1) 滚动色子后数字 4 朝上, 只有一种可能的结果; (2) 滚动色子后朝上的是偶数, 有三种可能的情况。

例 4.4.1 考虑以下实验。一个盒子里有 15 张纸, 每张纸上有 15 位学生 (7 位男生, 8 位女生) 中任意一位学生的名字, 这 15 个名字都不一样。我们随机从中

抽出一张纸并读出上面的名字。这个实验的样本空间就是这 15 个名字组成的集合。随机选择(random selection)指的是每一个名字被选择的可能性是相同的。如果我们能够做到随机选择,那么每一个名字被抽到的可能性都等于 $1/15$ 。对于任意一个事件 E ,我们用 $P(E)$ 来代表它发生的概率——用下面这个比值定义

$$P(E) = \frac{\text{事件 } E \text{ 中包含的名字的数量}}{15}$$

如果事件 M 代表选出来的学生是男生,那么 $P(M) = 7/15$ 。

我们讨论更一般的情况,对于一个实验(可能发生的结果数量有限),如果每个结果都是等可能发生的,那么每个事件 E 可能发生的概率就是

$$P(E) = \frac{\text{事件 } E \text{ 可能的结果的数量}}{\text{实验可能的结果的数量}}$$

在滚动色子的试验中,如果色子是均匀的,那么六种结果便是等可能出现的。所以数字 4 朝上的概率是 $\frac{1}{6}$,朝上的数字是奇数的概率(数字 1, 3, 5 朝上)是 $3/6 = \frac{1}{2}$ 。

下面是几个关于概率的定理:

- 如果事件 E 一定会发生,那么 $P(E) = 1$ 。
- 如果事件 E 一定不会发生,那么 $P(E) = 0$ 。
- 如果事件 E 可能发生但是不一定发生,那么 $0 < P(E) < 1$ 。
- 事件 E 不发生的概率是 $1 - P(E)$ 。
- 如果 E 代表一个事件,那么事件 E 发生的概率等于事件 E 中所有结果发生的概率之和。
- 如果事件 E 和 F 是一个实验的两个事件,我们来思考两个与事件 E 、 F 有关的事件:

① 事件“事件 E 和 F 都发生”,即结果在集合 $E \cap F$ 中。

② 事件“事件 E 和 F 至少发生一个”,即结果在集合 $E \cup F$ 中。

不可能同时发生的事件是互斥的(mutually exclusive)。比如,如果掷一次筛子,事件“朝上的是偶数”和事件“朝上的是奇数”是互斥的。但是事件“朝上的是 4”和事件“朝上的是偶数”并不是互斥事件,因为 4 朝上是两个事件共同的结果。

对于事件 E 和事件 F ,我们有如下规则:

- $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$,这是容斥原理在概率中的应用。
- 如果事件 E 和 F 是互斥的,那么 $P(E \cap F) = 0$,因此 $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$ 。

• 如果一个事件发生不会影响另一个事件是否发生，那么我们称这两个事件是相互独立。(independent)的。如果事件 E 和 F 相互独立，那么 $P(E \cap F) = P(E)P(F)$ 。例如，如果掷一个均匀的色子两次，那么事件 E “第一次 3 朝上” 和事件 F “第二次 3 朝上” 是相互独立的，那么两次投掷的结果都是 3 的概率是 $P(E)P(F) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ 。在这个例子里，这个实验就是“投掷色子两次”，每个结果都是一个数对。但是事件 E 只是第一次投掷的结果——结果是 3——对第二次投掷没有影响；同理，事件 F 只代表第二次投掷的结果——结果是 3——对第一次投掷没有影响。

我们需要注意的是，如果 $P(E) \neq 0$ 而且 $P(F) \neq 0$ ，那么事件 E 和 F 不可能既互斥又相互独立。如果事件 E 和 F 相互独立，那么 $P(E \cap F) = P(E)P(F) \neq 0$ ，但如果事件 E 和 F 互斥，那么 $P(E \cap F) = 0$ 。

我们通常用记号“ $E \cap F$ ”表示“ E 和 F 同时发生”，用记号“ $E \cup F$ ”表示“ E 和 F 至少有一个发生”。

关于这两个记号，我们有如下规则：

- $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$
- 如果事件 E 和 F 互斥， $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$
- 如果事件 E 和 F 互相独立， $P(E \cap F) = P(E)P(F)$

例 4.4.2 我们投掷一个均匀的色子，事件 E 为“3 正面朝上”，事件 F 为“奇数正面朝上”。这两个事件并不是相互独立的，因为如果 3 正面朝上，那么就意味着奇数正面朝上。我们注意到 $P(E \cap F) \neq P(E)P(F)$ ，因为 $P(E \cap F) = P(E) = \frac{1}{6}$ ， $P(E)P(F) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ 。

例 4.4.3 一个 12 面的色子，12 面上分别刻着数字 1 到 12。现在我们投掷这个色子一次，12 个可能的结果是等概率发生的。“4 正面朝上”的概率是 $1/12$ ，那么“不是 4 正面朝上”的概率就是 $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$ 。事件“朝上的是 5 的倍数(5 和 10)或者是奇数(1, 3, 5, 7, 9, 11)”的概率等于 $P(5 \text{ 的倍数}) + P(\text{奇数}) - P(\text{既是奇数又是 5}) = \frac{2}{12} + \frac{6}{12} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$ 。

另一种计算这个概率的方法是，我们注意到上面提到的事件与事件“朝上的是 1 或 3 或 5 或 7 或 9 或 11”是等价的，这个事件包含了 7 个等概率的结果。所以根据计算概率的比例公式，该事件发生的概率是 $7/12$ 。

例 4.4.4 现有三个事件 A 、 B 、 C ，他们发生的概率分别是 0.23，0.40 和 0.85。假设事件 A 和 B 互斥，事件 B 和 C 相互独立，那么 $P(A \cup B)$ 和 $P(B \cup C)$ 分别等于多少？

解：因为事件 A 和 B 是互斥的， $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.23 + 0.40 = 0.63$

因为事件 B 和 C 是独立的，所以 $P(B \cap C) = P(B)P(C)$ ，所以： $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = P(B) + P(C) - P(B)P(C)$ ，即 $P(B \cup C) = 0.40 + 0.85 - 0.40 \cdot 0.85 = 0.91$ 。

例 4.4.5 有一个质量不均匀的六面色子，投掷一次它朝上的数字为 1，2，3，4，5 的概率都是相等的，而数字 6 朝上的概率是数字 1 朝上概率的两倍。也就是说，当你投掷一次色子时，六种情况并不是等可能发生的。那么 6 种情况发生的概率分别是多少呢？

解：我们用记号 $P(1)$ 表示“数字 1 朝上”发生的概率，并令 $P(1) = p$ ，那么数字 2，3，4，5 朝上的概率均为 p ，数字 6 朝上的概率为 $2p$ 。因为所有结果发生的概率总和为 1，即 $1 = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = p + p + p + p + p + 2p = 7p$ ，所以数字 1 到 5 朝上的概率均为 $p = \frac{1}{7}$ ，数字 6 朝上的概率为 $\frac{2}{7}$ 。

例 4.4.6 现在我们投掷一个重量分布和例 4.4.5 中一样的色子，事件“第一次投掷结果为奇数，第二次投掷结果为偶数”发生的概率是多少？

解：我们首先要注意，事件“第一次投掷结果为奇数”和事件“第二次投掷结果为偶数”是相互独立的。所以我们在计算此题时，只需要将这两个独立事件的概率相乘即可。我们先分别算出两个相互独立的事件的概率：

$$P(\text{奇}) = P(1) + P(3) + P(5) = 3/7$$

$$P(\text{偶}) = P(2) + P(4) + P(6) = 4/7$$

$$\text{所以，} P(\text{第一次为奇，第二次为偶}) = P(\text{奇})P(\text{偶}) = \frac{3}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{12}{49}。$$

例 4.4.7 一个箱子里装有 5 个橙色的盘子，4 个红色的盘子和 1 个蓝色的盘子。现在，你需要不放回地从箱子中随机依次抽出两个盘子。那么事件“第一次抽出红色盘子且第二次抽出橙色盘子”发生的概率是多少？

解答：为了解决这个问题，我们要先计算出下面两个概率并把它们乘起来：

事件“第一个抽出的是红盘子”发生的概率；

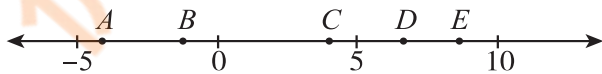
事件“已知第一个抽出的是红盘子，第二次抽出了橙色的盘子”的概率

显然，第一个概率是 $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ 。当第一次抽出了红盘子后，盒子里还剩下 5 个橙色的盘子，3 个红色的盘子和 1 个蓝色的盘子。因此，第二个概率就是 $\frac{5}{9}$ 。将这两个概率乘起来，就得到答案 $\frac{2}{5} \times \frac{5}{9} = \frac{2}{9}$ 。

综合训练

1. From the 5 points A, B, C, D, and E on the number line below, 3 different points are to be randomly selected. What is the probability that the coordinates of the 3 points selected will all be positive?

- A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{1}{5}$
 C. $\frac{3}{10}$ D. $\frac{2}{5}$
 E. $\frac{3}{5}$



1. 上图中数轴上有 5 个点，现在从其中随机选出 3 个点。那么选出的三个点的坐标都是正数的概率是多少？

解：从五个点中随机选出三个一共有 $C_5^3 = 10$ 种选择。在这 5 个点中有三个点的坐标是正数，所以选出的三个点都是正数一共有 $C_3^3 = 1$ 种选择，所以那么选出的三个点的坐标都是正数的概率是 $\frac{1}{10}$ 。

答：A

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

2. If an integer greater than 100 and less than 1,000 is to be selected at random, what is the probability that the integer selected will be a multiple of 7?

- A. $\frac{142}{999}$
- B. $\frac{142}{900}$
- C. $\frac{142}{899}$
- D. $\frac{128}{900}$
- E. $\frac{128}{899}$

3. A box at a yard sale contains 3 different china dinner sets, each consisting of 5 plates. A customer will randomly select 2 plates to check for defects. What is the probability that the 2 plates selected will be from the same dinner set?

- A. $2/7$
- B. $2/5$
- C. $2/3$
- D. $5/6$
- E. $3/2$

2. 随机从大于 100 且小于 1000 的整数中任意选择一个, 那么选出来的整数是 7 的倍数的概率是多大?

解: 从 101 到 999 一共 $999 - 101 + 1 = 899$ 个数字, 根据概率的计算方法, 我们要求出从 101 到 999 之间一共有多少 7 的倍数。在 101 到 999 之间, 最小的 7 的倍数是 $105 = 7 \times 15$, 最大的 7 的倍数是 $994 = 7 \times 142$, 那么一共有 $142 - 15 + 1 = 128$ 个 7 的倍数, 那么随机抽到 7 的倍数的概率为 $\frac{128}{899}$ 。

答: E

3. 一个现场出售的盒子有 3 个不同的中式成套餐具组合, 每一种组合包含 5 个盘子。一个顾客将随机选出两个盘子检查是否有瑕疵。那么这两个盘子是从一个组合里选出的概率是多少?

解: 随机选两个盘子一共有 $C_{15}^2 = 105$ 种可能性, 2 个盘子来自一套的可能情况有 $3 \times C_5^2 = 30$ 种可能性, 所以概率为 $\frac{30}{105} = \frac{2}{7}$ 。

答: A

4. A jar contains exactly 10 dimes and x quarters and no other coins. If a coin is randomly selected from the jar, the probability that a quarter is selected is 0.6. What is the value of x .
- A. 5
B. 6
C. 8
D. 12
E. 15

5. A and B are independent events, and the probability that both events occur is $1/2$. Which of the following could be the probability that event A occurs?

Indicate all such probabilities.

- A. 0
B. $1/4$
C. $1/2$
D. $3/4$
E. 1

4. 一个罐子里有 10 个十分硬币和 x 个 25 美分硬币且没有其他硬币。如果从罐子里随意挑选出一枚硬币，那么选出 25 美分硬币的概率是 0.6。那么 x 的值是多少？

解：随机在罐子里选一枚硬币出来，是 25 美分硬币的概率是 0.6，也就是说随机从罐子里选一枚硬币出来，是十分硬币的概率是 0.4。那么硬币的数量为 $\frac{10}{0.4} = 25$ ，所以 $x = 25 - 10 = 15$ 。

答：E

5. A 和 B 是独立事件，且两个事件同时发生的概率为 $\frac{1}{2}$ ，那么下列选项中，哪一项可能是事件 A 发生的概率？请选择所有正确的答案。

解：因为 A 和 B 是独立事件，那么两个事件同时发生的概率为 $P(A)P(B) = \frac{1}{2}$ 。因为 $P(B) \in (0, 1]$ ，所以 $P(A) \in [\frac{1}{2}, 1]$ ，即选项 CDE 正确。

答：CDE

6. Of the 700 members of a certain organization, 120 are lawyers. Two members of the organization will be selected at random. Which of the following is closest to the probability that neither of the members selected will be a lawyer?

- A. 0.5
- B. 0.6
- C. 0.7
- D. 0.8
- E. 0.9

7. If one number is chosen at random from the first 1,000 positive integers, what is the probability that the number chosen is a multiple of both 2 and 8?

- A. 1/125
- B. 1/8
- C. 1/2
- D. 9/16
- E. 5/8

6. 一个组织中有 700 名成员，其中 120 位律师。现在随机从组织中选出两名成员。那么选出的两名成员都不是律师的概率是多少？请选出最接近的答案。

解：该组织中不是律师的成员有 $700 - 120 = 580$ 位。从 700 人中随机选出两人共有 C_{700}^2 种选择，从 580 人中随机选出两人共有 C_{580}^2 种选择，所以概率为 $\frac{C_{580}^2}{C_{700}^2} = \frac{580 \times 579}{700 \times 699} \approx 0.69$ 。答案 C 最接近。

答：C

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

7. 在前 1000 个正整数中随机选出一个数，那么选出的数既是 2 的倍数又是 8 的倍数的概率是多少？

解：易知 8 的倍数一定是 2 的倍数。 $1000/8 = 125$ ，即在前 1000 个正整数中有 125 个 8 的倍数，所以概率是 $125/1000 = 1/8$ 。

答：B

8. If points A and B are randomly placed on the circumference of a circle with radius 2, what is the probability that the length of chord AB is greater than 2?

- A. $1/4$
- B. $1/3$
- C. $1/2$
- D. $2/3$
- E. $3/4$

9. A: {71, 73, 79, 83, 87} B: {57, 59, 61, 67}

If one number is selected at random from set A, and one number is selected at random from set B, what is the probability that both numbers are prime?

- A. $9/20$
- B. $3/5$
- C. $3/4$
- D. $4/5$
- E. 1

8. A 和 B 是半径为 2 的圆周上随机选择的两点。那么弦 AB 长度大于 2 的概率是多大?

解: 我们不妨把 A 看成一个定点, B 可以在 A 的左边或者右边, 当 $\angle AOB$ 为 60° 时 $AB=2$, 所以左右两侧加起来共 120° , 在这范围内 $AB < 2$, 所以 AB 小于 2 的概率为 $\frac{120}{360} = \frac{1}{3}$, 所以大于 2 的概率为 $\frac{2}{3}$ 。

答: D

9. A: {71, 73, 79, 83, 87} B: {57, 59, 61, 67}

现在分别从集合 A 和集合 B 选择一个数字, 那么选择的两个数字均是质数的概率是多大?

解: 集合 A 中 71, 73, 79, 83 为质数, 所以集合 A 中选出的数为质数的概率是 $\frac{4}{5}$, 集合 B 中 59, 61, 67 是质数, 那么集合 B 中选出的数是质数的概率为 $\frac{3}{4}$, 根据乘法原理两个数均为质数的概率是 $\frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$ 。

答: B

10. A box contains 10 balls numbered from 1 to 10 inclusive. If Ann removes a ball at random and replaces it, and then Jane removes a ball at random, what is the probability that both women removed the same ball?
- A. $1/100$
 B. $1/90$
 C. $1/45$
 D. $1/10$
 E. $41/45$
10. 一个盒子中装了 10 个球，编号 1 到 10。如果 Ann 从中随机取出一个球并放回，然后 Jane 再从中随机取出一个球，那么两人取出的同一个球的概率是多少？
- 解：我们只需要考虑 Jane 随机取到的球和 Ann 结果一样即可，无论 Ann 拿的是哪个球，Jane 都有 $1/10$ 的概率和她取到相同的球。
- 答：D

4.5 资料分布，随机变量和概率分布 (Distribution of Data, Random Variables, and Probability Distributions)

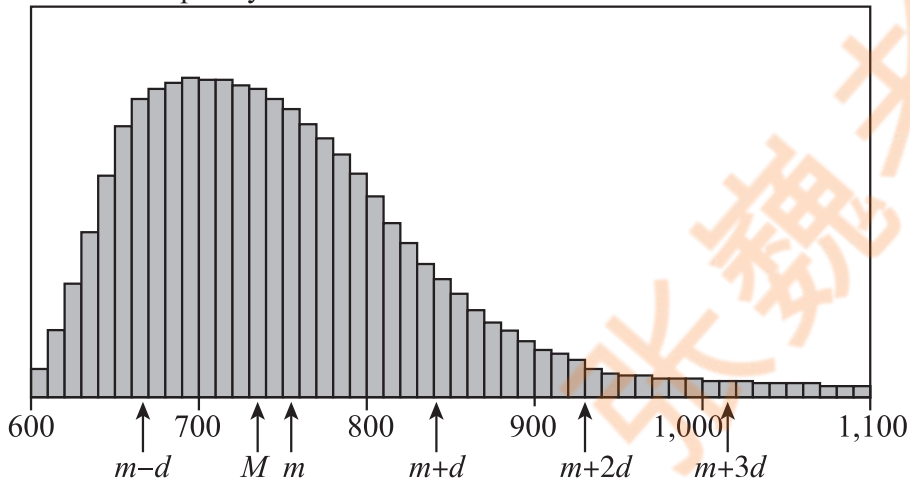
在数据分析中，值随机出现的变量把数据的分布与概率分布紧密的结合了起来。值会随机出现的变量叫作随机变量。我们首先回顾一下数据的分布。

1. 数据分布 (Distribution of Data)

回忆一下，能够给出相对频率的表格或者柱状图是一种常见的能够展示数据如何分布的方式。在柱状图中，条形的面积说明了数据集中的区域。在例 4.1.6 中，柱状图里给出了一组数量较少的数据的分布，一共 25 个数据，6 个可能的值。在日常生活中，一组数据的数量很可能大于 25 且远不止 6 个值。

例 4.5.1 我们对 800 个电子设备的寿命进行了统计。因为寿命有许多不同的值，所以我们划定了 50 个区间，区间长度为 10 小时：601—610 小时，611—620 小时，…，1091—1100 小时。我们在下面的柱状图中画出了每个区间的相对频率，图中有 50 个较细的条形，高度不一。

Relative Frequency Distribution for Lifetimes of 800 Electric Devices



请注意：柱状图的顶部看起来相对平滑，而且开始看起来像一条曲线。一般来说，一个呈现了大量数据并分为许多区间的柱状图中，形状都十分平滑。因此，我们可以用接近条形最高点的曲线对数据的分布进行建模。这种模型能描绘出数据分布的大概趋势。

我们回顾例 4.1.6，柱状图中代表相对频率的条形面积之和为 1。尽管柱状图横轴上的单位会有变化，我们可以调整纵轴的单位使得条形面积总和为 1。调整过后，代表数据分布的曲线下方的面积也为 1。这条曲线叫作分布曲线(distribution curve)，当然它也有其他名字，比如密度曲线(density curve)和频率曲线(frequency curve)。

分布曲线能够给出数据的总体分布情况，而不再依赖于划分区间。为了做到这一点，我们从曲线往下做一个垂直于横轴的切片(就像柱状图里一个条形)，这个切片的面积和落在切片与横轴交点间的区间内的数据出现的频率是一致的。

请注意一组数据的平均值和中位数在横轴上需要被标记。而且，偏离平均值整数倍标准差的数值在横轴上也需要被标记。通过这些标记我们能够看出是否大多数的数据落在偏离平均值 3 倍的标准差的区间内，即在区间 $(m - 3d, m + 3d)$ 内。

最后关于平均值和中位数，我们要记住中位数把一组数据分成了上半部分和下半部分。所以在柱状图中，在中位数左侧的条形的面积之和等于平均值右侧的条形面积之和。

2. 随机变量(Random Variables)

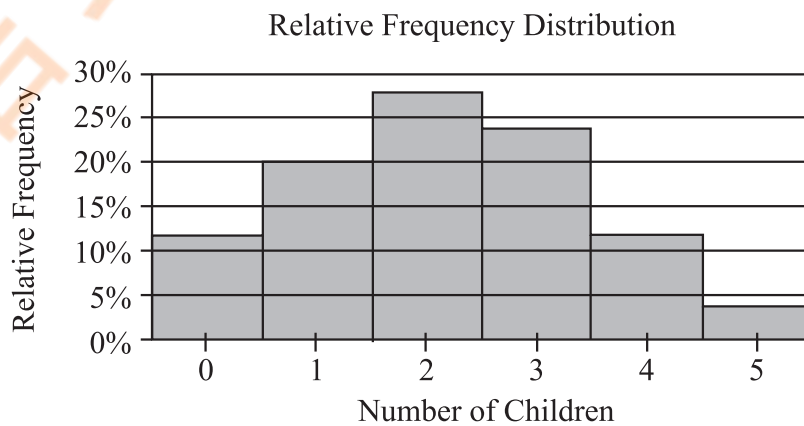
在分析数据时，我们经常认为数据的值是随机出现的而且认为我们做出的选择是随机试验，就像 4.4 节介绍的那样。之后，随机事件的概率可能是被计算出来的。先给出一个数据的分布，一个变量 X 可以用来表示数据分布中一个随机选择的值。这样的变量 X 称为随机变量，它可能出现的值是随机试验的一个数值结果。

例 4.5.2 在例 4.1.1 给出的数据中包含了孩子的数量，我们用 X 代表从 25 个家庭中随机选出的家庭中孩子的数量。那么 $X=3$ 的概率是多少呢？ $X>3$ 呢？ X 小于平均值的概率呢？

解：为了方便，我们列出了数据分布的频率表。

Number of Children	Frequency
0	3
1	5
2	7
3	6
4	3
5	1
Total	25

在 25 个家庭中，有 6 个家庭有 3 个孩子而且每个家庭被选中的可能性是一样的，所以选中 3 个孩子的家庭的概率是 $6/25$ 。这就是说，“ $X=3$ ”是一个事件， $P(X=3)=6/25=0.24$ 。我们也经常会使用简写 $P(3)$ 来替代 $P(X=3)$ ，所以你可以写成 $P(3)=0.24$ 。我们在下面的柱状图给出了驻足数据，“ $X=3$ ”所对应的条形面积与条形面积之和的比例是等于它的概率的。



对于事件“ $X>3$ ”，它等价于事件“ $X=4$ 或 $X=5$ ”。因为事件“ $X=4$ ”和事件“ $X=5$ ”是互斥事件，我们运用 4.4 节中讲到的概率运算法则

$$P(X>3) = P(4) + P(5) = \frac{3}{25} + \frac{1}{25} = 0.12 + 0.04 = 0.16$$

对于最后一个问题，我们先算出这组数据的平均值

$$\frac{0 \times 3 + 1 \times 5 + 2 \times 7 + 3 \times 6 + 4 \times 3 + 5 \times 1}{25} = \frac{54}{25} = 2.16$$

然后， $P(X < 2.16) = P(0) + P(1) + P(2) = \frac{3}{25} + \frac{5}{25} + \frac{7}{25} = \frac{15}{25} = 0.6$ 。

下面这个表格作出了 X 的 6 个可能的值以及其对应可能出现的概率，这个表叫作随机变量 X 的概率分布(probability distribution)

X	$P(X)$
0	0.12
1	0.20
2	0.28
3	0.24
4	0.12
5	0.04

请注意，概率就是 6 个值的相对频率，只不过概率使用的是小数的形式而不是百分数。下面我们将讲解数据分布和概率分布之间一些基本的联系。对于一个能够代表从一个数据分布中随机选择的值的变量，这个随机变量的概率分布和这个数据的相对频率分布相同。因为概率分布和相对频率分布基本相同，所以概率分布也可以用柱状图表示。而且所有的描述性数据(如平均值，中位数和标准差)也适用于概率分布。比如，我们可以说上述概率分布的平均值是 2.16，中位数是 2，标准差是 1.3，因为这 25 个数据也有这些统计数据，你可以自己计算检查。这些统计性数据在随机变量中的定义相同。因此我们可以说随机变量 X 的平均值值是 2.16。随机变量的平均值还有一个名字叫期望(expected value)。所以我们可以说随机变量 X 的期望是 2.16。请注意，随机变量 X 的平均值可以用下列公式表示：

$$\begin{aligned} & \frac{0 \times 3 + 1 \times 5 + 2 \times 7 + 3 \times 6 + 4 \times 3 + 5 \times 1}{25} \\ &= 0 \times \frac{3}{25} + 1 \times \frac{5}{25} + 2 \times \frac{7}{25} + 3 \times \frac{6}{25} + 4 \times \frac{3}{25} + 5 \times \frac{1}{25} \\ &= 0P(0) + 1P(1) + 2P(2) + 3P(3) + 4P(4) + 5P(5) \end{aligned}$$

也就是所有 $XP(X)$ 之和。

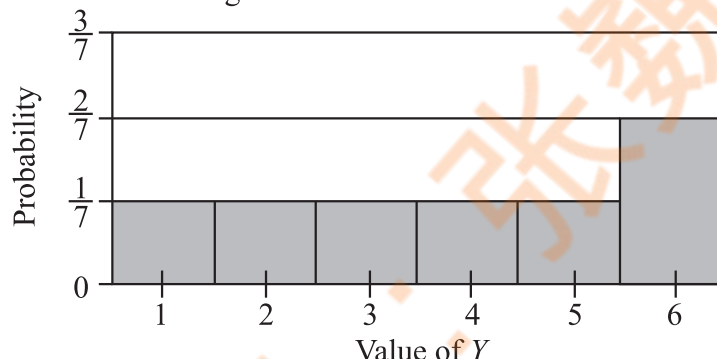
前面的例子涉及到的都是最常见的随机变量——能够代表从数据分布中随机选择的值。然而实际上，随机变量的概念是更具有一般性的。一个随机变量可以是任意一个量，这个量的值是随机试验的一个结果。那么随机变量所有可能取到的值和试验所有可能出现的结果相同。所以任何可能产生数值结果的随机试验都与随机变量密切相关，如下例所示。

例 4.5.3 我们令 Y 代表投掷一个质量均匀的筛子的可能出现的结果，那么 Y 是一个有 6 个可能的值(数字 1 到 6)的随机变量。 Y 的每个可能的值都有一个概率，我们在下表给出，并画出随机变量 Y 的柱状图。

Probability Distribution of the Random Variable Y

Y	1	2	3	4	5	6
P(Y)	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$

Histogram for the Random Variable Y



同样，我们可以计算其平均数(期望)：

$$P(1) + 2P(2) + 3P(3) + 4P(4) + 5P(5) + 6P(6) = \frac{1}{7} + 2 \times \frac{1}{7} + 3 \times \frac{1}{7} + 4 \times \frac{1}{7} + 5 \times \frac{1}{7} + 6 \times \frac{2}{7} = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{3}{7} + \frac{4}{7} + \frac{5}{7} + \frac{12}{7} = \frac{27}{7} \approx 3.86$$

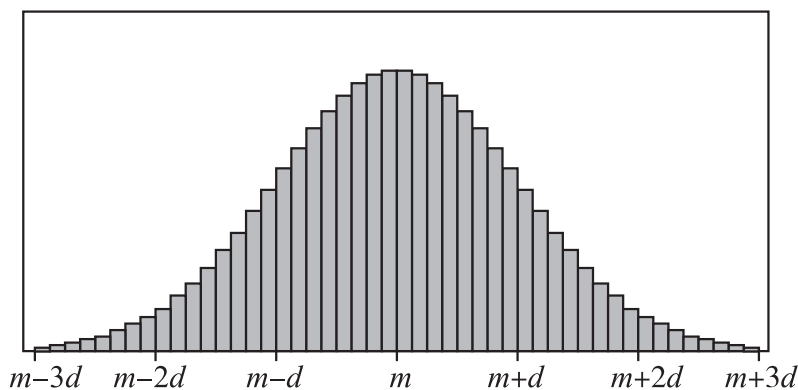
随机变量 X 和 Y 都是离散型随机变量，因为他们取的值是数轴上一系列离散的点。从 4.4 节我们可以得到一个关于概率的基本事实：一个实验所有可能结果发生的概率总和为 1。而且在随机变量概率分布的柱状图中，所有条形的面积之和为 1。这条定理把柱状图中条形的面积和离散随机变量的概率紧密联系在一起。

在随机变量的柱状图中，每个条形的面积和该条形所代表的概率是匹配的。如果在例 4.4.5 中，筛子是质量均匀的，每个结果出现的概率是 1/6，所以在柱状图中的每个条形的高度相同。这样的一种平的柱状图表示这是一个均匀分布 (uniform distribution)，因为所有可能的结果出现的概率都是相同的。

3. 正态分布 (Normal Distribution)

许多自然过程产生的数据的相对频率分布的形状像一个圆屋顶。这些数据的均值是 m ，标准差是 d 。

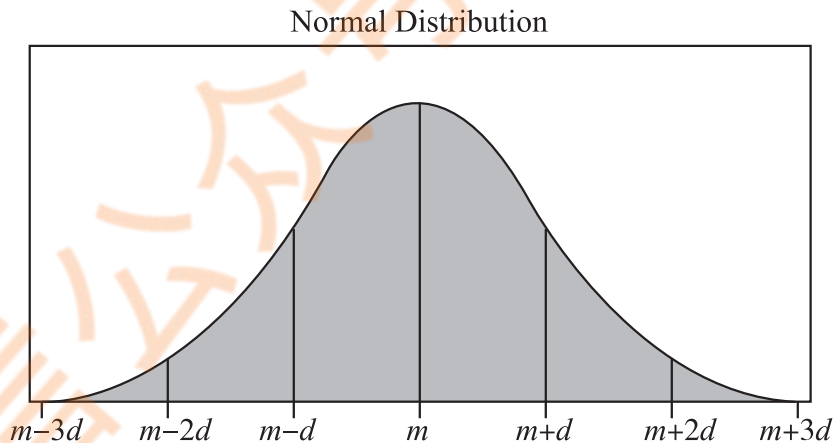
Approximately Normal Relative Frequency Distribution



这样的数据称为近似正态分布 (approximately normally distributed) 而且有以下性质。

- 平均值、中位数和众数大致相等。
- 平均值近似地把数据分为对称的两组。
- 大约三分之二的的数据偏离平均值不超过 1 个标准差。
- 几乎所有的数据偏离平均值不超过 2 个标准差。

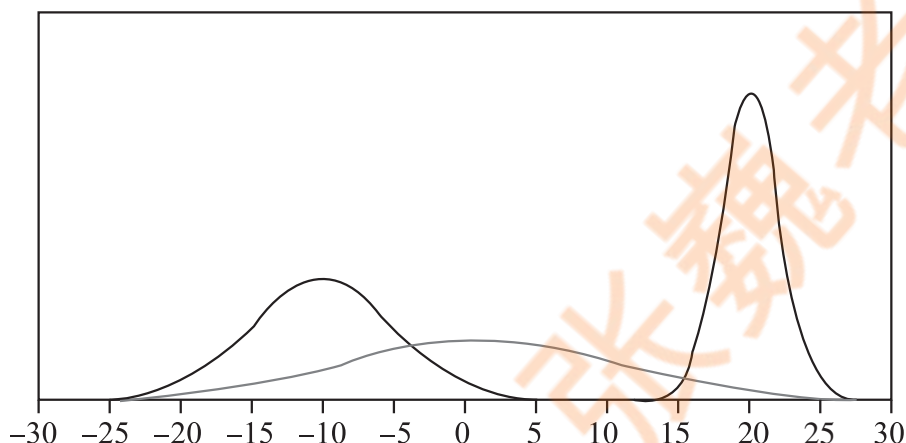
如上所述，我们可以把随机试验中的不同结果和随机变量联系在一起。如果 X 是上述分布的一个随机变量，我们就说随机变量 X 是近似正态分布的。如例 4.5.1 中描述的，相对频率的分布通常近似地用一条曲线进行描绘 (分布曲线或叫密度曲线)。在这条曲线下方的区域代表着另一种分布，叫作连续概率分布。连续概率分布有许多不同的类型，其中最重要的是正态分布 (normal distribution)。它的分布曲线也是圆顶状，如下图所示。



与其他分布一样，正态分布也有平均值和标准差。而且，之前列举的近似正态分布的性质也适用于正态分布，只是正态分布的平均数、中位数和众数是严格相等的，而且平均数把这个分布严格分成了对称的两部分。

一个正态分布，尽管形如一个圆屋顶，但是整个分布集中于平均值的程度也是不同的，这依赖于正态分布的标准差。下图给出了三个不同的正态分布，它们的中心和分散程度不同。从左至右看，这三个分布的均值分别为 -10 ， 1 和 20 ，标准差分别为 5 ， 10 和 2 。

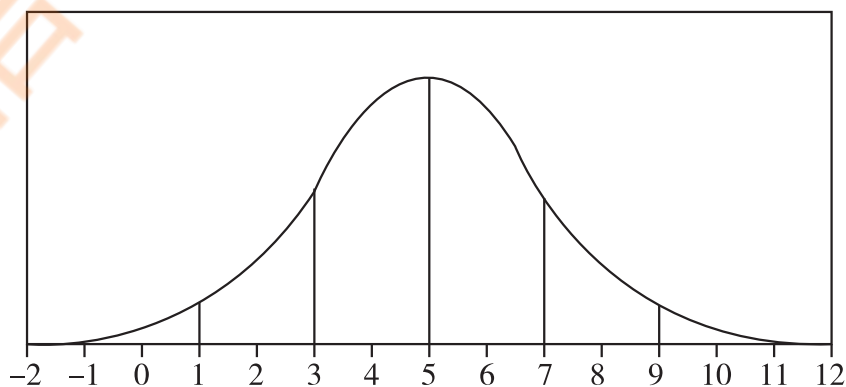
Three Normal Distributions



如之前所说，在离散随机变量的柱状图中，条形的面积与随机变量取值的概率相一致。所有条形面积总和为 1，概率的总和也为 1。这条定理对于连续随机变量也适用：在分布曲线下的部分面积为 1。这样一个随机变量叫作连续随机变量，它与代表从数据分布中随机取值的随机变量扮演着同样的角色。不同的是，我们很少把连续随机变量中的事件看成一个单一的值，比如 $X=3$ 。我们通常把事件描述成一个区间内的值，比如 $1 < X < 3$ 或者 $X > 10$ 。

例 4.5.4 如果 W 是一个服从正态分布的随机变量，均值为 5，标准差为 2，那么 $P(W > 5)$ 等于？ $P(3 < W < 7)$ 大约等于多少？0.5，0.1，0.05，0.01 这四个数哪个最精确的估算了 $P(W < -1)$ ？

解：



因为平均值是 5，而且分布关于平均值对称，那么事件“ $W > 5$ ”与分布曲线下方面积的一半相一致，即 $P(W > 5) = \frac{1}{2}$ 。对于事件 $3 < W < 7$ ，需要注意：因为分布的标准差是 2，值 3 和 7 都偏离平均值一个标准差。因为 $2/3$ 的区域在偏离平均值一个标准差的范围之内，所以 $P(3 < W < 7)$ 大约是 $\frac{2}{3}$ 。

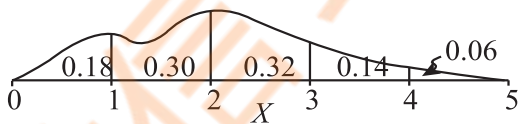
对于事件 $W < -1$ ，我们需要注意 -1 比平均值低 3 个标准差。上图非常清晰地显示了在分布曲线下方的区域中， -1 左侧的区域占整个区域面积不到 5%，所以最精确的估算应该是 0.01。

标准正态分布 (standard normal distribution) 是一种特殊的正态分布，它的均值为 0，标准差为 1。为了将一个平均值为 m ，标准差为 d 的正态分布转换为标准正态分布，我们可以对数据进行标准化 (在例 4.2.9 中有提到)。

我们可以使用计算器、计算机或者查标准正态分布表非常准确的得到关于正态分布的概率。比如， $P(3 < W < 7)$ 和 $P(W < -1)$ 的准确值分别是 0.683 和 0.0013。这种计算已经超出了本章的要求。

综合训练

1. The figure below shows the probability distribution of a continuous random variable X . For each of the five intervals shown, the figure gives the probability that the value of X is in that interval. What is the probability that $1 < X < 4$?



1. 下图给出了连续随机变量 X 的概率分布。上图给出了五个区间并且标出了 X 的值落在各区间的概率。那么 $1 < X < 4$ 的概率是多大?

解：从图中可以看出， X 的值落在 $1-2$ 之间的概率是 0.30，落在 $2-3$ 之间的概率是 0.32，落在 $3-4$ 之间的概率是 0.14，所以 $1 < X < 4$ 的概率是 $0.3 + 0.32 + 0.14 = 0.76$ 。

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

2. The distribution of the numbers of hours that students at a certain college studied for final exams has a mean of 12 hours and a standard deviation of 3 hours. Which of the following numbers of hours are within 2 standard deviations of the mean of the distribution?

Indicate all such numbers

- A. 2
- B. 5
- C. 10
- D. 14
- E. 16
- F. 20

3. S is a set of n consecutive integers.

Quantity A: The mean of S

Quantity B: The median of S

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.

2. 某大学中学生为期末考试准备的时间组成了一个分布，这一分布平均值为12小时，标准差为3小时。那么下列选项中，哪些偏离平均值两倍标准差以内？请选择所有正确的答案。

解：所求选项范围应该是 $12 - 3 \times 2 - 12 + 3 \times 2$ 即 $6 - 18$ 小时之间，CDE 选项符合要求。

答：CDE

- ◆ [出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

3. 集合 S 由 n 个连续整数组成。A: 集合 S 中整数的平均数；B: 集合 S 中整数的中位数。

解：由于集合 S 中是连续的数，所以该集合中的数是连续分布的，所以中位数和平均数是相等。

答：C

4. A random variable Y is normally distributed with a mean of 200 and a standard deviation of 10.

Quantity A: The probability of the event that the value of Y is greater than 220

Quantity B: $\frac{1}{6}$

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

5. The random variable X is normally distributed. The values 650 and 850 are at the 60th and 90th percentiles of the distribution of X , respectively.

Quantity A: The value at the 75th percentile of the distribution of X

Quantity B: 750

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

4. 一随机变量 Y 服从均值为 200、标准差为 10 的正态分布；A: Y 的值大于 220 的概率，B: $\frac{1}{6}$ 。

解：根据正态分布的规律，偏离平均值两个标准差以上的概率是 4%。在该分布中，大于 220 即大于平均值两个标准差以上，所以 Y 的值大于 220 的概率是 $\frac{4\%}{2} = 2\% < \frac{1}{6}$ 。

答：B

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

5. 已知随机变量 X 服从正态分布。在 X 的分布中，650 和 850 分别是第 60 个百分位数和第 90 个百分位数。A: X 的分布中第 75 个百分位数，B: 750。

解：题目说 X 是正态分布，所以先画出一个小山丘，percentile 就是按面积一百等分，第 50 个百分位数是中间，第 60 个和第 90 个第 50 个右边，处于下降趋势，所以第 60 个百分位数是 650 可以理解为横坐标是 650，由正态分布特征可以知道 60th 到 90th 每增加 1th 横坐标变化越来越快，也就是说从 60th 到 75th 增加的横坐标要小于 75th 到 90th 增加的横坐标，所以 75th 的时候要小于 750。

答：B

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

4.6 数据分析示例

例 4.6.1

DISTRIBUTION OF CUSTOMER COMPLAINTS
RECEIVED BY AIRLINE P, 2003 AND 2004

Category	2003	2004
Flight problem	20.0%	22.1%
Baggage	18.3	21.8
Customer service	13.1	11.3
Oversales of seats	10.5	11.8
Refund problem	10.1	8.1
Fare	6.4	6.0
Reservation and ticketing	5.8	5.6
Tours	3.3	2.3
Smoking	3.2	2.9
Advertising	1.2	1.1
Credit	1.0	0.8
Special passenger accommodation	0.9	0.9
Other	6.2	5.3
Total	100.0%	100.0%
Total number of complaints	22,998	13,278

(a) 航空公司 P 在 2003 年收到了多少关于信誉方面的投诉?

(b) 从 2003 年到 2004 年投诉的总量降低了多少个百分点?

(c) 根据表中给出的信息, 下面哪一个陈述是正确的?

(i) 在 2003 年和 2004 年, 关于航班问题、行李和空乘人员服务态度的投诉总和占到了投诉总量的一半以上。

(ii) 关于特殊旅客住宿方面的投诉数量在 2003 至 2004 年间并未发生改变。

(iii) 从 2003 年到 2004 年, 关于航班问题的投诉数量增加了两个百分点。

解: (a) 根据给出的表格, 在 2003 年, 关于信誉方面的投诉占总投诉量的 1%, 因此关于信誉问题投诉的总量就是 22998 的 1%, 也就是

$0.01 \times 22998 \approx 230$ 。

(b) 从 2003 年到 2004 年, 投诉总量下降了 $22998 - 13278 = 9720$ 。

所以下降的百分点就是 $\frac{9720}{22998} \times 100\%$, 大约是 42%。

(c) 因为 $20.0 + 18.3 + 13.1$ 和 $22.1 + 21.8 + 11.3$ 都大于 50, 所以说陈述 I 是正确的。

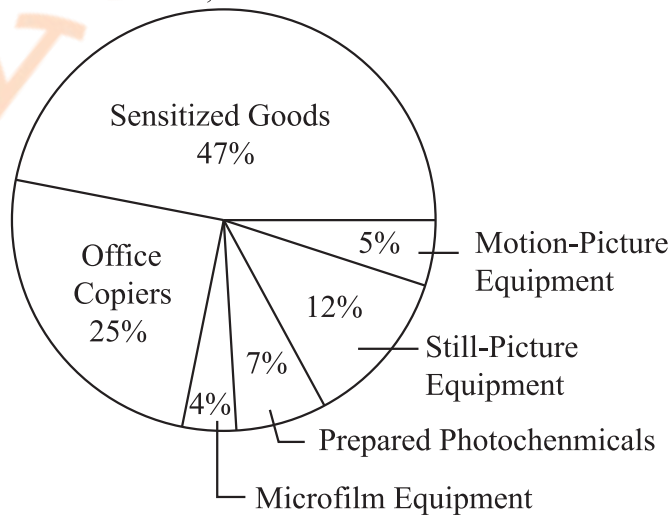
关于特殊旅客住宿的投诉量所占投诉总数的比例在 2003 到 2004 年之间的确没有产生变化, 但是因为投诉的总量下降了, 所以实际上关于这个问题的投诉量下降了。因此陈述 II 是错误的。

关于航班问题的投诉量所占百分比的确在 2003 至 2004 年间增加了 2 个百分点, 但是这和陈述 III 完全是两个概念。2004 年的总投诉量远少于 2003 年的总投诉量, 显然 22998 的 20% 大于 13278 的 22.1%。所以实际上关于航班问题的投诉量从 2003 年到 2004 年是下降了的。陈述 III 是错误的。

例 4.6.2

UNITED STATES PRODUCTION OF PHOTOGRAPHIC EQUIPMENT AND SUPPLIES IN 1971

Total: \$3,980 million



(a) Approximately what was the ratio of the value of sensitized goods to the value of still-picture equipment produced in 1971 in the United States?

(b) If the value of office copiers produced in 1971 was 30 percent greater than the corresponding value in 1970, what was the value of office copiers produced in 1970?

(a) 1971 年, 美国生产的 sensitized goods 数量与 still-picture equipment 数量的比值是多少?

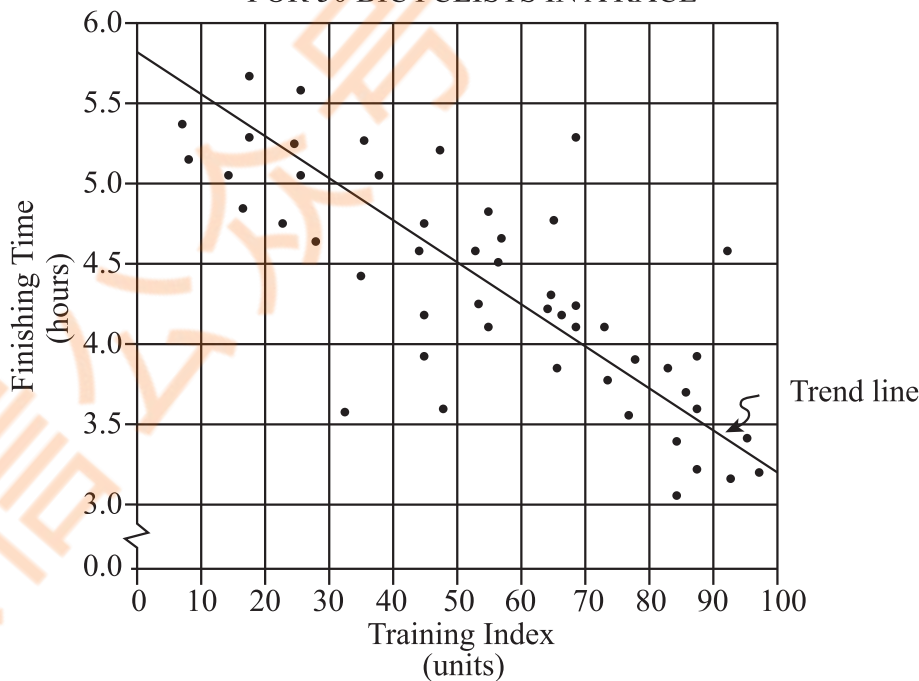
(b)相对于 1970 年, 1971 年生产的 office copiers 增长了 30%, 那么 1970 年生产了多少 office copiers?

解: (a)因为 sensitized goods 与 still-picture equipment 分别占总数的 47%和 12%, 所以它们之间的比值就是 47 : 12, 大约是 4 : 1。

(b)office copiers 在 1971 年的值是 30 亿 9800 万美元的 0.25 倍。因此假设其在 1970 年的值为 x , 那么 $1.3x=9$ 亿 9500 万。解这个方程得 $x \approx \frac{995}{1.3} \approx 765$, 所以 office copiers 在 1970 年的值大约是 7 亿 6500 万美元。

例 4.6.3

FINISHING TIMES AND TRAINING INDICES FOR 50 BICYCLISTS IN A RACE



A bicycle trainer studied 50 bicyclists to examine how the finishing time for a certain bicycle race was related to the amount of physical training in the three months before the race. To measure the amount of training, the trainer developed a training index, measured in “units” and based on the intensity of each bicyclist’s training. The data and the trend of the data, represented by a line, are displayed in the scatterplot above.

(a) How many of the 50 bicyclists had both a training index less than 50 units and a finishing time less than 4.5 hours?

(b) What percent of the 10 fastest bicyclists in the race had a training index less than 90 units?

一位自行车教练调查了 50 位自行车爱好者，想要找到完成一项自行车比赛的时间和赛前三个月训练量之间的关系。为了测量训练量，这位自行车教练使用了一个度量：单位为 ‘units’，且基于每位自行车爱好者的训练强度。下列的散点图给出了调查得到的数据以及代表数据趋势的直线。

(a) 在这 50 位自行车爱好者当中，有多少位的训练强度是小于 50 个单位且完成比赛的时间小于 4.5 小时？

(b) 在 10 位最快的自行车爱好者中，有百分之几的训练强度是小于 90 个单位的？

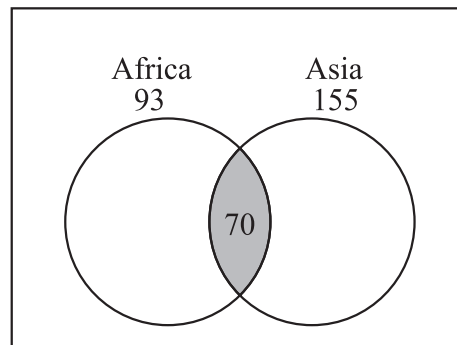
解：

(a) 训练强度小于 50 个单位而且完成时间小于 4.5 小时的自行车爱好者数量等于在题目给出的散点图中横坐标小于 50 纵坐标小于 4.5 的点的数量。我们可以数出这样的点一共有 5 个，那么这题的答案就是 5。

(b) 10 个纵坐标最小的数据就代表了 10 个最快的自行车爱好者。在散点图中，有三个点的横坐标大于 90，所以在最快的 10 个自行车爱好者里，有七个人的训练强度是小于 90 个单位的，也就是说在最快的 10 名自行车爱好者中，70% 的训练强度小于 90 个单位。

例 4.6.4

TRAVELERS SURVEYED: 250



In a survey of 250 European travelers, 93 have traveled to Africa, 155 have traveled to Asia, and of these two groups, 70 have traveled to both continents, as illustrated in the Venn diagram above.

(a) How many of the travelers surveyed have traveled to Africa but not to Asia?

(b) How many of the travelers surveyed have traveled to at least one of the two continents of Africa and Asia?

(c) How many of the travelers surveyed have traveled neither to Africa nor to Asia?

在一项调查了 250 位欧洲旅行者的研究中，93 位去过非洲，155 位去过亚洲，70 位这两个大洲都去过。上面的维恩图也给出了调查的结果。

(a) 在被调查的旅行者中，有多少只去过非洲而没去过亚洲？

(b) 在被调查的旅行者中，有多少至少去过非洲或者亚洲其中一个大洲？

(c) 在被调查的旅行者中，有多少既没去过非洲也没去过亚洲？

解：

在韦恩图中，矩形区域代表所有的被调查的旅行者，两个圆形区域分别代表去过亚洲和非洲的旅行者。阴影区域代表既去过非洲又去过亚洲的旅行者。

(a) 这一题描述的集合指的是左侧的圆形区域除去阴影区域留下的区域。也就是把阴影区域从第一个圆形区域中剔除—— $93 - 70 = 23$ ，也就是说有 23 位旅行者去过非洲但没去过亚洲。

(b) 这一题描述的集合就是两个圆形区域共同组成的一个区域。所以我们应该把 93 和 155 这两个数加起来。但是中间的去过两个大洲 70 个旅行者在 $93 + 155$ 的计算过程中被统计了两次，所以我们要从和中减去 70，即：

$$93 + 155 - 70 = 178$$

(c) 这一题描述的集合是矩形区域内除去两个圆形区域外的区域。我们假设一共有 N 个这样的旅行者。请注意整个矩形区域由两部分组成：圆形外部的区域和圆形内部的区域。第一部分中有 N 个旅行者，第二部分中有 $93 + 155 - 70 = 178$ 个旅行者，因此

$$250 = N + 178$$

解这个方程得

$$N = 250 - 178 = 72$$

第二章 综合能力测试五套题

第一套

section 1

1. n is a positive integer, $x=7n+2$, and $y=6n+3$

Quantity A: The ones digit of $x+y$

Quantity B: 5

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.
2. $0 < x < y < 1$

Quantity A: $1-y$

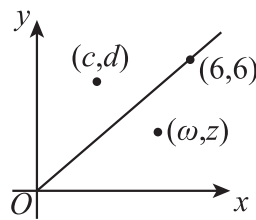
Quantity B: $y-x$

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

3. Quantity A: $w+d$

Quantity B: $c+z$

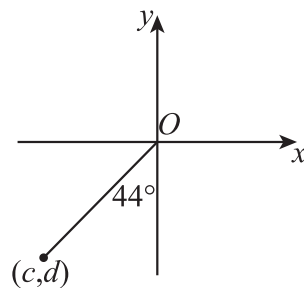
- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.



4. Quantity A: c

Quantity B: d

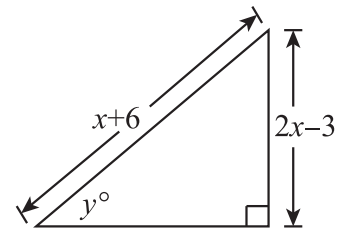
- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.



5. Set S consists of all positive integers less than 81 that are not equal to the square of an integer.
Quantity A: The number of integers in set S
Quantity B: 72
A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
6. n is an integer, and k is not an integer.
 $0 < k < n < k + 2$
Quantity A: n
Quantity B: $k + 1$
A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
7. Set T consists of the integers from 11 through 100, inclusive.
Quantity A: 4 times the number of integers in set T that are multiples of 4
Quantity B: 5 times the number of integers in set T that are multiples of 5
A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
8. For 5 hours, a photocopier copied at a constant rate of 2 pages every 3 seconds.
Quantity A: The number of pages the photocopier copied in the 5 hours
Quantity B: 12,000
A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
9. Marie earned \$0.75 for every mile she walked in a charity walkathon. If she earned a total of \$18.00 at that rate, how many miles did she walk?
A. 13.5 B. 17.8 C. 21 D. 22.5 E. 24

10. In the xy -plane, the point with coordinates $(-6, -7)$ is the center of circle C. The point with coordinates $(-6, 5)$ lies inside C, and the point with coordinates $(8, -7)$ lies outside C. If m is the radius of C and m is an integer, what is the value of m ?
11. In the xy -plane, triangular region R is bounded by the lines $x = 0$, $y = 0$, and $4x + 3y = 60$. Which of the following points lie inside region R? Indicate all such points
 A. $(2, 18)$ B. $(5, 12)$ C. $(10, 7)$ D. $(12, 3)$ E. $(15, 2)$
12. In the triangle, if $y = 30$, then $x =$

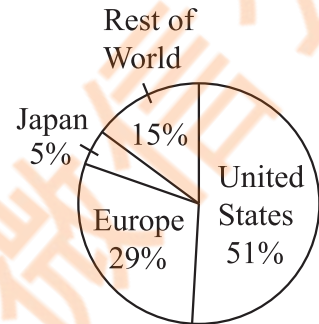
- A. 3
 B. 4
 C. 5
 D. 8
 E. 9



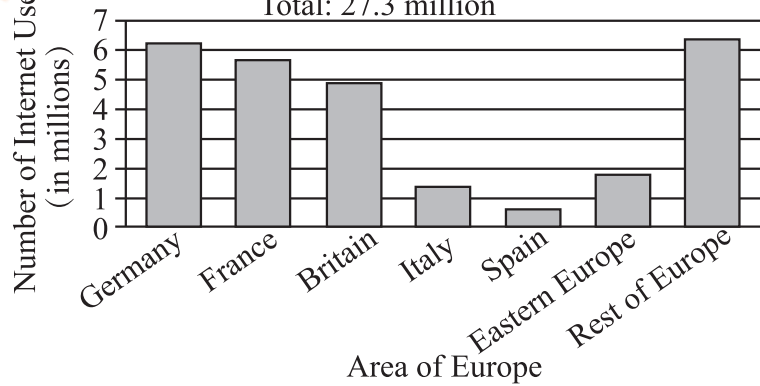
Questions 13–16 are based on the following data.

INTERNET USE IN YEAR X

Distribution of Internet Users Worldwide, by Region



Number of Internet Users in Europe
 Total: 27.3 million



13. Which of the following is closest to the percent of the Internet users in Europe who were in countries other than Germany, France, Britain, Italy, and Spain?
 A. 30% B. 34% C. 38% D. 42% E. 46%
14. Approximately what was the range of the numbers of Internet users in the seven areas of Europe shown in the bar graph?
 A. 6.5 million B. 5.5 million
 C. 3.5 million D. 3.0 million
 E. 2.5 million

15. The number of Internet users in the United States was approximately how many times the number of Internet users in Italy?

- A. 5 B. 15 C. 20 D. 25 E. 35

16. Based on the information given, which of the following statements about Internet use in year X must be true?

Indicate all such statements

A. The United States had more Internet users than all other countries in the world combined

B. Spain had fewer Internet users than any country in Eastern Europe.

C. Germany and France combined had more than $\frac{1}{3}$ of the Internet users in Europe.

17. If $n = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17$, then which of the following statements must be true?

I. n^2 is divisible by 600

II. $n+19$ is divisible by 19

III. $(n+4)/2$ is even

A. I only B. II only C. III only D. I and III

E. None of the above

18. For each integer $n > 1$, let $A(n)$ denote the sum of the integers from 1 to n .

For example, $A(100) = 1 + 2 + 3 + \dots + 100 = 5,050$. What is the value of $A(200)$?

- A. 10,100 B. 15,050 C. 15,150 D. 20,100 E. 21,500

19.



On the number line shown above, the tick marks are equally spaced. Which of the following statements about the numbers x , y , and z must be true?

Indicate all such statements.

A. $xyz < 0$ B. $x + z = y$ C. $z(y - x) > 0$

20. If n and m are positive integers and m is a factor of 2^6 , what is the greatest possible number of integers that can be equal to both $3n$ and $\frac{2^6}{m}$?

- A. Zero B. One C. Three D. Four E. Six

section 2

1. Quantity A: The greatest possible value of $\frac{2}{x-y}$, where $9 \leq x \leq 12$ and $-2 \leq y \leq 8$

Quantity B: 2

- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
2. When the even integer n is divided by 7, the remainder is 3.

Quantity A: The remainder when n is divided by 14.

Quantity B: 10

- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
3. $x < y < z$

Quantity A: $\frac{x+y+z}{3}$

Quantity B: y

- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
4. n is a positive integer.

Quantity A: $\frac{1}{3^n}$

Quantity B: $3\left(\frac{1}{4^n}\right)$

- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.

5. At a sale, the cost of each tie was reduced by 20 percent and the cost of each belt was reduced by 30 percent.

Quantity A: The percent reduction on the total cost of 1 tie and 2 belts

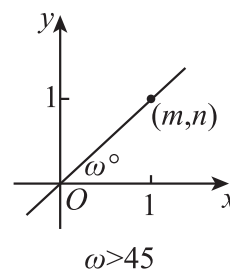
Quantity B: 25%

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

6. Quantity A: $m+n$

Quantity B: $2m$

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.



7. A line in the xy -plane contains the points $(5, 4)$ and $(2, -1)$

Quantity A: The slope of the line

Quantity B: 0

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

8. Points R, S, and T lie on a number line, where S is between R and T. The distance between R and S is 6, and the distance between R and T is 15.

Quantity A: The distance between the mid points of line segments RS and ST

Quantity B: The distance between S and T

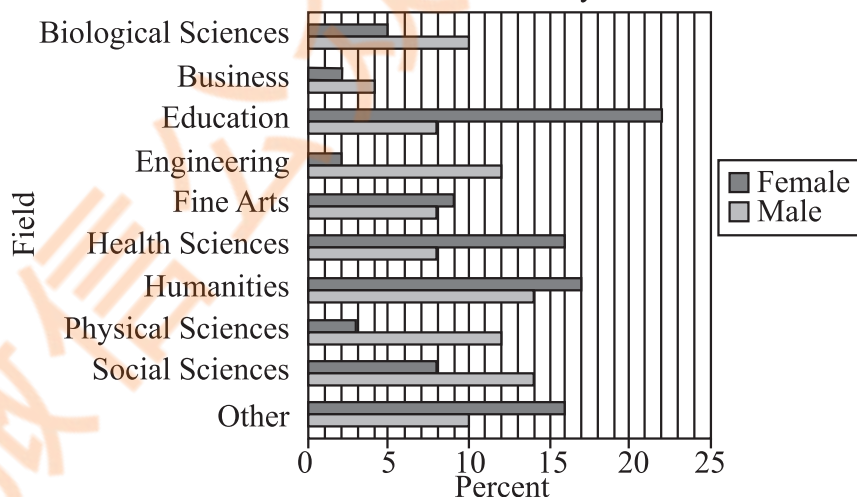
- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.
9. Each week a salesperson receives a commission that is equal to 12 percent of the first \$500 of sales plus 20 percent of additional sales. If the salesperson received a commission of \$380 last week, what was the total amount of the sales that the salesperson made last week?

A. \$1,600 B. \$1,660 C. \$1,860 D. \$2,000 E. \$2,100

10. Greg's weekly salary is \$187, which is 15 percent less than Karla's weekly salary. If Karla's weekly salary increases by 10 percent, by what percent must Greg's weekly salary increase in order to equal Karla's new weekly salary? Give your answer to the nearest tenth of a percent.
11. On his trip to the airport, Grant drove a total of 9 miles. His average speed on the trip was x miles per hour, where $30 \leq x \leq 35$. Which of the following could be the total number of minutes that Grant took to make the trip? Indicate all such numbers of minutes.
- A. 15 B. 16 C. 17 D. 18 E. 19
12. If $x < y < 0$, which of the following inequalities must be true?
- A. $y+1 < x$ B. $y-1 < x$ C. $xy^2 < x$ D. $xy < y^2$ E. $xy < x^2$

Questions 13–15 are based on the following data.

PERCENT OF FEMALE FACULTY AND PERCENT OF MALE FACULTY
AT UNIVERSITY X, BY FIELD
Total female faculty: 200
Total male faculty: 250



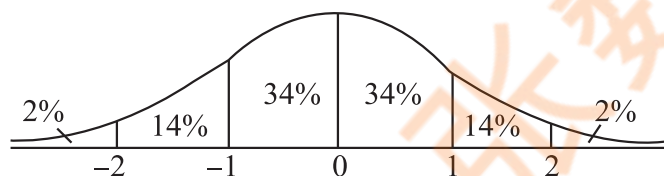
13. There are 275 students in the field of engineering at University X. Approximately what is the ratio of the number of students in engineering to the number of faculty in engineering?
- A. 8 to 1 B. 10 to 1 C. 12 to 1 D. 14 to 1 E. 20 to 1
14. Approximately what percent of the faculty in humanities are male?
- A. 35% B. 38% C. 41% D. 45% E. 51%
15. For the biological sciences and health sciences faculty combined, $\frac{1}{3}$ of the female and $\frac{2}{9}$ of the male faculty members are tenured professors. What fraction of all the faculty members in those two fields combined are tenured professors?

Give your answer as a fraction.

16. Of the 20 lightbulbs in a box, 2 are defective. An inspector will select 2 lightbulbs simultaneously and at random from the box. What is the probability that neither of the lightbulbs selected will be defective?

Give your answer as a fraction.

17.



The figure above shows the standard normal distribution, with mean 0 and standard deviation 1, including approximate percents of the distribution corresponding to the six regions shown. The random variable Y is normally distributed with a mean of 470, and the value $Y = 340$ is at the 15th percentile of the distribution. Of the following, which is the best estimate of the standard deviation of the distribution?

- A. 125 B. 135 C. 145 D. 155 E. 165
18. Three different committees consist of 8, 10, and 13 people, respectively. If N is the total number of different people in the 3 committees combined, what is the least possible value of N ?
- A. 13 B. 15 C. 21 D. 24 E. 31
19. The range of the heights of the female students in a certain class is 13.2 inches, and the range of the heights of the male students in the class is 15.4 inches. Which of the following statements individually provide(s) sufficient additional information to determine the range of the heights of all the students in the class?

Indicate all such statements.

- A. The tallest male student in the class is 5.8 inches taller than the tallest female student in the class.
- B. The median height of the male students in the class is 1.1 inches greater than the median height of the female students in the class.
- C. The average (arithmetic mean) height of the male students in the class is 4.6 inches greater than the average height of the female students in the class.
20. How many integers from 1 to 900 inclusive have exactly 3 positive divisors?
- A. 10 B. 14 C. 15 D. 29 E. 30

第二套

section 1

1. n is a positive integer.

Quantity A: The remainder when 3^{4n} is divided by 10

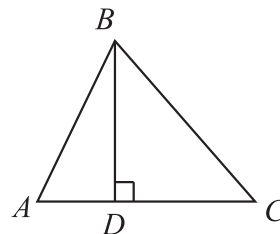
Quantity B: 1

- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.

2. Quantity A: BD/AB

Quantity B: BC/DC

- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.



3. Quantity A: The sum of the odd integers from 1 to 199

Quantity B: The sum of the even integers from 2 to 198

- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
4. x is a positive integer. k is the remainder when $x^3 - x$ is divided by 3.

Quantity A: k

Quantity B: 1

- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
5. r , s , and t are three consecutive odd integers such that $r < s < t$.

Quantity A: $r + s + 1$

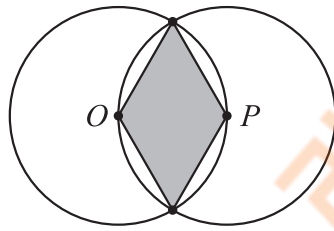
Quantity B: $s + t - 1$

- A. Quantity A is greater.

- B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
6. Quantity A: the number of two-digit positive integers for which the units digit is not equal to the tens digit
Quantity B: 80
A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
7. Set S consists of 5 objects.
Quantity A: The number of subsets of set S that consist of 1 object
Quantity B: The number of subsets of set S that consist of 4 objects
A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
8. In a group of 45 children, 60 percent of the children are boys, and 60 percent of the children are left-handed.
Quantity A: Number of boys who are left-handed
Quantity B: 8
A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
9. The sum of the annual salaries of the 21 teachers at School X is \$781,200. Twelve of the 21 teachers have annual salary that is less than \$37,000.
Quantity A: The average (arithmetic mean) of the annual salaries of the teachers
Quantity B: The median of the annual salaries of the teachers at School X
A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.

10. The greatest of the 21 positive integers in a certain list is 16. The median of the 21 integers is 10. What is the least possible average (arithmetic mean) of the 21 integers?
- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7 E. 8

11.

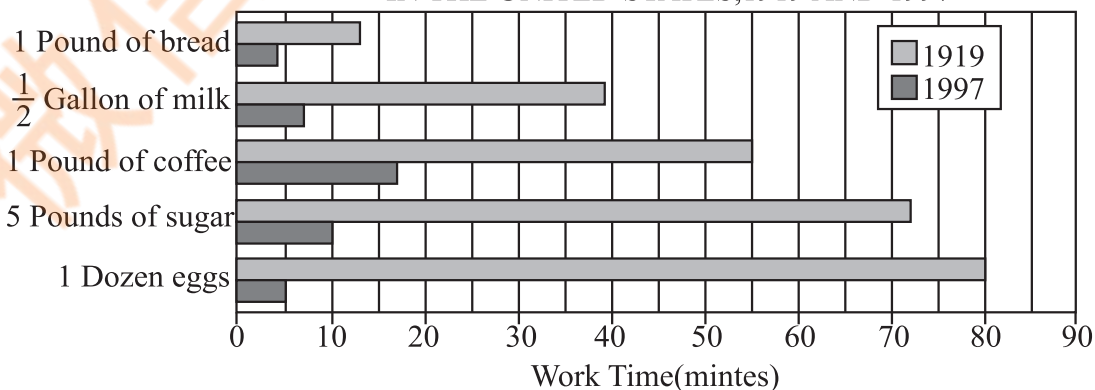


In the figure above, O and P are the centers of the two circles. If each circle has radius r , what is the area of the shaded region?

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}r^2$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}r^2$ C. $\sqrt{2}r^2$ D. $\sqrt{3}r^2$ E. $2\sqrt{3}r^2$
12. In a distribution of 850 different measurements, x centimeters is at the 73rd percentile. If there are 68 measurements in the distribution that are greater than y centimeters but less than x centimeters, then y is approximately at what percentile in the distribution?
- A. 45th B. 50th C. 55th D. 60th E. 65th

Questions 13–16 are based on the following data.

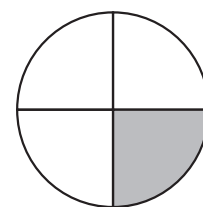
WORK TIME REQUIRED TO PAY FOR SELECTED FOOD ITEMS*
IN THE UNITED STATES, 1919 AND 1997



For each year, the work time, in hours, required to pay for a food item is the average price of the food item divided by the average hourly wage for rank-and-file manufacturing workers. The work time in the graph is given in minutes.

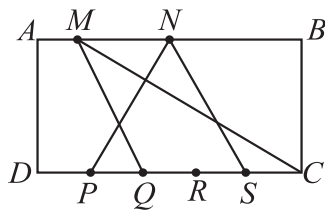
13. In 1997, at the rates shown in the graph, the work time required to pay for which of the following food items was greatest?
- A. 10 pounds of bread B. 5 gallons of milk
C. 3 pounds of coffee D. 20 pounds of sugar

- E. 5 dozen eggs
14. If the average hourly wage of the rank-and-file manufacturing worker in 1919 was \$0.55, which of the following is closest to the average price of 1/2 gallon of milk in 1919?
- A. 0.80 B. 0.65 C. 0.50 D. 0.35 E. 0.20
15. At the rates shown in the graph, which of the following is closest to the number of hours of work time that was required to pay for 20 kilograms of sugar in 1919? (1 kilogram equals 2.2 pounds, rounded to the nearest 0.1 pound.)
- A. 11 B. 14 C. 20 D. 31 E. 53
16. Eight hours of work time paid for approximately how many more dozen eggs in 1997 than it did in 1919?
- A. 50 B. 70 C. 90 D. 110 E. 130
17. The circle shown has an area of 49π and is divided into four sectors, all of which have a central angle of the same measure. What is the perimeter of the shaded region?
- A. $14 + \frac{7\pi}{6}$ B. $14 + \frac{8\pi}{6}$ C. $14 + \frac{7\pi}{4}$
- D. $14 + \frac{7\pi}{2}$ E. $14 + 7\pi$
18. If the length of each side of an equilateral triangle were increased by 50 percent, what would be the percent increase in the area?
- A. 75% B. 100% C. 125% D. 150% E. 225%
19. A construction company will produce identical metal supports in the shape of a right triangle with legs of length 3 feet and 4 feet. The three sides of each triangular support are to be constructed of metal stripping. If the company has a total of 6,000 feet of metal stripping and there is no waste of material in the construction of the supports, what is the greatest possible number of supports that the company can produce?
- A. 428 B. 500 C. 545 D. 600 E. 1000
20. If $x > 0$, and two sides of a certain triangle have lengths $2x+1$ and $3x+4$ respectively, which of the following could be the length of the third side of the triangle?
- Indicate all possible lengths.
- A. $4x+5$ B. $x+2$ C. $6x+1$ D. $5x+6$ E. $2x+17$



section 2

1.



In rectangle $ABCD$, side DC is divided into five equal segments by points P , Q , R and S .

Quantity A: The area of $\triangle MCQ$

Quantity B: The area of $\triangle NSP$

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.
2. $xy=8$ and $x=y-2$

Quantity A: y

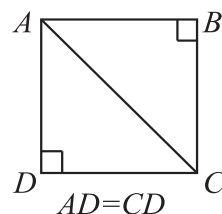
Quantity B: 0

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

3. Quantity A: AB

Quantity B: BC

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.



4. $x^2y > 0$

$xy^2 < 0$

Quantity A: x

Quantity B: y

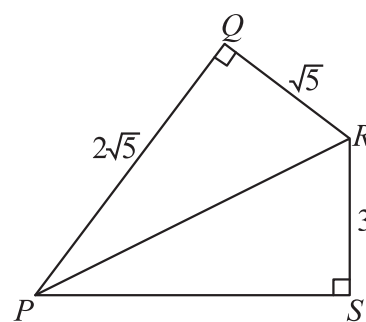
- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

5. A, B, and C are three rectangles. The length and width of rectangle A are 10 percent greater and 10 percent less, respectively, than the length and width of rectangle C. The length and width of rectangle B are 20 percent greater and 20 percent less, respectively, than the length and width of rectangle C.

Quantity A: The area of rectangle A

Quantity B: The area of rectangle B

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.
6. Quantity A: The area of triangle PQR
 Quantity B: The area of triangle PSR
- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.



7. Magdalena took 1 hour to complete a task that had 60 steps. She took 20 minutes to complete the first 30 steps of the task.

Quantity A: The average number of seconds per step that Magdalena took to complete the remaining 30 steps.

Quantity B: 80

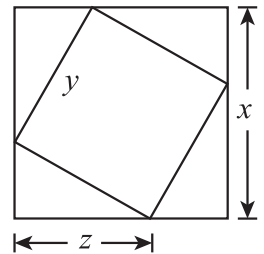
- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.
8. Three consecutive integers have a sum of -84 .
- Quantity A: The least of the three integers
 Quantity B: -28
- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

9. In a certain sequence of numbers, each term after the first term is found by multiplying the preceding term by 2 and then subtracting 3 from the product. If the 4th term in the sequence is 19, which of the following numbers are in the sequence?

Indicate all such numbers.

- A. 5 B. 8 C. 11 D. 16 E. 35
10. If \$5,000,000 is the initial amount placed in an account that collects 7% annual interest, which of the following compounding rates would produce the largest total amount after two years?
- A. compounding annually
B. compounding quarterly
C. compounding monthly
D. compounding daily
E. All four of these would produce the same total
11. Tuk weighs 60 percent more than Kim, Lee weighs 50 percent less than Tuk, and Pat weighs 25 percent more than Lee. If Pat weighs 126 pounds, what is Kim's weight?

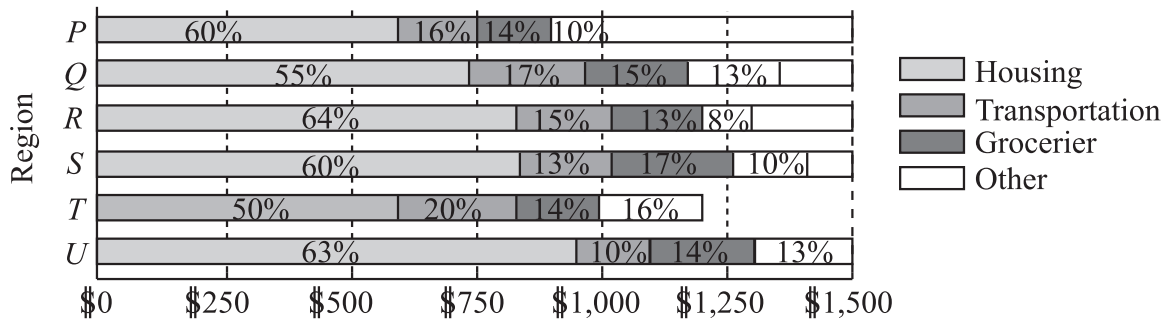
12. The figure shows a smaller square with sides of length y inscribed in a larger square with sides of length x . Which of the following relationships between x , y , and z must be true?



- A. $x^2 = y^2 + z^2$ B. $x^2 = y^2 - z^2$
C. $(x-z)^2 = y^2$ D. $(x-y)^2 = z^2$
E. $(x-z)^2 + z^2 = y^2$

Questions 13–15 are based on the following data.

LIVING EXPENSES FOR A TYPICAL HOUSEHOLD IN SELECTED REGIONS
APRIL 2004



13. In April 2004 the dollar amount of the Housing expense in region Q was less than the dollar amount of Housing expense in which of the other region?

Indicate all such regions.

A. P B. R C. S D. T E. U

14. In region P, the expense in the category Other was what fraction of the total of the expenses in the three nonhousing categories?

A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{4}$ E. $\frac{1}{3}$

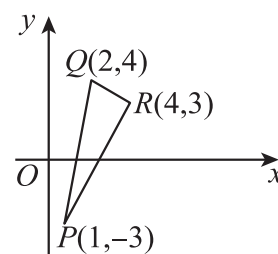
15. For the region in which the range of the dollar amounts of the four expenses categories was least, what percent of total living expenses was the Transportation expense in that region?

A. 10% B. 15% C. 16% D. 17% E. 20%

16. Which of the following statements about triangle PQR shown in the xy -plane are true?

Indicate all such answers.

- A. PQR is a right triangle.
B. The area of PQR is $15/2$.
C. PQR is an isosceles triangle.



17. How many integers between 1 and 10^{21} are such that the sum of their digits is 2?

A. 190 B. 210 C. 211 D. 230 E. 231

18. A positive integer is a palindrome if it reads exactly the same from right to left as it does from left to right. For example, 5 and 66 and 373 are all palindromes. How many palindromes are there between 1 and 1,000, inclusive?

19. Of the students in a school, 20 percent are in the science club and 30 percent are in the band. If 25 percent of the students in the school are in the band but are not in the science club, what percent of the students who are in the science club are not in the band?

A. 5% B. 20% C. 25% D. 60% E. 75%

20. Line k lies in the xy -plane. The x -intercept of line k is -4 , and line k passes through the midpoint of the line segment whose endpoints are $(2, 9)$ and $(2, 0)$. What is the slope of line k ?

Give your answer as a fraction.

第三套

section 1

1. $S = \{1, 4, 7, 10\}$ $T = \{2, 3, 5, 8, 13\}$ x is a number in set S , and y is a number in set T .

Quantity A: The number of different possible values of the product xy

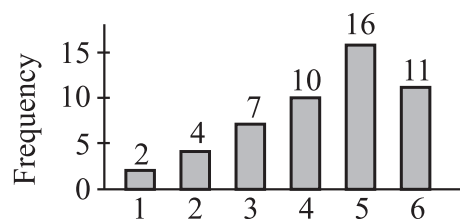
Quantity B: 20

- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
2. In a group of 200 workers, 10 percent of the males smoke, and 49 percent of the females smoke.

Quantity A: Total number of workers who smoke

Quantity B: 59

- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.



3. The graph above shows the frequency distribution of 50 integer values varying from 1 to 6.

Quantity A: The average (arithmetic mean) of the 50 values

Quantity B: The median of the 50 values

- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.

4. In the figure, the diameter of the circle is 10.

Quantity A: The area of quadrilateral ABCD

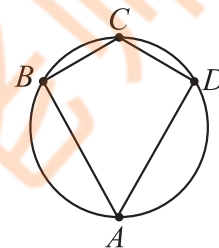
Quantity B: 40

A. Quantity A is greater.

B. Quantity B is greater.

C. The two quantities are equal.

D. The relationship cannot be determined from the information given.



5. The radius of circle A is 12 greater than the radius of circle B.

Quantity A: The circumference of circle A minus the circumference of circle B

Quantity B: 72

A. Quantity A is greater.

B. Quantity B is greater.

C. The two quantities are equal.

D. The relationship cannot be determined from the information given.

6. Quantity A: x percent of $100x$

Quantity B: x^2

A. Quantity A is greater.

B. Quantity B is greater.

C. The two quantities are equal.

D. The relationship cannot be determined from the information given.

7. $x < 0$

Quantity A: $(x+4)(y+3)$

Quantity B: $(x+3)(y+4)$

A. Quantity A is greater.

B. Quantity B is greater.

C. The two quantities are equal.

D. The relationship cannot be determined from the information given.

8. x is an integer greater than 1.

Quantity A: 3^{x+1}

Quantity B: 4^x

A. Quantity A is greater.

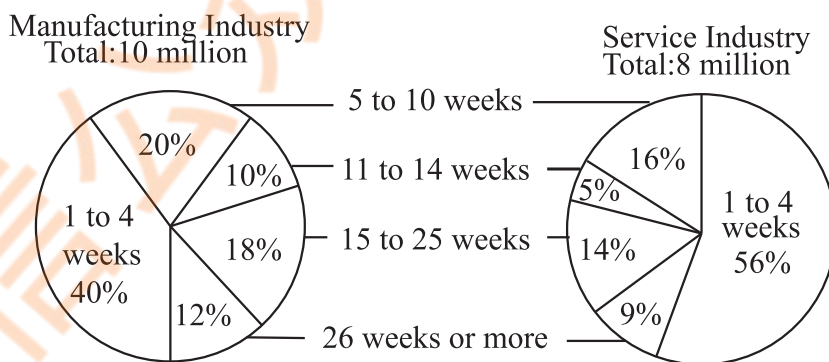
B. Quantity B is greater.

C. The two quantities are equal.

D. The relationship cannot be determined from the information given.

9. In the game of Dubblefud, red chips, blue chips and green chips are each worth 2, 4 and 5 points respectively. In a certain selection of chips, the product of the point values of the chips is 16,000. If the number of blue chips in this selection equals the number of green chips, how many red chips are in the selection?
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5
10. If $\frac{17+m}{43+m} = \frac{2}{3}$, what is the value of m ?
11. If 55 percent of the people who purchase a certain product are female, what is the ratio of the number of females who purchase the product to the number of males who purchase the product?
- A. 11 to 9 B. 10 to 9 C. 9 to 10 D. 9 to 11 E. 5 to 9
12. The legs of a right triangle are in the ratio of 3 to 1. If the length of the hypotenuse of the triangle is $\sqrt{40}$, then the perimeter of the triangle is between
- A. 14 and 15 B. 13 and 14 C. 12 and 13 D. 11 and 12 E. 10 and 11

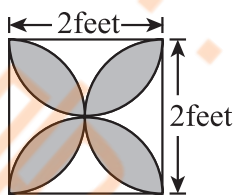
Questions 13–16 are based on the following data.



Note: The circle graphs show the distributions of workers who were unemployed for at least 1 week in 2003, by length of unemployment, rounded to the nearest week.

13. In the circle graphs, the degree measure of the central angle of the sector representing the number of workers unemployed for 11 to 14 weeks is how much greater in the manufacturing industry graph than in the service industry graph?
- A. 5° B. 10° C. 15° D. 18° E. 20°
14. Which of the following could be the median length of unemployment, in weeks, for manufacturing industry workers who were unemployed for at least 1 week?
- A. 4 B. 8 C. 12 D. 16 E. 20

15. If one of the workers in the manufacturing and service industries who were unemployed for at least 1 week will be randomly selected, what is the probability that the person selected will be a service industry worker who was unemployed for 26 weeks or more?
- A. 0.04 B. 0.09 C. 0.21 D. 0.40 E. 0.90
16. The ratio of the number of manufacturing industry workers who were unemployed for 5 to 10 weeks to the number of service industry workers who were unemployed for 5 to 10 weeks is closest to which of the following?
- A. 5 to 4 B. 6 to 5 C. 3 to 2 D. 5 to 2 E. 7 to 6



17. The figure shows the design of a mosaic tile in which the four sides of the square are the diameters of four intersecting semicircles. Small blue stones are to be placed in the shaded regions and will cover 95 percent of the area of these regions. If each side of the square has length 2 feet, approximately how many square feet of the tile will be covered by the blue stones?
- A. 1.5 B. 1.7 C. 2.2 D. 2.5 E. 2.8
18. Eight points are equally spaced on a circle. If 4 of the 8 points are to be chosen at random, what is the probability that a quadrilateral having the 4 points chosen as vertices will be a square?
- A. $1/70$ B. $1/35$ C. $1/7$ D. $1/4$ E. $1/2$
19. Consider the following list of numbers that represent the number of text messages that Geraldine received on 10 consecutive days: 10, 9, 1, 3, 7, 7, 8, 3, 4, 3. Which of the following statements concerning this set of data are true? Indicate all such lengths.
- A. The median is less than the average (arithmetic mean).
 B. The median is less than the mode.
 C. The mode is less than the average.
 D. The average of the median and the mode is between 4 and 4.5.
20. A veterinarian has 70 clients who own cats, dogs, or both. Of these clients, 36 own cats, including 20 clients who own both cats and dogs. Which of the following statements must be true?

Indicate all such statements.

- A. There are 54 clients who own dogs.
- B. There are 34 clients who own dogs but not cats.
- C. There are 16 clients who own cats but not dogs.

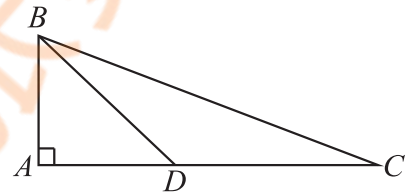
section 2

1. $AB=12$, $AC=30$, and $AD= \frac{2}{5}(AC)$.

Quantity A: The measure of angle BDC

Quantity B: 120

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.

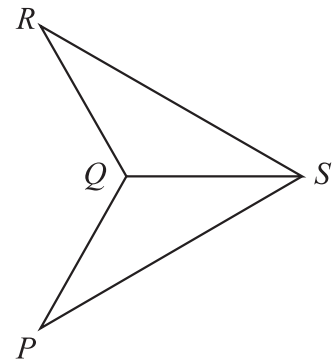


2. $PQ=QR=QS$

Quantity A: PS

Quantity B: RS

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.



3. Among the 9,000 people attending a football game at College C, there were x students from College C and y students who were not from College C.

Quantity A: The number of people attending the game who were not students

Quantity B: $9,000 - x - y$

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.

4. Events A and B are independent. The probability that events A and B both occur is 0.6.

Quantity A: The probability that event A occurs

Quantity B: 0.3

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.

- C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
5. n is an even negative integer.
- Quantity A: $\left(\frac{1}{3}\right)^n$
Quantity B: $(-3)^n$
- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
6. $x < 0$
- Quantity A: x^5
Quantity B: x^4
- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
7. $|2y - 5| < 1$
- Quantity A: y
Quantity B: 1
- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
8. In a fruit basket containing apples, pears, and oranges, the ratio of the number of apples to the number of pears is 3 to 4, and the ratio of the number of pears to the number of oranges is 5 to 3.
- Quantity A: The number of apples in the fruit basket.
Quantity B: The number of oranges in the fruit basket
- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.

9. The integer v is greater than 1. If v is the square of an integer, which of the following numbers must also be the square of an integer?

Indicate all such numbers.

- A. $81v$
 B. $25v + 10\sqrt{v} + 1$
 C. $4v^2 + 4\sqrt{v} + 1$
10. What is the sum of all possible solutions to the equation below?

$$\sqrt{2x^2 - x - 9} = x + 1$$

- A. -2 B. 2 C. 3 D. 5 E. 6
11. If p and n are prime numbers, $p - n = 4$, and $\frac{3}{2} < \frac{p}{n} < 2$, what is the value of p ?

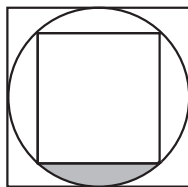
Questions 12–14 are based on the following data.

PERSONAL INCOME AND PUBLIC EDUCATION
 REVENUE IN COUNTRY X (in constant 1998 dollars)

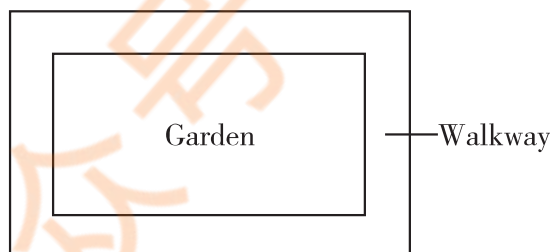
Year	Per Capita Income	Revenue per Student
1930	\$ 6,610	\$ 710
1940	6,960	950
1950	9,540	1,330
1960	12,780	2,020
1970	17,340	3,440
1980	20,150	4,400
1990	24,230	5,890

12. From 1930 to 1990, approximately what was the average increase per year in per capita income?
 A. \$ 150 B. \$ 200 C. \$ 250 D. \$ 300 E. \$ 350
13. In 1950 the revenue per student was approximately what percent of the per capita income?
 A. 8% B. 11% C. 14% D. 17% E. 20%
14. For how many of the seven years shown was the revenue per student less than $\frac{1}{5}$ of the per capita income for the year?
 A. one B. two C. three D. four E. five

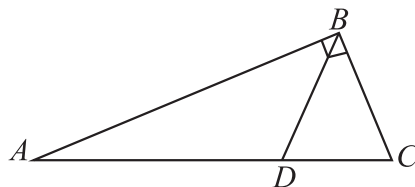
15. The area of circle W is 16π and the area of circle Z is 4π . What is the ratio of the circumference of W to the circumference of Z ?
- A. 2 to 1 B. 4 to 1 C. 8 to 1 D. 16 to 1 E. 32 to 1



16. In the figure above, if the square inscribed in the circle has an area of 16, what is the area of the shaded region?
- A. $2\pi - 1$ B. $2\pi - 4$ C. $4\pi - 2$
 D. $4\pi - 4$ E. $8\pi - 4$



17. The figure above represents a rectangular garden with a walkway around it. The garden is 18 feet long and 12 feet wide. The walkway is uniformly 3 feet wide, and its edges meet at right angles. What is the area of the walkway?
18. What is the length of a diagonal of a rectangle that has width 5 and perimeter 34?
19. Which of the following statements individually provide(s) sufficient additional information to determine the area of triangle ABC above? Indicate all such statements.



The length of AB is $10\sqrt{3}$

- A. DBC is an equilateral triangle.
 B. ABD is an isosceles triangle.
 C. The length of BC is equal to the length of AD .
 D. The length of BC is 10.
 E. The length of AD is 10.

20. The company at which Mark is employed has 80 employees, each of whom has a different salary. Mark's salary of \$43,700 is the second-highest salary in the first quartile of the 80 salaries. If the company were to hire 8 new employees at salaries that are less than the lowest of the 80 salaries, what would Mark's salary be with respect to the quartiles of the 88 salaries at the company, assuming no other changes in the salaries?
- A. The fourth-highest salary in the first quartile
 - B. The highest salary in the first quartile
 - C. The second-lowest salary in the second quartile
 - D. The third-lowest salary in the second quartile
 - E. The fifth-lowest salary in the second quartile

第四套

section 1

1. Quantity A: $950^{2,000}$

Quantity B: $10^{6,000}$

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.

2. Today the price of a table was reduced by 20 percent from what it was yesterday, and the price of a lamp was reduced by 30 percent from what it was yesterday.

Quantity A: The dollar amount of the reduction in the price of the table

Quantity B: The dollar amount of the reduction in the price of the lamp

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.

3. $x > 0$

Quantity A: 0.5% of x

Quantity B: $\frac{1}{2}x$

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.

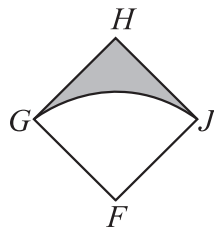
4. p is the probability that event E will occur, and s is the probability that event E will not occur.

Quantity A: $p + s$

Quantity B: ps

- A. Quantity A is greater.
- B. Quantity B is greater.
- C. The two quantities are equal.
- D. The relationship cannot be determined from the information given.

5. In a set of 24 positive integers, 12 of the integers are less than 50. The rest are greater than 50.
 Quantity A: The median of the 24 integers
 Quantity B: 50
 A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.
6. A circle is inscribed in a square with sides of length 5.
 Quantity A: The circumference of the circle
 Quantity B: 15
 A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given
7. Square $FGHJ$ has sides of length x . Region FGJ is a sector of the circle with center F .



- Quantity A: The area of the shaded region.
 Quantity B: $\frac{x^2}{4}$
 A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.
8. In a probability experiment, G and H are independent events. The probability that G will occur is r , and the probability that H will occur is s , where both r and s are greater than 0.
 Quantity A: The probability that either G will occur or H will occur, but not both
 Quantity B: $r + s - rs$

- E. Father's Day
G. Thanksgiving
- F. Graduation
H. Halloween

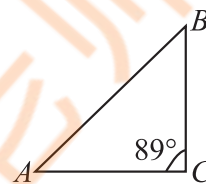
13. Approximately what was the percent increase in the annual revenue from all greeting card sales from 1990 to 1993?
A. 50% B. 45% C. 39% D. 28% E. 20%
14. In 1993 the number of Valentine's Day cards sold was approximately how many times the number of Thanksgiving cards sold?
A. 20 B. 30 C. 40 D. 50 E. 60
15. In 1993 a card company that sold 40 percent of the Mother's Day cards that year priced its cards for that occasion between \$1.00 and \$8.00 each. If the revenue from sales of the company's Mother's Day cards in 1993 was r million dollars, which of the following indicates all possible values of r ?
A. $155 < r < 1,240$ B. $93 < r < 496$
C. $93 < r < 326$ D. $62 < r < 744$
E. $62 < r < 496$
16. List K consists of the numbers $-10, -5, 0, 5,$ and 10 . Which of the following lists of numbers have the same range as the numbers in list K?
Indicate all such lists.
A. $-15, -1, 0, 1, 15$ B. $-7, -4, -2, 1, 13$
C. $0, 1, 2, 5, 8, 10$ D. $2, 3, 5, 15, 19, 22$
E. $4, 5, 6, 24$
17. If the product of 7 consecutive integers is equal to the median of the integers, what is the least of the 7 integers?
18. In a graduating class of 236 students, 142 took algebra and 121 took chemistry. What is the greatest possible number of students that could have taken both algebra and chemistry?
19. How many 6-digit integers greater than 400,000 can be formed such that each of the digits 2, 3, 4, 5, 6, and 7 is used once in each 6-digit integer?
A. 240 B. 480 C. 720 D. 960 E. 1,440
20. In right triangle ABC, the ratio of the lengths of the two legs is 2 to 5. If the area of triangle ABC is 20, what is the length of the hypotenuse?
A. 7 B. 10 C. $4\sqrt{5}$ D. $\sqrt{29}$ E. $2\sqrt{29}$

section 2

1. Quantity A: Length of AB

Quantity B: Length of BC

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.



2. n is a positive integer that is divisible by 6.

Quantity A: The remainder when n is divided by 12

Quantity B: The remainder when n is divided by 18

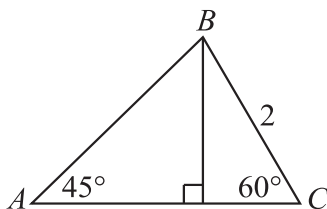
- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

3. For the 500 measurements obtained in experiment X, the average (arithmetic mean) value is 280 and the value k is at the 75th percentile. For the 500 measurements obtained in experiment Y, the average value is 280 and the value n is at the 75th percentile.

Quantity A: k

Quantity B: n

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.



4. Quantity A: The length of line segment AC

Quantity B: 3

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given

5. $f(x) = 4x^2 + 28x + 49$ for all x .

Quantity A: The number b such that $f(b)$ is the minimum value of f

Quantity B: -3

- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
6. In the xy -plane, line k has slope 2 and passes through the point $(3, r)$.

Quantity A: r

Quantity B: 3

- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
7. The median income of a group of College C graduates six months after graduation was \$3,000 higher than the median income of a group of College D graduates six months after graduation.

Quantity A: The 75th percentile of the incomes of the group of College C graduates six months after graduation

Quantity B: The 75th percentile of the incomes of the group of College D graduates six months after graduation

- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
8. Quantity A: The length of a leg of an isosceles right triangle with area R

Quantity B: The length of a side of a square with area R

- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
9. In the rectangular coordinate system, the point $(3, 1)$ is on the circle with center $(0, -3)$. What is the area of the circle?

- A. 5π B. 7π C. 10π D. 25π E. $\pi\sqrt{7}$

10. Of the 40 specimens of a bacteria in dish, 3 specimens have a certain trait, If 5 specimens are to be selected from the dish at random and without replacement, which of the following represents the probability that only 1 of the 5 specimens selected will have the trait?

- A. $\frac{C_5^1}{C_{40}^3}$ B. $\frac{C_5^1}{C_{40}^5}$ C. $\frac{C_{40}^3}{C_{40}^3}$ D. $\frac{C_3^1 \times C_{37}^4}{C_{40}^3}$ E. $\frac{C_3^1 \times C_{37}^4}{C_{40}^5}$

11. How many positive integers less than 10,000 are such that the product of their digits is 210?

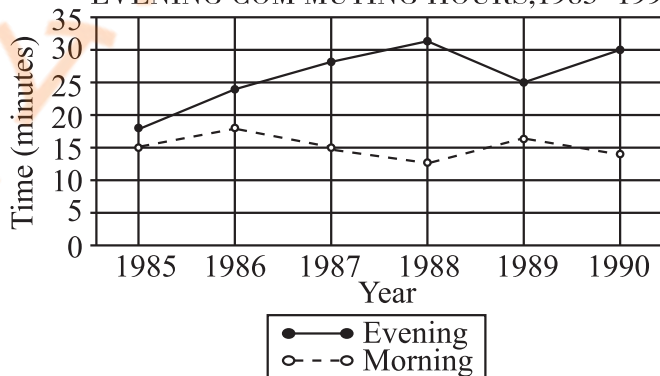
- A. 24 B. 30 C. 48 D. 54 E. 72

12. The radius of circle A is r , and the radius of circle B is $\frac{3}{4}r$. What is the ratio of the area of circle A to the area of circle B?

- A. 1 to 4 B. 3 to 4 C. 4 to 3 D. 9 to 16 E. 16 to 9

Questions 13–14 are based on the following data.

TYPICAL TIME TO TRAVEL 10 MILES ON ROAD H DURING MORNING AND EVENING COMMUTING HOURS, 1985–1990

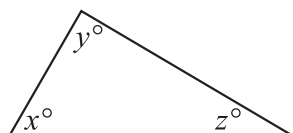


13. For 1988, the typical travel time during the morning commuting hours was approximately what fraction of the typical travel time during the evening commuting hours?

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{5}{9}$ D. $\frac{8}{13}$ E. $\frac{2}{3}$

14. The typical travel time during the morning commuting hours decreased by approximately what percent from 1986 to 1988?

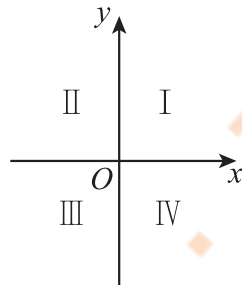
- A. 5% B. 10% C. 25% D. 40% E. 45%



15. In the figure above, what is the value of $\frac{x+y+z}{45}$?

- A. 2 B. 3 C. 4
D. 5 E. 6

16. What is the y -intercept of the graph of the equation $y=2 \cdot |4x-4| -10$?



17. The quadrants of the xy -plane are shown in the figure above. In the xy -plane, line m (not shown) has positive slope and a positive x -intercept. Line m intersects which of the quadrants?

Indicate all such quadrants.

- A. Quadrant I B. Quadrant II C. Quadrant III D. Quadrant IV

18. Diana invested \$61,293 in an account with a fixed annual percent of interest, compounding quarterly. At the end of five full years, she had \$76,662.25 in principal plus interest. Approximately what was the annual percent rate of interest for this account?

- A. 1.2% B. 4.5% C. 10% D. 18% E. 25.2%

19. The “reflection” of a positive integer is obtained by reversing its digits. For example, 321 is the reflection of 123. The difference between a five-digit integer and its reflection must be divisible by which of the following?

- A. 2 B. 4 C. 5 D. 6 E. 9

20. If 2, 4, 6 and 9 are the digits of two 2-digit integers, what is the least possible positive difference between the integers?

- A. 28 B. 27 C. 17 D. 13 E. 9

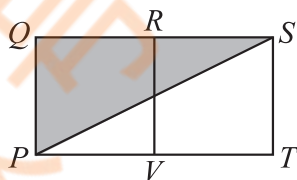
第五套

section 1

1. Quantity A: $\frac{1}{x}$

Quantity B: $\frac{x+1}{x^2}$

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

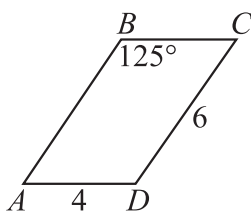


2. In the figure above, squares PQRV and VRST have sides of length 6.

Quantity A: The area of the shaded region

Quantity B: 36

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.



3. In the figure above, ABCD is a parallelogram.

Quantity A: The area of ABCD

Quantity B: 24

- A. Quantity A is greater.
 B. Quantity B is greater.
 C. The two quantities are equal.
 D. The relationship cannot be determined from the information given.

4. Point O is the center of a circle with circumference 12.

Point P is another point inside the circle

Quantity A: The greatest distance from P to a point on the circle plus the least distance from P to a point on the circle.

Quantity B: 4

- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
5. The average (arithmetic mean) of x and z is greater than y , and $x < y < z$,

Quantity A: The average of x , y and z .

Quantity B: The median of x , y and z .

- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
6. In a distribution of the values of the variable x , the 50th percentile is 48.5 and the 60th percentile is 56.5.

Quantity A: The 40th percentile of the distribution of the values of x .

Quantity B: 40.5

- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
7. In a certain club, the average (arithmetic mean) age of the 35 males is 24.2 years and the average of the 25 females is 27.6 years.

Quantity A: The average of all of the people in the club

Quantity B: 25.9

- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.

8. Quantity A: Area of a rectangle with perimeter 20
Quantity B: Area of a triangle with base 5 and height 10.
- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
9. A reading list for a humanities course consists of 10 books, of which 4 are biographies and the rest are novels. Each student is required to read a selection of 4 books from the list, including 2 or more biographies. How many selections of 4 books satisfy the requirements?
- A. 90 B. 115 C. 130 D. 144 E. 195
10. 16,000 has how many positive divisors?
11. Let S be the set of all positive integers n such that n^2 is a multiple of both 24 and 108. Which of the following integers are divisors of every integer n in S ? Indicate all such integers.
- A. 12 B. 24 C. 36 D. 72
12. If $-\frac{m}{19}$ is an even integer, which of the following must be true?
- A. m is a negative number. B. m is a positive number.
C. m is a prime number. D. m is an odd integer.
E. m is an even integer.

Questions 13–15 are based on the following data.

BENEFITS AND INCENTIVES SURVEY RESULTS FOR 600 COMPANIES

						Incentive	Number of Companies Offering Incentive
						Bonus Plan	482
						Profit Sharing	246
						Stock Ownership	78
						Stock Options	60
Benefit	Health Insurance	Flex-time	Disability Insurance	Tuition	Tele-commuting		
Number of Companies Offering Benefit	588	426	387	303	207		

Note: Each shaded cell is the intersection of a benefit column and an incentive row and contains the number of companies (out of the 600 surveyed) that offer both that benefit and that incentive. For example, 195 of the companies surveyed offer both a disability—insurance benefit and a profit—sharing incentive.

13. For how many of the four incentives listed does each of the companies surveyed that offers this incentive also offer a health—insurance benefit?
A. None B. One C. Two D. Three E. Four
14. A certain benefits and incentives package consists of 2 benefits to be chosen from the benefits offered by more than $1/2$ of all the companies surveyed and 1 incentive to be chosen from the incentives offered by more than $1/3$ of all the companies surveyed. How many such packages are possible?
A. 4 B. 6 C. 8 D. 10 E. 12
15. The ratio of the number of companies offering both a stock—options incentive and one of the benefits listed to the number of companies offering that benefit is greatest for which of the five benefits?
A. Health insurance B. Flex—time
C. Disability insurance D. Tuition
E. Telecommuting
16. In the xy -plane, the point $(t, t-1)$ lies on the line with equation $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$. What is the value of t ?
Give your answer as a fraction.
17. If 1 kilometer is approximately 0.62 mile, what is the approximate speed, in kilometers per hour, of a car that is traveling at a speed of 50 miles per hour?
A. 31 B. 41 C. 61 D. 71 E. 81
18. A desert outpost has a water supply that is sufficient to last 21 days for 15 people. At the same average rate of water consumption per person, how many days would the water supply last for 9 people?
A. 28.0 B. 32.5 C. 35.0 D. 37.5 E. 42.0
19. A manager is forming a 6—person team to work on a certain project. From the 11 candidates available for the team, the manager has already chosen 3 to be on the team. In selecting the other 3 team members, how many different combinations of 3 of the remaining candidates does the manager have to choose from?
A. 6 B. 24 C. 56 D. 120 E. 462

20. Of the people in a certain survey, 58 percent were at most 40 years old and 70 percent were at most 60 years old. If 252 of the people in the survey were more than 40 years old and at most 60 years old, what was the total number of people in the survey?
- A. 1,900 B. 2,100 C. 2,400 D. 2,700 E. 3,000

section 2

1. $(1-x)/(x-1)=1/x$

Quantity A: x

Quantity B: $-1/2$

- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
2. $2u+v=14$, $uv=0$
- Quantity A: u
Quantity B: v
- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
3. x , y and z are the lengths of the sides of a triangle.

Quantity A: $x+y+z$

Quantity B: $2z$

- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
4. The average (arithmetic mean) of 4 donations to a charity was \$80. Two of the 4 donations were \$90 and \$60.
- Quantity A: The average of the other 2 donations
Quantity B: \$80
- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.

- D. The relationship cannot be determined from the information given.
5. S is a set of 8 numbers, of which 4 are negative and 4 are positive.
Quantity A: The average (arithmetic mean) of the numbers in S .
Quantity B: The median of the numbers in S .
- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
6. A line in the xy -plane contains the points $(5, 4)$ and $(2, -1)$
Quantity A: The slope of the line
Quantity B: 0
- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
7. List X: 2, 5, s , t ; List Y: 2, 5, t .
The average (arithmetic mean) of the numbers in list X is equal to the average of the numbers in list Y.
- Quantity A: s
Quantity B: 0
- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
8. x is a positive integer. When x is divided by 2, 4, 6 or 8, the remainder is 1.
Quantity A: x
Quantity B: 24
- A. Quantity A is greater.
B. Quantity B is greater.
C. The two quantities are equal.
D. The relationship cannot be determined from the information given.
9. Which of the following integers CANNOT be expressed as the sum of two prime numbers?
- A. 8 B. 9 C. 10 D. 11 E. 12

10. When the positive integer n is divided by 45, the remainder is 18. Which of the following must be a divisor of n ?

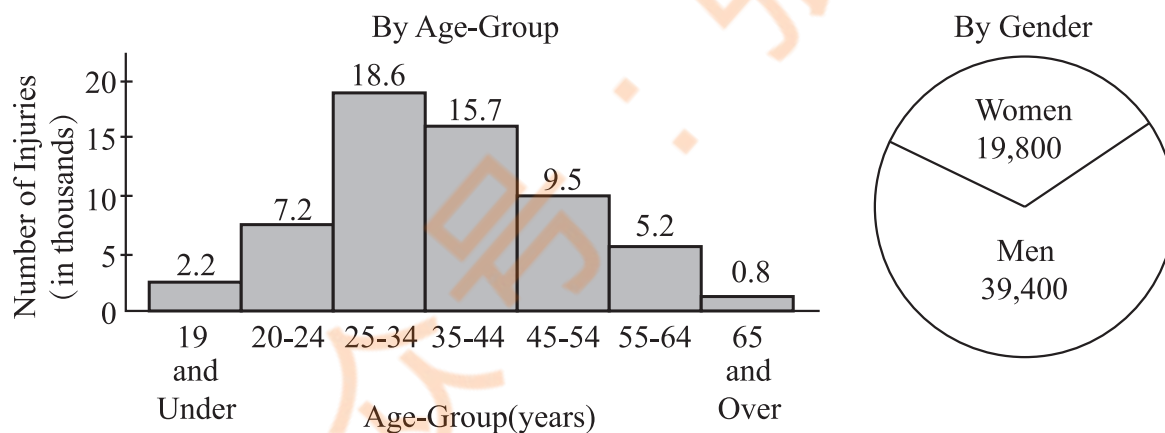
- A. 11 B. 9 C. 7 D. 6 E. 4

11. $1, -3, 4, 1, -3, 4, 1, -3, 4, \dots$

In the sequence above, the first 3 terms repeat without end. What is the sum of the terms of the sequence from the 150th term to the 154th term?

Questions 12–14 are based on the following data.

NUMBER OF OCCUPATIONAL INJURIES IN STATE X, 1998



12. How many of the age-groups each accounted for more than 15 percent of the total number of occupational injuries in State X in 1998?

- A. One B. Two C. Three D. Four E. Five

13. In 1998, if one-half of the occupational injuries in the combine 34-and-under age-groups were incurred by men, what was the number of occupational injuries incurred by men in the combined 35-and-over age-groups?

- A. 33,500 B. 31,900 C. 30,500 D. 25,400 E. 21,700

14. For the 55–64 age-group in 1998, the average (arithmetic mean) number of work-hours lost per occupational injury was 48.5. If a workweek is 40 work-hours, which of the following is closest to the total number of workweeks lost due to occupational injuries in the 55–64 age-group in 1998?

- A. 4,500 B. 5,200 C. 5,500 D. 5,900 E. 6,300

15. Last Monday a certain store sold 17 wrenches at x dollars each. Last Tuesday the store reduced its prices and sold an additional 8 wrenches at $0.5x$ dollars each. Which of the following is equal to the average (arithmetic mean) price, in dollars, of the 25 wrenches that the store sold last Monday and Tuesday?

- A. $0.68x$ B. $0.73x$ C. $0.76x$ D. $0.81x$ E. $0.84x$

16. If $1+x+x^2+x^3=60$, then the average (arithmetic mean) of x , x^2 , x^3 and x^4 is equal to which of the following?
A. $12x$ B. $15x$ C. $20x$ D. $30x$ E. $60x$
17. In a single line of people waiting to purchase tickets for a movie, there are currently 10 people behind Shandra. If 3 of the people who are currently in line ahead of Shandra purchase tickets and leave the line, and no one else leaves the line, there will be 8 people ahead of Shandra in line. How many people are in the line currently?
18. How many integers are in the solution set of the inequality $x^2-10<0$?
A. Two B. Three C. Six D. Seven E. Ten
19. If $xy^2=12$ and $xy=4$, then $x=$
A. 1 B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{2}{3}$ E. $\frac{4}{3}$
20. For which of the following values of x is the units digit of the product 2×3^n equal to 4?
A. 12 B. 13 C. 14 D. 15 E. 16

第三章 综合测试题答案和解析

第一套答案解析

section 1

1. 译：已知 n 是一个正整数， $x=7n+2$ ， $y=6n+3$ ，A： $x+y$ 的个位数，B：5。

解： $x+y=13n+5$ ，我们只知道 n 是一个正整数，所以 $13n$ 的个位数字可能是 0—9 之间的任意一个，故无法判断 $13n+5$ 的个位数与 5 相比哪个大。

答：D

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

2. 译：已知 $0 < x < y < 1$ ， $A=1-y$ ， $B=y-x$ ，

解：题目只给出了 x 和 y 的大致区间，没有给出 x 和 y 的具体数值，所以我们无法判断 A 和 B 的大小关系。我们可以举几个例子：

令 $x=0.5$ ， $y=0.75$ 时， $A=1-y=1-0.75=0.25$ ， $B=y-x=0.75-0.5=0.25$ ，即 $A=B$ ；

令 $x=0.4$ ， $y=0.75$ 时， $A=1-y=1-0.75=0.25$ ， $B=y-x=0.75-0.4=0.35$ ，即 $A < B$ ；

令 $x=0.5$ ， $y=0.65$ 时， $A=1-y=1-0.65=0.35$ ， $B=y-x=0.65-0.4=0.25$ ，即 $A > B$ 。

答：D

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

3. 译： $A=w+d$ ， $B=c+z$ 。

解：从图中能看出： $c < d$ ， $z < w$ ，所以 $w+d > c+z$ ，即 $A > B$ 。

答：A

4. 译： $A=c$ ， $B=d$ 。

解：图中直线斜率大于 1，这条直线经过点 (c, d) 和原点，所以斜率是 $\frac{d-0}{c-0} = \frac{d}{c} > 1$ ，由于 c 和 d 都小于 0，所以 $c > d$ 。

答：A

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

5. 译：集合 S 由小于 81 且不是平方数的所有正整数组成。A：集合 S 中整数的个数；B：72

解：小于 81 的平方数有 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 共 8 个，所以小于 81 且不是平方数共有 $80 - 8 = 72$ 个，即 $A = B$ 。

答：C

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

6. 译：已知 n 是整数， k 不是整数，而且满足 $0 < k < n < k + 2$ ， $A = n$ ， $B = k + 1$ 。

解：我们用符号 $[x]$ 表示大于 x 的最小整数，比如 $[0.5] = 1$ ， $[-1.8] = -1$ 。因为 k 不是整数，所以 $k < [k] < k + 1$ ，因为 n 为整数，且 $0 < k < n < k + 2$ ，所以 $n = [k]$ 或者 $[k] + 1$ ，当 $n = [k]$ 时， $A < B$ ；当 $n = [k] + 1$ 时， $A > B$ 。所以 A 和 B 的大小关系不确定。

答：D

7. 译：集合 T 由 11 到 100 之间所有的整数(包括 11 和 100)组成，A：集合 T 中 4 的倍数的个数的 4 倍，B：集合 T 中 5 的倍数的个数的 4 倍。

解：集合 T 中最小的 4 的倍数为 $12 = 4 \times 3$ ，最大的 4 的倍数为 $100 = 4 \times 25$ ，那么一共有 $25 - 3 + 1 = 23$ 个 4 的倍数，所以 $A = 4 \times 23 = 92$ 。

集合 T 中最小的 5 的倍数为 $15 = 5 \times 3$ ，最大的 5 的倍数为 $100 = 5 \times 20$ ，那么一共有 $20 - 3 + 1 = 18$ 个 5 的倍数，所以 $B = 18 \times 5 = 90$ 。综上， $A > B$ 。

答：A

8. 译：5 小时内，复印机以恒定的速度进行工作，工作速度为每 3 秒印 2 页。A：5 小时内复印机复印多少页，B：12,000。

解：1 小时 = 60 分钟 = 60×60 秒，所以 5 小时 = $5 \times 60 \times 60 = 18,000$ 秒。所以 5 小时内包含 $\frac{18000}{3} = 6,000$ 个 3 秒，所以能复印 $6000 \times 2 = 12000$ 页，所以 $A = B$ 。

答：C

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

9. 译：Marie 在慈善步行马拉松每走一英里会获得 \$0.75。她最终一共获得了 \$18.00，那么她走了多少英里？

解：走的距离等于 $\frac{18}{0.75} = 24$ 英里。

答：E

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

10. 译：在 xy 平面内，点 $(-6, -7)$ 是圆 C 的圆心。点 $(-6, 5)$ 在圆 C 内，点 $(8, -7)$ 在圆 C 外。如果 m 是圆 C 的半径且 m 是整数，那么 m 的值是多少？

解：点 $(-6, -7)$ 和点 $(-6, 5)$ 的距离是 12，且点 $(-6, 5)$ 在圆内，所以这两点的距离小于半径，所以 $m > 12$ ；点 $(8, -7)$ 和点 $(-6, -7)$ 的距离是 14，且点 $(8, -7)$ 在圆外，所以这两点的距离小于半径，所以 $m < 14$ 。综上， $12 < m < 14$ ，且 m 是整数，所以 $m = 13$ 。

答：13

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

11. 译：在 xy 平面内，直线 $x = 0$ ， $y = 0$ ，和 $4x + 3y = 60$ 围成了一个三角形区域 R 。那么下列点中，哪些在三角形 R 内部？请选择所有正确答案。

解：我们通过画图得出三角形 R 在直线 $4x + 3y = 60$ 的下方， x 轴上方和 y 轴的右侧。由于所有给出的选项都在第一象限，即 x 轴上方和 y 轴的右侧，所以我们只要考虑在直线 $4x + 3y = 60$ 的下方即可。我们把值代入 $4x + 3y = 60$ 即可。

A：当 $x = 2$ 时， $y = 52/3 < 18$ ，A 选项不正确。

B：当 $x = 5$ 时， $y = 40/3 > 12$ ，B 选项正确。

C：当 $x = 10$ 时， $y = 20/3 < 7$ ，C 选项不正确。

D：当 $x = 12$ 时， $y = 4 > 3$ ，D 选项正确。

E：当 $x = 15$ 时， $y = 0 < 2$ ，E 选项不正确。

答：BD

12. 译：在上图三角形中，若 $y = 30$ ，那么 x 的值是多少？

解：在 $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 这种特殊的三角形中，较短的直角边与斜边的长度之比为 $1 : 2$ ，那么我们可以列出方程： $x + 6 = 2(2x - 3)$ ，解得 $x = 4$ 。

答：B

13. 译：欧洲的网络用户有多少不是在德国、法国、英国、意大利和西班牙的？请选出最接近的答案。

解：欧洲的网络一共有 27.3million，在右图中除了上述五个国家，还有两部分。其中东欧网络用户大约有 1.9million，欧洲其他各地的网络用户大约有 6.3million，所以一共有 $1.9 + 6.3 = 8.2$ million，那么占比为 $\frac{8.2}{27.3} \times 100\% \approx 30\%$ 。

答：A

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

14. 译：在条线图给出在欧洲的七个地区中，网络用户数量的极差大约是多少？

解：从右图中我们能看出，在这七个地区中网络用户最少的是西班牙大约是 0.6million，网络用户最多的是“欧洲其他各地”，大约有 6.3million，所以极差大约为 $6.3 - 0.6 = 5.7$ million，其中 B 选项最接近。

答：B

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

15. 译：美国的网络用户数量大约是意大利网络用户数量的多少倍？

解：我们观察左边的饼图，美国网络用户占到了世界网络用户的 51%，而欧洲的网络用户占到了世界的 29%，总数为 27.3million，其中意大利的网络用户数来大约为 1.4million，所以意大利的网络用户占到了世界网络用户总量的 $\frac{1.4}{27.3} \times 29\% = 1.49\%$ ，所以美国网络用户数量是意大利的 $\frac{51}{1.49} \approx 34$ ，其中 E 选项最接近。

答：E

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

16. 译：根据给出的信息，下列关于 X 年网络使用的说法哪些是正确的？请选出所有正确答案。

- A. 美国的网络用户数量比世界其他国家加起来多。
- B. 西班牙的网络用户数量比东欧任一国家都少。
- C. 德国和法国的网络用户数量加起来占到了欧洲网络用户 $\frac{1}{3}$ 以上。

解：A. 从左侧饼图中看出，美国网络用户数量占到了世界网络用户总数的 51%，其他国家加起来是 49%，所以 A 选项正确。

B. 右图只给出了东欧网络用户的总数，没有给出具体东欧各国的网络用户数量，所以无法进行比较，B 选项错误。

C. 从右图中我们可以看出，德国网络用户数量大约为 6.2million，法国大约是 5.8million，所以两个国家加起来的网络用户数量为 $6.2 + 5.8 = 12$ million，而欧洲的网络用户总数为 27.3million， $\frac{12}{27.3} > \frac{1}{3}$ ，所以 C 选项正确。

答：AC

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

17. 译：已知 $n = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17$ ，那么下列说法哪些是正确的？

- I. n^2 能够被 600 整除
- II. $n + 19$ 能被 19 整除

III. $(n+4)/2$ 是偶数

解: $n^2 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2 \times 11^2 \times 13^2 \times 17^2$, $600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$, 前面只有两个 2 相乘, 即 n^2 只是 4 的倍数, 后者有三个 2 相乘, 即 600 是 8 的倍数, 所以 n^2 无法被 600 除尽, I 错;

要是 $n+19$ 能被 19 整除, 那么 n 也得被 19 整除, 但是 n 不能被 19 整除, II 错;

$(n+4)/2 = \frac{n}{2} + 2$, 易知 $\frac{n}{2}$ 为奇数, 所以 $(n+4)/2$ 也是奇数, III 错;

综上, I、II 和 III 均是错误的。

答: E

18. 译: 对于任意整数 $n > 1$, $A(n)$ 代表 1 到 n 之间所有整数之和。比如, $A(100) = 1 + 2 + 3 + \dots + 100 = 5,050$ 。 $A(200)$ 的值是多少?

解: 1—200 之间一共有 200 个整数, 所以根据求和公式得到 $A(200) = \frac{(1+200) \times 200}{2} = 20,100$ 。

答: D

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

19. 译: 在上面给出的数轴中, 刻度线间距相等。那么下列关于 x , y 和 z 的说法中, 哪些是正确的? 请选择所有正确的答案。

解: 从图中可以看出, $x < 0$, $y > 0$, $z > 0$, 所以 $xyz < 0$, 即 A 正确。

因为刻度线间距相等, 所以 $x = -y$, $z = 2y$; 所以 $x + z = y$, 即 B 正确。

从图中可以看出 $y - x > 0$, 且 z 大于 0, $z(y - x) > 0$, 即 C 正确。

答: ABC

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

20. 译: 已知 n 和 m 均是整数, m 是 2^6 的因数, 那么最多有多少个整数可以同时与 $3n$ 和 $\frac{2^6}{m}$ 相等?

解: 首先我们需要找到 n 和 m 分别取什么值能使得 $3n$ 和 $\frac{2^6}{m}$ 相等。我们列出等式:

$3n = \frac{2^6}{m}$, 即 $3mn = 2^6$ 。因为 m, n 均为整数, 所以 $3mn$ 为 3 的倍数。但是 2^6

不是 3 的倍数, 所以等式 $3mn = 2^6$ 不论 m, n 取什么值都无法成立, 即 $3n$ 和

$\frac{2^6}{m}$ 不可能相等, 所以不存在整数可以同时与 $3n$ 和 $\frac{2^6}{m}$ 相等。

答: A

section 2

1. 译：已知 $9 \leq x \leq 12$, $-2 \leq y \leq 8$, A: $\frac{2}{x-y}$ 的最大值 B: 2

解：因为 $9 \leq x \leq 12$, $-2 \leq y \leq 8$, 所以 $x > y$ 所以 $\frac{2}{x-y} > 0$, 当 $x-y$ 取得最小值时, $\frac{2}{x-y}$ 取得最大值。 $(x-y)_{\min} = 9 - 8 = 1$, 所以 $\left(\frac{2}{x-y}\right)_{\max} = 2$, 即 $A = 2 = B$ 。

答：C

2. n 是一个偶数, n 被 7 除的余数是 3。A: n 被 14 除的余数, B: 10。

解：设 $n = 7k + 3$, 其中 k 是一个整数。由于 n 是偶数, 所以 $7k$ 是奇数, 所以 k 是奇数。所以设 $k = 2m + 1$, 其中 m 是整数, 则 $n = 7(2m + 1) + 3 = 14m + 10$, 所以 n 被 14 除的余数是 10, 即 $A = B$ 。

答：C

3. 译：已知 $x < y < z$, $A = \frac{x+y+z}{3}$, $B = y$ 。

解：我们只知道 x , z 和 y 的大小关系, 不知道 x , z 和 y 相差的具体数值。所以无法判断两者的大小关系。我们可以举几个例子：

$$\text{令 } x=1, y=2, z=3, \text{ 则 } \frac{x+y+z}{3} = \frac{1+2+3}{3} = 2 = y;$$

$$\text{令 } x=1, y=2, z=4, \text{ 则 } \frac{x+y+z}{3} = \frac{1+2+4}{3} = \frac{7}{3} > y;$$

$$\text{令 } x=0, y=2, z=3, \text{ 则 } \frac{x+y+z}{3} = \frac{0+2+3}{3} = \frac{5}{3} < y;$$

综上, A 和 B 大小关系不确定。

答：D

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

4. 译： n 是一个正整数, $A = \frac{1}{3^n}$, $B = 3\left(\frac{1}{4^n}\right)$ 。

解： $\frac{A}{B} = \frac{\frac{1}{3^n}}{3\left(\frac{1}{4^n}\right)} = \frac{4^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$, 我们能看出这是一个关于 n 递增的函数。

当 $n=1$ 时, $\frac{A}{B} = \frac{4}{9}$, 即 $A < B$ 。

当 $n=2$ 时, $\frac{A}{B} = \frac{16}{27}$, 即 $A < B$ 。

当 $n=3$ 时, $\frac{A}{B} = \frac{64}{81}$, 即 $A < B$ 。

当 $n=4$ 时, $\frac{A}{B} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^4 \approx 1.05$, 即 $A > B$ 。

因为关于 n 的指数函数 $\frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$ 是增函数, 所以 $n \geq 4$ 时, 该函数的值都大于 1, 即 $A > B$ 。而当 $n < 4$ 时, 该函数的值小于 1, 即 $A < B$, 所以 A 和 B 的大小关系不能确定。

答: D

5. 译: 促销中, 每条领带打 8 折, 每条皮带打 7 折。A: 1 条领带和 2 条皮带共降价多少百分比, B: 25%。

解: 我们考虑两种极端情况: 假设领带的单价远小于皮带, 则皮带的折扣就大概等于 1 条领带和 2 条皮带的总折扣, 即 30%; 假设皮带的单价远小于领带, 则领带的折扣就大概等于 1 条领带和 2 条皮带的总折扣, 即 20%。所以大小关系不确定。

答: D

6. 译: 如上图所示, 已知 $w > 45$ 。 $A = m + n$, $B = 2m$ 。

解: 因为 $w > 45$, 所以图中连接点 (m, n) 和原点的直线斜率大于 1。

图中所示直线的斜率是 $\frac{n-0}{m-0} = \frac{n}{m} > 1$, 即 $n > m$ 。不等式两边同时加上 m , 得到 $m + n > 2m$, 即 $A > B$ 。

答: A

7. 译: xy 平面一直线经过点 $(5, 4)$ 和 $(2, -1)$ 。A: 直线的斜率; B: 0。

解: 直线的斜率为 $\frac{4 - (-1)}{5 - 2} = \frac{5}{3} > 0$, 所以 $A > B$ 。

答: A

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

8. 译: 点 R 、 S 和 T 是数轴上三个点, S 在 R 和 T 之间。 R 和 S 之间的距离为 6, R 和 T 之间的距离为 15。A: 线段 RS 的中点和线段 ST 的中点之间的距离, B: S 和 T 之间的距离。

解: 令线段 RS 的中点为 A , 线段 ST 的中点为 B , $AS = \frac{1}{2}RS = \frac{1}{2} \times 6 = 3$, $BS = \frac{1}{2}ST = \frac{1}{2} \times 9 = 4.5$, 所以线段 RS 的中点和线段 ST 的中点之间的距离即为

A 和 B 之间的距离为 $AS + BS = 3 + 4.5 = 7.5$, $ST = RT - RS = 15 - 6 = 9 > 7.5$ 。

答: B

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

9. 译: 每周售货员都会收获佣金: 基本销售额 500 美元的 12% 再加上超出部分的 20%。如果一名售货员上周收获佣金 380 美元, 那么这名售货员上一周的销售额是多少?

解: 设售货员上一周的销售额为 x 美元, $x > 500$ 。那么 $500 \times 12\% + (x - 500) \cdot 20\% = 380$, 解得 $x = 2100$, 即该售货员上一周的销售额为 2100 美元。

答: E

10. 译: Greg 的周薪为 187 美元, 比 Karla 的周薪要少 15%。如果 Karla 的周薪提高 10%, Greg 的周薪应该提高多少个百分点才能和 Karla 的周薪相等呢? 请用百分数形式给出你的答案并精确到十分位。

解: 设 Karla 周薪提高之前为 x , 那么 Greg 的周薪提高前为 $(1 - 15\%)x = 0.85x = 187$, 解得 $x = 220$ 美元。那么 Greg 的周薪提高后为 $(1 + 10\%) \times 220 = 242$ 美元, 那么 Karla 需要提高的百分点为 $\frac{242 - 187}{187} \times 100\% = 29.4\%$ 。

11. 译: 在 Grant 去机场的路上, 他一共行驶了 9 英里。在这期间, 他的平均速度是每小时 x 英里, $30 \leq x \leq 35$ 。那么下列选项中哪个可能是这段路程 Grant 所用的总时间(单位为分钟)。选出所有可能的答案

解: Grant 所用时间为 $\frac{9}{x} \in \left[\frac{9}{35} \times 60, \frac{9}{30} \times 60 \right] \approx [15.4, 18]$, 所以所用的总时间可能为 16、17 或者 18 分钟。

答: BCD

12. 译: 已知 $x < y$, 所以下列不等式哪一项一定正确?

解: 我们对每个选项逐一分析。

A. 若 A 选项正确, 那么 $y < x - 1$; 又因为 $y > x$, 所以 $x < y < x - 1$, 所以 $x < x - 1$ 这一定是错误的, 所以 A 选项错误。

B. 令 $x = -3$, $y = -1$, 所以 $y - 1 = -2$, 所以 $y - 1 > x$, B 错误。

C. 令 $x = -2$, $y = -1$, 所以 $xy^2 = -2 = x$, 所以 C 错误。

D. 因为 $x < y$, 且 $y < 0$, 所以不等式两边同时乘一个负数, 不等式变号, 所以 $xy > y^2$, 所以 D 选项错误。

E. 因为 $x < y$, 且 $x < 0$, 所以不等式两边同时乘一个负数, 不等式变号, 所以 $xy < x^2$, 所以 E 选项正确。

答: E

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

13. 译: 在 U 大学有 275 名学生学习工程学。那么工程专业的学生和老师人数之比大概是多少?

解: X 大学共有 200 名女性职工, 工程专业中女性职工所占比例为 2%, 所以共 $200 \times 2\% = 4$ 人; X 大学共有 250 名男性职工, 工程专业中男性职工所占比例为 12%, 所以共有 $250 \times 12\% = 30$ 人。所以工程专业共有 $4 + 30 = 34$ 名职工, 即学生和教师人数之比为 $275 : 34 \approx 8 : 1$ 。

答: A

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

14. 译: 人文学的教职工中有大约多少比例是男性?

解: 人文学女职工占女职工总人数的 17%, 即共 $200 \times 17\% = 34$ 人; 人文学男职工占男职工总人数的 14%, 即共 $250 \times 14\% = 35$ 人, 所以男性所占比例为 $\frac{35}{35+34} = \frac{35}{69} \approx 51\%$ 。

答: E

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

15. 在所有的生物科学和健康科学的教职员中, $\frac{1}{3}$ 的女性和 $\frac{2}{9}$ 的男性教职员是终身教授。那么在这两个系里, 终身教授的人数占总人数的比例是多少?

解: 在上面的条线图中, 深色条代表 female, 总共 200 人; 浅色条代表 male, 总共 250 人; 生物科学和健康科学中女性的总人数是 $200 \times (5\% + 16\%) = 42$, 男性人数为 $250 \times (10\% + 8\%) = 45$ 人, 所以终身教授的比例是 $(42 \times \frac{1}{3} + 45 \times \frac{2}{9}) \div (42 + 45) = \frac{24}{87} = \frac{8}{29}$ 。

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

16. 译: 一个盒子里装有 20 个电灯泡, 其中有两个是残次品。一名检查人员将会一次、随机挑选出两个电灯泡进行检查。那么挑选出来进行检查的两个电灯泡都不是残次品的概率有多大? 请以分数形式给出你的答案。

解: 从 20 个电灯泡中取出 2 个电灯泡有 $C_{20}^2 = \frac{20 \times 19}{2 \times 1} = 190$, 从 18 个完好的灯泡

取出两个有 $C_{18}^2 = \frac{18 \times 17}{2 \times 1} = 153$, 那么概率是 $\frac{153}{190}$ 。

答: $\frac{153}{190}$

17. 下图给出了平均值为 0、标准差为 1 的标准正态分布，同时标记了六个区域分布的大致的百分数。随机变量 Y 服从正态分布，均值为 470，且值 $Y=340$ 是第 15 个百分位数。下列选项中，哪一个最接近 Y 分布的标准差？

解：如图所示，16% percentile 是在距离平均值左边一个标准差的位置，15% percentile 在 16% percentile 的左边。所以 Y 分布的标准差小于 $470 - 340 = 130$ 。选项中只有 A 选项符合。

答：A

18. 译：三个不同的委员会分别包含 8, 10 和 13 个人。如果 N 是这三个委员会中包含的不同的人的总数，那么 N 的最小值是多少？

解：在题目条件的基础上，如果要使三个委员会的人数最少，应该为 13 人，即其他两个委员会完全包含在人数最多的委员会成员之内了。

答：A

19. 译：我们对一个班级内所有学生的身高进行了统计。男生身高的极差是 15.4 英寸，女生身高的极差是 13.2 英寸。

下列选项哪些提供了足够的信息能够让我们计算出该班级的学生身高的极差。选出所有正确答案。

A. 最高的男生比最高的女生高出 5.8 英寸。

B. 男生身高的中位数比女生身高的中位数高 1.1 英寸。

C. 男生身高的算术平均值比女生身高的算术平均值高 4.6 英寸。

解：A. 我们设女生中最矮的身高为 x ，那么女生最高身高为 $x + 13.2$ ，则男生最高的身高为 $x + 13.2 = x + 19$ ，男生最矮的身高为 $x + 3.6$ ，所以我们能够得到该班学生最矮身高为 x ，最高身高为 $x + 19$ ，即能够计算出极差为 19，A 选项正确。

B. B 选项无法决定最大值，所以 B 选项无法推出身高的极差。

C. 算术平均数也无法决定最大值，所以 C 选项也无法推出学生身高的极差。

答：A

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

20. 译：在 1 到 900 之间所有的整数中(包括 1 和 900)，含有 3 个正因数的整数个数是多少？

解：只有质数的平方才只含有 3 个因数，即 $x^2 \leq 900$ 且 x 为质数。选出所有小于 30 的质数即可，所以只有 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 共 10 个。

答：A

第二套答案解析

section 1

1. 译: n 是一个正整数, A : 3^{4n} 除以 10 的余数, B : 1。

解: 3 的指数幂有如下规律: $3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$, $3^5=243$, 我们知道 3^{4n} 的个位数为 1, 需要记住的是: 一个整数除以 10 的余数就是这个数的个位数。所以 $A=1=B$ 。

答: C

2. $A = BD/AB$, $B = BC/DC$ 。

解: 在三角形 ABD 中, 角 ADB 为直角, AB 为斜边, 所以 $BD/DC < 1$; 在三角形 BDC 中, 角 BDC 为直角, BC 为斜边, 所以 $BC/AB > 1$ 。所以 $B > A$ 。

答: B

3. 译: A : 1 到 199 之间奇数之和, B : 2 到 198 之间偶数之和。

解: 1 到 199 之间奇数最小的是 $1=2 \times 0 + 1$, 最大的是 $199=2 \times 99 + 1$, 所以 1 到 199 之间一共有 $99 - 0 + 1 = 100$ 个奇数, 那么利用求和公式算的 1 到 199 之间奇数之和 $= \frac{(1+199) \times 100}{1} = 10,000$; 2 到 198 之间偶数最小的是 $2=2 \times 1$, 最大的偶数是 $198=2 \times 99$, 所以 2 到 198 之间一共有 $99 - 1 + 1 = 99$ 个偶数, 利用求和公式 2 到 198 之间偶数之和 $= \frac{(2+198) \times 99}{1} = 9,900 < 10,000$ 。所以 $A > B$ 。

答: A

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

4. 译: x 是一正整数, $x^3 - x$ 除以 3 的余数为 k 。 $A=k$, $B=1$ 。

解: $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$, 易知连续三个整数中一定有一个是 3 的倍数, 所以 x , $x-1$, $x+1$ 中一定有一个是 3 的倍数, 即 $x^3 - x$ 是 3 的倍数, 所以 $k=0$, 即 $A < B$ 。

答: B

5. 译: r , s 和 t 是三个连续的奇数, $r < s < t$ 。 $A=r+s+1$, $B=s+t-1$ 。

解: $B-A=t-r-2$, 由于 r , s 和 t 是三个连续的奇数, 所以 $t-r=4$ 。所以 $B-A=2$, 即 $B > A$ 。

答: B

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

6. 译: A: 个位数和十位数不相等的两位数的个数, B: 80。

解: 两位数从 1 到 99 共 $99 - 10 + 1 = 90$ 个, 其中个位数和十位数相等的共有 9 个, 那么个位数和十位数不相等的两位数有 $90 - 9 = 81$ 个, 即 $A > B$ 。

答: A

7. 译: 集合 S 中有 5 个元素。A: 含有 1 个元素的 S 的子集的数量, B: 含有 4 个元素的 S 的子集的数量。

解: 从 5 个元素中选出 1 个元素来组成 S 的子集一共有 $C_5^1 = 5$ 种选择; 从 5 个元素中选出 4 个元素来组成 S 的子集一共有 $C_5^4 = 5$ 种选择。所以 $A = B$ 。

答: C

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

8. 译: 一组有 45 位小孩, 其中 60% 是男孩子, 60% 是左撇子。A: 左撇子中男孩子的数量; B: 8。

解: 这一组小孩中, 有 $45 \cdot (1 - 60\%) = 18$ 位女孩子。我们现在考虑最极端的情况, 即让尽量多的女孩子为左撇子, 即 18 位女孩子全是左撇子, 这时还有 $45 \times 60\% - 18 = 9$ 为左撇子是男孩, 所以左撇子中男孩子的数量一定大于等于 9, 所以一定多于 8 人。

答: A

9. 译: X 学校 21 位老师年收入的总和为 \$781,200。其中有 12 位老师年收入低于 \$37,000。A: 老师年收入的平均值, B: 老师年收入的中位数。

解: 21 位老师年收入的平均值为 $\frac{781,200}{21} = 37,200$ 。21 位老师年收入的中位数应该是将老师年工资从小到大排列后第 11 位老师的年收入。由于有 12 位老师年收入低于 \$37,000, 所以第 11 位老师的收入一定是低于 \$37,000, 也就是低于 \$37,200, 所以 $A > B$ 。

答: A

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

10. 译: 一数组中有 21 个正整数, 其中最大值为 16。这 21 个数的中位数是 10, 那么这 21 个数可能的最小的平均值是多少?

解: 求最小的平均值应该让数组中每个数都尽量的小, 根据题目已知条件, 我们将该数组中的 21 个数从小到大进行排列。10 位于第 11 位, 16 位于第 21 位, 且 21 个数全是正整数, 那么前十个数我们可以认为均为 1, 从第 11 位到第 20 位我们可以认为均为 10, 这种情况下平均值 $= \frac{10 \times 1 + 10 \times 10 + 16}{21} = 6$ 。

答：C

[出处]《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

11. 译：上图中，O 和 P 是两圆的圆心。如果两个圆的半径均为 r ，那么阴影部分的面积是多大？

解：设两圆交于点 Q、R，连接 OP。OQ、OP、OR 均是圆 O 的半径，PQ、PO、PR 均是圆 P 的半径，又因为两圆半径相同均为 r ，所以三角形 OPQ 和 OPR 均为等边三角形，边长为 r 。一个边长为 r 的等边三角形的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$ ，所以阴影部分的面积 $= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}r^2$ 。

答：B

[出处]《The Official Guide to the GRE General Test》

12. 译：某一分布包含了 850 个测量值， x 厘米是其中第 73 个百分位数。如果其中有 68 个测量值大于 y 厘米但是小于 x 厘米，那么 y 大概是这一分布中第几个百分位数？

解： x 是其中第 73 个百分位数，说明数据中有 73% 的数据比他小，又因为有 68 个数据大于 y 而小于 x ，这 68 个人占 850 的 8%，所以有 $73\% - 8\% = 65\%$ 的数据比 y 小，所以 y 大概是第 65 个百分位数。

答：E

[出处]《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

13. 译：为某一食品付出的工作时间(单位为小时)等于该食品的平均价格除以加工业普通工人的平均时薪。图中的工作单位为分钟。在上图中，1997 年为哪一种食品付出的工作时间是最大的？

- A. 10 磅面包
- B. 5 加仑牛奶
- C. 3 磅咖啡
- D. 20 磅食糖
- E. 5 打鸡蛋

解：1 磅面包需要的工作时间大约是 5 分钟，那么 10 磅面包大约需要 $10 \times 5 = 50$ 分钟。

半加仑牛奶需要的工作时间大约是 7 分钟，那么 5 加仑牛奶大约需要 $7 \times 10 = 70$ 分钟。

1 磅咖啡需要的工作时间大概是 17 分钟，那么 3 加仑咖啡大约需要 $17 \times 3 = 51$ 分钟。

5 磅食糖需要的工作时间大概是 10 分钟，那么 20 磅食糖大约需要 $10 \times 4 = 40$ 分钟。

1 打鸡蛋需要的工作时间大约是 5 分钟，那么 5 打鸡蛋大约需要 $5 \times 5 = 25$ 分钟。

综上，5 加仑牛奶需要的工作时间最长。

答：B

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

14. 译：如果 1919 年加工业普通工人平均时薪为 \$0.55，那么下列选项中哪个最接近半加仑牛奶在 1919 年的平均价格？

解：在 1919 年半加仑牛奶需要付出 39 分钟的工作时间，所以半加仑牛奶的平均价格大约是 $0.55 \times \frac{39}{60} = 0.3575$ ，所以 D 选项最接近。

答：D

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

15. 译：如图所示，在 1919 年 20 千克的食糖需要付出多少小时的工作时间？请选择最接近的答案。（1 千克等于 2.2 磅）

解：在 1919 年，5 磅食糖大约需要 72 分钟 = 1.2 小时的工作时间，20 千克食糖等于 $20 \times 2.2 = 44$ 磅食糖，所以需要 $\frac{44}{5} \times 1.2 = 10.56$ 小时，所以 A 选项最接近。

答：A

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

16. 译：在 1997 年 8 小时的工作时间得到的鸡蛋比 1919 年要多多少打？

解：1997 年每打鸡蛋需要付出 5 分钟 = $\frac{1}{12}$ 小时的工作时间，所以 1997 年 8 小时的工作时间可以得到 $8 \times 12 = 96$ 打鸡蛋；1919 年每打鸡蛋需要付出 80 分钟 = $\frac{4}{3}$ 小时的工作时间，那么 8 小时可以得到 $8 \div \frac{4}{3} = 6$ 打鸡蛋，所以多出了 $96 - 6 = 90$ 打鸡蛋。

答：C

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

17. 译：上图中，圆的面积为 49π ，并分成四个扇形，且具有相同的圆心角。那么阴影部分的周长是多少？

解：该圆的半径 $r = \sqrt{\frac{49\pi}{\pi}} = 7$ ，阴影部分的周长 = $2r + \frac{1}{4}$ 圆周长 = $2r + \frac{1}{4} \cdot 2\pi r =$

$$14 + \frac{7\pi}{2}.$$

答：D

18. 译：如果一个等边三角形每条边的长度增加 50%，那么这个三角形的面积增加多少？

解：当等边三角形边长为 x 时，面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ 。所以边长长度增加 50%，即变为

$$1.5x \text{ 时，面积变为 } \frac{\sqrt{3}}{4}(1.5x)^2 = \frac{9\sqrt{3}}{16}x^2, \text{ 所以增加了 } \frac{\frac{9\sqrt{3}}{16}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}x^2} = 125\%.$$

答：C

19. 译：某建筑公司将生产一些完全相同的金属支架。生产的金属支架形状为直角三角形，两条直角边长度分别为 3 英尺和 4 英尺。每个三角形的三条边都是由金属模具制成。现在该公司有 6000 英尺的金属模具，且在制作支架的过程中材料没有浪费。那么该公司最多可以制成多少个支架？

解：直角三角形斜边长度为 $\sqrt{3^2+4^2}=5$ ，所以制作一个支架需要金属模具的长度为 $3+4+5=12$ 英尺，所以一共可以制作 $6000 \div 12 = 500$ 个支架。

答：B

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

20. 译：已知 $x > 0$ ，一三角形其中两条边长度分别为 $2x+1$ 和 $3x+4$ ，那么下列选项中哪些可能是三角形第三条边的长度？请选出所有正确的答案。

解：根据三角形的性质我们知道三角形两边之和大于第三边，所以我们只要排除掉选项中一定大于已知两边之和的选项即可。 $2x+1+3x+4=5x+5 < 5x+6$ ，所以 D 选项被排除； $(x+2)+2x+1 < 3x+4$ ，所以 B 选项排除。即 ACE 正确。

答：ACE

section 2

1. 译：在矩形 $ABCD$ 内，边 CD 被 P ， Q ， R 和 S 分成 5 个相等的线段。A：三角形 MCQ 的面积，B：三角形 NSP 的面积。

解：因为边 CD 被分为 5 个相等的线段，所以 $PS=CQ$ ， $\triangle MCQ$ 和 PNS 在分别以 CQ 和 PS 为底时，高均为矩形 $ABCD$ 的宽，即两三角形底和高均相等。所以两三角形面积相等，即 $A=B$ 。

答：C

2. 译：已知 $xy=8$ 且 $x=y-2$ ， $A=y$ ， $B=0$ 。

解：将 $x=y-2$ 代入 $xy=8$ ，我们会得到一个一元二次方程： $y(y-2)=8$ ，解得： $y=4$ 或 -2 。所以无法判断 y 与 0 的大小关系。

答：D

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

3. 译： $A=AB$ ， $B=BC$ 。

解：注意题目给出的图形不是按照比例给出的，所以我们只知道三角形 ABC 是直角三角形，而不知道直角边 BC 和 AB 的大小关系，即 A 和 B 的大小关系不确定。

答：D

4. 译： $x^2y>0$ ， $xy^2<0$ ， $A=x$ ， $B=y$ 。

解：因为 $x^2y>0$ ，所以 $y>0$ ，因为 $xy^2<0$ ，所以 $x<0$ ，所以 $y>x$ 。

答：B

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

5. 译： A ， B 和 C 都是矩形。矩形 A 的长比矩形 C 的长 10% ，矩形 A 的宽比矩形 C 的短 10% ；矩形 B 的长比矩形 C 的长 20% ，矩形 B 的宽比矩形 C 的短 20% 。 A ：矩形 A 的面积， B ：矩形 B 的面积。

解：设矩形 C 的长和宽分别为 x 和 y ，所以矩形 A 的长和宽分别为 $1.1x$ 和 $0.9y$ ，面积为 $0.99xy$ ；矩形 B 的长和宽为 $1.2x$ 和 $0.8y$ ，面积为 $0.96xy < 0.99xy$ 。所以矩形 A 的面积更大。

答：A

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

6. 译： A ：三角形 PQR 的面积， B ：三角形 PSR 的面积。

解：三角形 PQR 是直角三角形，角 Q 是直角，且两直角边的长度分别为 $\sqrt{5}$ 和 $2\sqrt{5}$ ，面积为 $\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 5$ ，斜边 $PR = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2} = 5$ ；在三角形 PSR 中，角 S 是直角，斜边长度为 5 ，其中一条直角边的长度为 3 ，那么另一条直角边 PS 长度为 $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ 。所以直角三角形 PSR 的面积为 $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6 > 5$ ，所以三角形 PSR 的面积大于三角形 PQR 的面积。

答：B

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

7. Magdalena 用了一个小时完成一个任务，这个任务包含 60 个步骤。她用了 20 分钟完成前 30 个步骤。

A: Magdalena 完成后 30 个步骤每个步骤的平均时间(单位为秒)

B: 80

解: M 后 30 个步骤一共用了 $60 - 20 = 40$ 分钟, 即 $40 \times 60 = 2400$ 秒, 所以 M 完成后 30 个步骤的平均时间为 $2400 \div 30 = 80$ 秒, 即 $A = B$ 。

答: C

8. 译: 三个连续的整数的和是 -84 。A: 三个整数中最小的数, B: -28 。

解: 设最小的数是 x , 则这三个连续的数是 $x, x+1, x+2$, 所以三个数之和为 $x + (x+1) + (x+2) = -84$, 解得 $x = -29$ 。所以三个数中最小的数是 -29 , 即 $A < B$ 。

答: B

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

9. 译: 一个数列中, 每一项都是前一项乘 2 再减 3 得到的。如果该数列中第 4 项为 19, 那么下列选项中哪些是属于该数列的数? 请选择所有正确的答案。

解: 设该数列的首项为 x , 那么第二项为 $2x - 3$, 第三项为 $2(2x - 3) - 3 = 4x - 9$, 第四项为 $2(4x - 9) - 3 = 8x - 21 = 19$, 解得 $x = 5$ 。那么我们可以得到该数列第一项为 5, 第二项为 7, 第三项为 11, 第四项为 19, 第五项为 35... 所以已经可以确定选项 ACE 均是数列中的数。已知该数列是递增数列, 所以 BD 选项不可能是该数列中的数。

答: ACE

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

10. 译: 如果一个账户开始存入 \$5,000,000, 年利率为 7%。那么下列方式哪一种使得两年后账户里余额最多?

A. 每年复利

B. 每季度复利

C. 每月复利

D. 每天复利

E. 上述四种方式最终余额相同

解: 如果年利率为 7%, 那么季度利率为 $7\% / 4 = 1.75\%$, 月利率为 $7\% / 12 = 0.583\%$, 日利率为 $7\% / 365 = 0.0192\%$ 。所以 A 选项的年利率值为: $(5000000(1+0.07))(1+0.07) = 5724500$ 。而接下来的季度利率和月利率还有日利率, 本金不变, 都会随之累加, 所以两年之后, 日利率得到的钱一定是最多的。此题记住一个结论: 在年利率一定的情况下, 计息时间越短, 利息越多。

答: D

11. 译：Tuk 比 Kim 重 60%，Lee 比 Tuk 轻 50%，Pat 比 Lee 重 25%。如果 Pat 重 126 磅，那么 Kim 的重量是多少？

解：因为 Pat 重 126 磅，所以 Lee 重 $\frac{126}{1.25} = 100.8$ 磅，所以 Tuk 重 $\frac{100.8}{0.5} = 201.6$

磅，所以 Kim 重 $\frac{201.6}{1.6} = 126$ 磅。

答：126

12. 译：上图中，较小的正方形边长为 y 且内切于较大的边长为 x 的正方形。那么下列关于 x ， y 和 z 的关系哪个一定是正确的？

解：图中较大的正方形被分为一个内切正方形和四个小的全等的直角三角形。我们可以通过观察左下角的直角三角形得到 x ， y 和 z 之间的关系。左下角的三角形一条直角边为 z ，另一条直角边为 $x-z$ ，斜边为内切正方形的其中一条边，长度为 y ，根据勾股定理我们得到 $z^2 + (x-z)^2 = y^2$ ，即选项 E 正确。

答：E

13. 译：在 2004 年 4 月，Q 地区住宅的花销比哪些地区住宅的花销少？请选择所有正确的答案。

解：该题比较的是绝对数值，从图中我们能够看出比 Q 的 Housing 长的为 R、S 和 U，所以答案是 BCE。

答：BCE

14. 译：在 P 地区，‘其他’这一类的花销占了非住宅花销多少比例？

解：P 地区的 other 这一类占 10%，nonhousing 共有三项，总共占了 $10\% + 16\% + 14\% = 40\%$ 。可以看出 Other 项占 nonhousing 三项的 $\frac{1}{4}$ 。

答：D

15. 译：对于四种种类花销的极差最小的区域，交通方面的花销占了生活开支的多少比例？

解：题目要求找到 4 项费用的极差最小的地区，也就会找到最多费用的项目与最少费用的项目最为接近的地区。我们先看每个区域中最多费用项目减去最少费用项目的相对数值比例，P 为 50%，Q 为 43%，R 为 52%，S 为 50%，T 为 36%，U 为 53%，我们发现 Q、R、S、U 的四项总和的绝对数值比 T 大，相对百分比也比 T 的大，因此这四项可以排除。P 的总和绝对值大约是 1000 美元，50% 大约是 500 美元，T 的绝对数值约为 1200 美元，36% 是 432 美元，因此 T 才是最多费用的项目与最少费用的项目最为接近的地区，其中交通费用所占比例为 20%，答案为 E。

答：E

16. 译：下列选项中，哪一个关于 xy 平面内的三角形 PQR 的描述是正确的？

- A. PQR 是直角三角形。
- B. PQR 的面积是 $15/2$ 。
- C. PQR 是一个等腰三角形。

解：我们对选项逐一分析。

A：线段 QR 的斜率为 $\frac{4-3}{2-4} = -\frac{1}{2}$ ，线段 PR 的斜率为 $\frac{3-(-3)}{4-1} = 2$ ，所以 $QR \perp PR$ ，即 PQR 是直角三角形，即 A 正确。

B：由 A 选项可知 PQR 是直角三角形，那么 PQR 的面积 $= \frac{1}{2} \times QR \times PR$ ，

其中 $QR = \sqrt{(2-4)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{5}$ ， $PR = \sqrt{(1-4)^2 + (-3-3)^2} = 3\sqrt{5}$ 。

所以三角形面积 $= \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times 3\sqrt{5} = \frac{15}{2}$ ，即 B 正确。

C：在对 A 选项的分析中我们知道 PQR 是一个直角三角形，斜边为 PQ。那么假如 PQR 是等腰三角形，只可能是 PR 和 QR 相等。在对 B 选项的分析中，我们知道 $PR = 3\sqrt{5}$ ， $QR = \sqrt{5}$ ，即 $PR \neq QR$ ，所以 PQR 不是等腰三角形，即 C 选项错误。

答：AB

17. 译：在 1 到 10^{21} 的整数中，有多少整数所有数位上的数字之和为 2？

解：因为 10^{21} 所有数位上的数字之和不为 2，所以我们考虑 1 到 $10^{21}-1$ 之间的整数就可以了。一共有 21 个数位，当数字之和是由 2 一个数字构成的，即有一个数位上是 2 其他数位均为 0，这样的数共有 $C_{21}^1 = 21$ 种；如果数字之和 $2 = 1+1$ ，即有两个数位上是 1，其他数位均为 0，这样的数共有 $C_{21}^2 = 210$ ，所以一共有 $210+21=231$ 个。

答：E

18. 译：如果一个正整数从左至右读出来和从右至左读出来是完全一致的，那么该数称为回文数。例如：5，66，373 都是回文数。那么在 1 到 1000（包括 1 和 1000）之间有多少回文数？

解：一位数全部是回文数，共 9 个；两位数中，如果个位数和十位数数字相同，那么这个数也是回文数，共 9 个；三位数中，每 100 个数中有 10 个回文数，例如在 100—199 之间，有 9 个回文数：101，111， \dots ，191，所以三位数的回文数共 $10 \times 9 = 90$ 个。综合一共有 $90+9+9=108$ 个回文数。

19. 译：在某学校的所有学生中，有 20% 参加了科学俱乐部，30% 参加了乐队。如果有 25% 的学生既参加了乐队而没有参加科学俱乐部，那么参加了科学俱乐部的学生中有多少没有参加乐队？

解：设该学校共有 x 名学生，那么有 $0.2x$ 参加了科学俱乐部， $0.3x$ 参加了乐队，有 $0.25x$ 的学生仅参加了乐队而没有参加科学俱乐部，那么就有 $0.3x - 0.25x = 0.05x$ 名学生既参加了乐队又参加了科学俱乐部，那么参加科学俱乐部而没有参加乐队的共有 $0.2x - 0.05x = 0.15x$ 。所有参加科学俱乐部的学生中有 $\frac{0.15x}{0.2x} = 75\%$ 的学生没有参加乐队。

答： E

20. 直线 k 在 xy 平面内，其在 x 轴上的截距为 -4 。现在已知一线段两端点分别为 $(2, 9)$ 和 $(2, 0)$ ，直线 k 经过该线段的中点。那么直线 k 的斜率是多少？

解：题目给出的线段的中点为 $\left(\frac{2+2}{2}, \frac{0+9}{2}\right) = \left(2, \frac{9}{2}\right)$ ，即直线 k 经过点 $\left(2, \frac{9}{2}\right)$ 。由因为直线 k 在 x 轴上的截距为 -4 ，所以 k 经过点 $(-4, 0)$ 。所

以直线 k 的斜率为 $\frac{\frac{9}{2} - 0}{2 - (-4)} = \frac{3}{4}$ 。

答： $\frac{3}{4}$

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

第三套答案解析

section 1

1. 译：集合 $S = \{1, 4, 7, 10\}$ ，集合 $T = \{2, 3, 5, 8, 13\}$ 。 x 是集合 S 内的一个数， y 是集合 T 内的一个数。A： xy 的不同值的个数，B：20。

解： xy 乘积的所有结果一共有 $4 \times 5 = 20$ 种，而且很显然其中 4×5 和 2×10 这两组结果相同，所以 xy 乘积的不同结果小于 20 种，即 $B > A$ 。

答：B

2. 译：在 200 位工人中，10% 男性抽烟，49% 女性抽烟。A：抽烟的总人数，B：59。

解：因为人数一定是整数： $\frac{49}{100}$ 的女性抽烟，且女性人数小于 200，所以女性一共有 100 人，那么男性也就有 100 人。所以抽烟的总人数为 $100 \times 10\% + 100 \times 49\% = 59$ 人。

答：C

3. 译：上图给出了 50 个 1 到 6 之间的整数的频率分布。A：50 个值的算术平均值，B：50 个值的中位数。

解：这 50 个值的平均值为 $\frac{1 \times 2 + 2 \times 4 + 3 \times 7 + 4 \times 10 + 5 \times 16 + 6 \times 11}{50} = 4.34$ 。这

50 个值的中位数应该是这 50 个值从小到大排列后第 25 个值和第 26 个值的平均数，值为 1, 2, 3 和 4 的数据共有 $2 + 4 + 7 + 10 = 23$ 个，值为 5 的数据有 16 个，所以第 25 个值和第 26 个值均为 5，即这 50 个值的中位数是 5。所以中位数大于平均值。

答：B

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

4. 译：在上图中，圆的直径为 10。A：四边形 ABCD 的面积；B：40

解：我们假设当四边形 ABCD 是圆的内接正方形时，ABCD 的边长为 $\frac{10}{\sqrt{2}}$ ，所以

ABCD 的面积为 $\left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2 = 50$ ；假设当点 B 和 D 无限接近时，我们可以认为四边形 ABCD 的面积是无限接近 0 的。综上 A 和 B 的大小关系无法确定。

答：D

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

5. 译：圆 A 的半径比圆 B 的半径大 12。A：圆 A 的周长减圆 B 的周长；B：72

解：设圆 B 的半径为 r ，则圆 A 的半径为 $r+12$ 。所以圆 A 的周长减圆 B 的周长
 $=2\pi(r+12-r)=24\pi>72$ 。

答：A

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

6. 译：A：100x 的 $x\%$ ；B： x^2

解： $A=100x \cdot x\%=100x \cdot \frac{x}{100}=x^2$ ，所以 $A=B$ 。

答：C

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

7. 译：已知 $x<0$ ， $A=(x+4)(y+3)$ ， $B=(x+3)(y+4)$

解： $A-B=(x+4)(y+3)-(x+3)(y+4)=y-x$ ，因为题目没有给出 x 和 y 的大小关系，所以无法判断 A 和 B 的大小关系。

答：D

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

8. 译：已知 x 是一大于 1 的整数， $A=3^{x+1}$ ， $B=4^x$

解：我们可以利用除法判断大小：

$$\frac{A}{B} = \frac{3^{x+1}}{4^x} = 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x$$

当 $x=2$ 时， $\frac{A}{B} = 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{16} > 1$ ，即 $A > B$ 。

当 $x=3$ 时， $\frac{A}{B} = 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{81}{64} > 1$ ，即 $A > B$ 。

当 $x=4$ 时， $\frac{A}{B} = 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{243}{256} < 1$ ，即 $A < B$ 。

我们知道 $3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x$ 是单调递减函数，所以 $x \geq 4$ 时， $3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x < 1$ 。

即 $x \geq 4$ 时， $A < B$ 。所以 A 和 B 的大小关系不确定。

答：D

9. 译：在 Dubblefud 游戏中，红色、蓝色和绿色筹码分别价值 2、4 和 5 分。在一轮筹码选择中，筹码价值的分数之积为 16000。如果这轮选择中，选出蓝色筹码的数量等于绿色筹码的数量，那么在这轮选择中一共选出了多少个红色筹码？

解：设本轮选择中选出了 x 个蓝色筹码， y 个红色筹码，则也选出了 x 个绿色筹码。所以筹码价值的分数之积为 $4^x \cdot 5^x \cdot 2^y = 16000 = 2^7 \cdot 5^3$ ，化简得到： $2^{2x+y} \cdot 5^x = 2^7 \cdot 5^3$ ，即可列出方程组：

$$\begin{cases} 2x+y=7 \\ x=3 \end{cases}$$

解得： $x=3, y=1$ 。所以这轮选择中一共选出了 1 个红色筹码。

答：A

10. 译：如果 $\frac{17+m}{43+m} = \frac{2}{3}$ ，那么 m 的值是多少？

解：我们利用交叉相乘法，得到 $3(17+m) = 2(43+m)$ ，解得 $m=35$ 。

11. 译：购买某商品的人中有 55% 是女性，那么购买该商品女性数量与购买该商品男性数量之比是多少？

解：设购买该商品一共有 x 人，那么购买该商品的女性有 $55\% \cdot x$ 人，购买该商品的男性有 $x - 55\% \cdot x = 45\% \cdot x$ ，所以购买该商品女性数量与购买该商品男性数量之比是 $55\% \cdot x : 45\% \cdot x = 11 : 9$ 。

答：A

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

12. 译：一直角三角形的两直角边长度比例为 3:1，如果该三角形斜边长度为 $\sqrt{40}$ ，那么该三角形的周长在哪个区间内？

解：设较短的直角边长度为 $x(x>0)$ ，则较长的直角边长度为 $3x$ ，根据勾股定理我们可以列出方程： $x^2 + (3x)^2 = (\sqrt{40})^2 = 40$ ，解得 $x=2$ 。所以三角形的周长为 $2 + 3 \times 2 + \sqrt{40} \approx 14.32$ ，即在 14 和 15 之间。

答：A

13. 译：注意：饼图给出了截止到最近的一周，失业工人失业的周数的分布。

在饼图中，代表加工业中失业时间 11-14 周的扇形的圆心角比代表服务业中失业时间 11-14 周的扇形的圆心角大多少度？

解：在左边的饼图中，我们可以看出失业时间为 11-14 周所占比例是 10%，所以此扇形圆心角是 $360^\circ \times 10\% = 36^\circ$ 。在右边的饼图中，我们可以看出失业时间为 11-14 周所占比例是 5%，所以此扇形圆心角是 $360^\circ \times 5\% = 18^\circ$ ，所以大了 $36^\circ - 18^\circ = 18^\circ$ 。

答：D

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

14. 译：在加工业失业工人中，失业时间长度的中位数可能是多少？

解：把失业时间从小到大进行排列，排在大概 50% 的失业时间是中位数。从左边的饼图中能看出失业时间 1—4 周占 40%，失业时间 5—10 周占 20%，所以 50% 的数据在 5—10 周内，在选项中只有 B 符合要求。

答： B

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

15. 译：从加工业和服务业选一名失业员工，这名员工属于服务业且失业时间在 26 周以上的概率是多大？

解：加工业失业工人总共有 10million，服务业失业工人总共有 8million，失业 26 周以上的占 9%，所以失业 26 周以上的人数是 $8 \times 9\% = 0.72\text{million}$ 。加工业和服务业工人总数是 $10 + 8 = 18\text{million}$ ，所以概率是 $\frac{0.72}{18} = 0.04$ 。

答： A

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

16. 译：加工业失业在 5—10 周之间的人数与服务业失业在 5—10 周之间的人数之比是多少？请选择最接近的答案。

解：从左图中看出，加工业失业总人数为 10million，其中失业时间在 5—10 周占 20%，所以加工业失业在 5—10 周之间的人数为 $10 \times 20\% = 2\text{million}$ ；从右图中看出，服务业失业总人数为 8million，其中失业时间在 5—10 周占 16%，所以服务业失业在 5—10 周之间的人数为 $8 \times 16\% = 1.28\text{million}$ ，所以人数之比为 $2 : 1.28 = 25 : 16$ ，其中 C 选项最接近。

答： C

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

17. 译：上图展示了瓷砖的镶嵌图案。其中正方形的四条边是四个内切半圆的直径。一些蓝色的石头被放置在阴影区域内，并且会覆盖 95% 的阴影区域。如果正方形的每条边长度为 2 英尺，那么蓝色石头能覆盖瓷砖多大的面积(单位为平方英尺)？

解：阴影部分是由四个相同的图形构成。连接正方形一顶点和正方形的中心，阴影部分其中一个图形便被分成了两个全等的部分，其中一部分的面积为 $\frac{1}{4}\pi \cdot 1 - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}$ ，那么阴影部分的总面积就为 $(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}) \cdot 2 \cdot 4 = 2\pi - 4$ 。因为阴影部分只有 95% 会被覆盖，即 $(2\pi - 4) \cdot 0.95 \approx 2.2$ 。

答： C

18. 译：圆上等距离地分布着八个点。如果我们随意从这 8 个点中选出 4 个，并根据选出的 4 个点组成一个四边形，那么该四边形是正方形的概率是多少？

解：选出的 4 个点能组成一个正方形的选法只有两种，从八个点中选出 4 个点一共有 $C_8^4 = 70$ 种选法，所以概率为 $\frac{2}{70} = \frac{1}{35}$ 。

答：B

19. 译：下面数组中的数给出了 Geraldine 连续的十天内每天收到的短信数量：10, 9, 1, 3, 7, 7, 8, 3, 4, 3。那么下列关于这一系列数字的说法中，哪些是正确的？请选择所有正确的答案。

- A. 中位数比算术平均值小。
- B. 中位数比众数小。
- C. 众数比平均值小。
- D. 中位数和众数的平均值在 4 到 4.5 之间。

解：这组数据：中位数为 5.5，平均值为 5.5，众数为 3，由此可以看出 CD 正确。

答：CD

20. 译：一名兽医有 70 个客户，他们养猫，狗或者都养。在这其中，36 人养猫，包括 20 人既养猫又养狗。那么下列说法哪些是正确的？请选出所有正确答案。

- A. 有 54 名客户养狗
- B. 有 34 名客户只养狗
- C. 有 16 名客户只养猫

解：A：36 人养猫，那么另外的 $70 - 36 = 34$ 人养狗，再加上 20 个既养猫也养狗，那么加起来一共 $20 + 34 = 54$ 人养狗。A 正确。

B：在 54 个养狗的人中，有 20 个是有猫的，所以 34 个人是只养狗没养猫的。B 正确。

C：在 36 个养猫的人中，20 个既养猫也养狗，所以剩下的 16 个人中就是只养猫没养狗的。C 正确。

答：ABC

section 2

1. 译： $AB=12$ ， $AC=30$ ， $AD=\frac{2}{5}(AC)$ ，A：角 BDC 的大小，B： 120° 。

解：由题目已知条件 $AC=30$ ， $AD=\frac{2}{5}(AC)$ ，可得 $AD=12$ ， $AB=12$ 。所以 $AB=AD$ ， $\angle BDA=45^\circ$ ，则 $\angle BDC=135^\circ$ ，所以 $A > B$ 。

答：A

2. 译：已知 $PQ=QR=QS$, $A=PS$, $B=RS$ 。

解：本题需要注意的是我们不能被给出的图所迷惑，在 $\triangle PQS$ 和 $\triangle RQS$ 中，只有两条边对应相等，即 $PQ=QR$, $QS=QS$ ，并没有第三个对应相等的条件。根据我们所掌握的三角形全等的知识，这两个条件不足以判断出 $\triangle PQS$ 和 $\triangle RQS$ 是全等的，所以边 PS 和边 RS 的大小关系是不确定的。

答：D

3. 译：共 9000 人到 C 大学参加足球比赛，其中有 x 名学生来自 C 大学，还有 y 名不是 C 大学的学生。A：参加足球赛的人中不是学生的人数，B： $9000-x-y$ 。

解：易知学生可分为两类：来自 C 大学和不是来自 C 大学，这两个集合互斥且并集为全集，所以来参加足球赛的学生一共有 $x+y$ 人，所以非学生人数为 $9000-x-y$ ，即 $A=B$ 。

答：C

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

4. 译：事件 A 和 B 相互独立，事件 A 和 B 同时发生的概率为 0.6。A：事件 A 发生的概率，B：0.3。

解：事件 A 和 B 相互独立，所以，事件 A 和 B 同时发生的概率 $P(A)P(B)=0.6$ ，因为 $P(A)$ 和 $P(B)$ 均小于 1，所以事件 A 和 B 发生的概率均大于 0.6，当然也大于 0.3。即 $A>B$ 。

答：A

5. 译： n 是一负偶数， $A=\left(\frac{1}{3}\right)^n$, $B=(-3)^n$ 。

解：因为 n 是偶数，所以 $B=(-3)^n=3^n$ 。所以 $\frac{B}{A}=\frac{3^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n}=9^n$ ，又因为 n 是负数，

所以 $9^n<1$ ，即 $\frac{B}{A}<1$ ，所以 $B<A$ 。

答：A

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

6. 译： $x<0$, $A=x^5$, $B=x^4$ 。

解：因为 x 是负数，所以 $A=x^5<0$, $B=x^4>0$ ，所以 $A<B$ 。

答：B

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

7. 译：已知 $|2y-5|<1$, $A=y$, $B=1$ 。

解：解不等式 $-1 < 2y - 5 < 1$ ，解得 $2 < y < 3$ ，所以 y 恒大于 1，即 $A > B$ 。

答：A

8. 译：已知一个篮子里装有苹果，梨和橘子，苹果和梨的数量之比是 3:4，梨和橘子的数量之比是 5:3，A：篮子里苹果的数量，B：篮子里橘子的数量。

解：我们假设篮子里苹果的数量为 $3x$ ，那么篮子里梨的数量为 $4x$ 。再假设篮子里橘子的数量为 y ，那么 $4x : y = 5 : 3$ ，可以得到 $y = \frac{12}{5}x < 3x$ ，即篮子里苹果比橘子多。

答：A

9. 已知 v 是大于 1 的整数，若 v 是一个整数的平方，下列选项中哪些一定是整数的平方？请选择所有正确的答案。

解：令 $v = x^2$ ，其中 x 是整数。所以 $81v = 81x^2 = (9x)^2$ ，其中 $9x$ 是整数，所以 A 选项符合条件； $25v + 10\sqrt{v} + 1 = (5\sqrt{v} + 1)^2 = (5x + 1)^2$ ，其中 $5x + 1$ 是整数，所以 B 选项正确； $4v^2 + 4\sqrt{v} + 1$ 不是完全平方公式的形式，我们举例子进行判断：令 $v = 4$ ，则 $4v^2 + 4\sqrt{v} + 1 = 64 + 8 + 1 = 73$ ，不是完全平方数，所以 C 选项错误。

答：AB

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

10. 译：下列方程中所有解的和为多少？

解：我们首先对方程进行两边平方的处理，得到： $2x^2 - x - 9 = (x + 1)^2$ ，解得： $x = 5$ 或者 -2 。把两个值代入原方程发现 $x = -2$ 不符合原方程，所以 $x = 5$ 。

答：D

11. 译：已知 p 和 n 均为质数， $p - n = 4$ ，且 $\frac{3}{2} < \frac{p}{n} < 2$ ，那么 p 的值为多少？

解：因为 $p - n = 4$ ，所以 $n = p - 4$ ，把 $n = p - 4$ 代入到 $\frac{3}{2} < \frac{p}{n} < 2$ 中，得到：

$$\frac{3}{2} < \frac{p}{p-4} < 2$$

解该不等式得： $8 < p < 12$ ，又因为 p 是质数，所以 $p = 11$ 。

12. 译：从 1930 年到 1990 年，人均国民收入平均每年增长大概多少？

解：1930 年的人均国民收入是 \$6,610，1990 年的人均国民收入是 \$24,230，所以每年平均增长 $\frac{24230 - 6610}{60} \approx 293.6$ ，D 选项最为接近。

答：D

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

13. 译：1950 年，每位学生的平均收入大约占人均国民收入的多少？

解：1950 年，每位学生的平均收入是 \$1,330\$，人均国民收入是 \$9,540\$，所以占比是 $\frac{1330}{9540} \times 100\% \approx 14\%$ 。

答：C

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

14. 译：在给出的 7 个年份中，有几年学生的平均收入低于人均国民收入的 $\frac{1}{5}$ ？

解：我们逐年进行分析。

1930 年，人均国民收入的 $\frac{1}{5}$ 等于 $6610 \times \frac{1}{5} = 1322 > 710$ ，即 1930 年符合条件；

1940 年，人均国民收入的 $\frac{1}{5}$ 等于 $6960 \times \frac{1}{5} = 1392 > 950$ ，即 1940 年符合条件；

1950 年，人均国民收入的 $\frac{1}{5}$ 等于 $9540 \times \frac{1}{5} = 1908 > 1330$ ，即 1950 年符合条件；

1960 年，人均国民收入的 $\frac{1}{5}$ 等于 $12780 \times \frac{1}{5} = 2556 > 2020$ ，即 1960 年符合条件；

1970 年，人均国民收入的 $\frac{1}{5}$ 等于 $17340 \times \frac{1}{5} = 3468 > 3440$ ，即 1970 年符合条件；

1980 年，人均国民收入的 $\frac{1}{5}$ 等于 $20150 \times \frac{1}{5} = 4030 < 4400$ ，即 1980 年不符合条件；

1990 年，人均国民收入的 $\frac{1}{5}$ 等于 $24230 \times \frac{1}{5} = 4846 < 5890$ ，即 1990 年不符合条件；

综上，总共有 5 个年份符合条件。

答：E

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

15. 译：圆 W 的面积是 16π ，圆 Z 的面积是 4π 。那么圆 W 和圆 Z 的周长之比是多少？

解：圆 W 和圆 Z 的半径之比是 $\sqrt{\frac{16\pi}{\pi}} : \sqrt{\frac{4\pi}{\pi}} = 2 : 1$ ，所以两圆周长之比为 $2 : 1$ 。

答：A

[出处]《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

16. 译：上图中，内切于圆的正方形面积为 16，那么阴影部分的面积是多少？

解：因为正方形面积为 16，那么正方形的边长是 4，所以正方形对角线的长度为 $4\sqrt{2}$ ，即圆的直径为 $4\sqrt{2}$ ，所以圆的面积为 $\pi \cdot \left(\frac{4\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 8\pi$ 。阴影部分的面积等于圆的面积减内接正方形面积的 $\frac{1}{4}$ ，即 $\frac{1}{4}(8\pi - 16) = 2\pi - 4$ 。

答：B

[出处]《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

17. 译：下图给出了一个四周有人行道的花园，花园 18 英尺长，12 英尺宽。人行道是均匀的 3 英尺宽，且在直角处会连接起来。那么人行道的面积是多大？

解：计算人行道的面积我们可以利用大矩形的面积减去花园的面积。大矩形的长和宽分别为 $18+6=24$ 英尺和 $12+6=18$ 英尺，那么大矩形的面积为 $24 \times 18 = 432$ 平方英尺，花园的面积为 $18 \times 12 = 216$ 平方英尺，所以人行道的面积为 $432 - 216 = 216$ 平方英尺。

答：216

[出处]《The Official Guide to the GRE General Test》

18. 译：一个矩形宽为 5，周长为 34，那么该矩形对角线的长度是多少？

解：该矩形的长是 $\frac{34}{2} - 5 = 12$ ，所以对角线长度为 $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ 。

答：13

[出处]《The Official Guide to the GRE General Test》

19. 译：下列选项中哪些提供了足够信息让我们计算出三角形 ABC 的面积，请选择所有正确的答案。

- A. DBC 是等边三角形。
- B. ABD 是等腰三角形。
- C. BC 的长度等于 AD 的长度。
- D. BC 的长度为 10。
- E. AD 的长度为 10。

解：由上图能得到三角形 ABC 是直角三角形，且角 B 是直角，AB 长度已知。那么要想计算三角形 ABC 的面积，只需计算出 BC 的长度即可。

A：已知 DBC 是等边三角形，那么角 DCB 是 60° ，可以得出三角形 ABC 是 $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 的特殊直角三角形，可得 BC 长度为 10，即三角形 ABC 的面

积能够算出。

D: 直接给出了 BC 边的长度, 那么我们就可以计算出三角形 ABC 的面积了。

选项 BCE 都无法让我们确定 BC 边的长度, 即不能选择。

答: AD

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

20. 译: Mark 所工作的公司一共有 80 名员工, 每一位的薪水都不相同。Mark 的薪水为 43700 美元在第一个四分位区间中是第二高的。如果公司想要雇佣 8 名新员工, 且薪水均比原来 80 位员工的工资低。假设这 80 名老员工的工资水平不变, 那么 Mark 的工资水平在这 88 名员工中处于一个什么位置?

- A. 在第一个四分位区间内是第四高的。
- B. 在第一个四分位区间内是最高的。
- C. 在第二个四分位区间内是第二低的。
- D. 在第二个四分位区间内是第三低的。
- E. 在第二个四分位区间内是第五低的。

解: 首先我们要对四分位数的定义有着准确地掌握: 把所有数值有大到小排列并分成四等份, 处于三个分割点位置的数值就是四分位数。

全部员工有 80 人, 并分成四组: $0-25\%$, $25\%-50\%$, $50\%-75\%$, $75\%-100\%$, 每一组中有 20 名员工。在未招聘新员工时, Mark 在 $0-25\%$ 这个区间内的第二高, 所以他是倒数第 19 名。现在有 8 名新员工加入, 那么总数变成 88 人, 每组有 22 人。而这 8 个人比之前最低的还低, 所以可以把 Mark 的名次往上加 $19+8=27$ 人。 $27-22=5$, 此时 Mark 已经进入到第二个区间, 是倒数第五低的。

答: E

第四套答案解析

section 1

1. 译: $A=950^{2,000}$, $B=10^{6,000}$ 。

解: $B=10^{6,000}=(10^3)^{2,000}=(1,000)^{2,000}>950^{2,000}$, 即 $B>A$ 。

答: B

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

2. 译: 一张桌子今天的价格比昨天降低了 20%, 一盏台灯今天的价格比昨天降低了 30%。A: 桌子降低了多少美元; B: 台灯降低了多少美元。

解: 我们不知道昨天台灯和桌子的具体价格, 所以无法判断两种物品降低的具体价格。假如桌子价格远低于台灯的价格, 那么台灯降低的价格就高于桌子降低的价格; 如果桌子的价格远高于台灯的价格, 那么桌子降低的价格就高于台灯降低的价格。所以 A 和 B 大小关系不确定。

答: D

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

3. 译: 已知 $x>0$, A: x 的 0.5%, B: $\frac{1}{2}x$ 。

解: $A=0.5\% \cdot x$, $B=\frac{1}{2}x=50\% \cdot x$, 因为 x 是正数, 所以 $B>A$ 。

答: B

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

4. 译: 事件 E 发生的概率是 p , 事件 E 不发生的概率是 s 。 $A=p+s$, $B=ps$ 。

解: 事件发生的概率与不发生的概率之和为 1, 所以 $p+s=1$, 即 $A=1$; 若事件 E 是必然事件或者是不可能事件, 则 $ps=0$; 若 $ps \neq 0$, 则 p 和 s 都是大于 0 小于 1 的数, 所以 ps 一定是小于 1 的。综上, $B<A$ 。

答: A

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

5. 译: 一个集合中有 24 个正整数, 其中 12 个小于 50, 剩下的大于 50。A: 这 24 个整数的中位数, B: 50。

解: 我们只知道这 24 个整数的大概分布, 不知道他们的具体数值, 所以不能判断其中位数和 50 的大小: 当小于 50 的 12 个数中最大的那个数比 50 小很多, 而大于 50 的 12 个数中最小的那个数只比 50 大一点, 那么中位数就小于 50;

当小于 50 的 12 个数中最大的那个数只比 50 小一点，而大于 50 的 12 个数中最小的那个数只比 50 大很多，那么中位数就大于 50。

答：D

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

6. 译：一圆内切于边长为 5 的正方形中。A：圆的周长，B：15。

解：因为圆内切于正方形，所以直径和正方形边长相等，即直径为 5。所以圆的周长为 $5\pi > 15$ ，所以 $A > B$ 。

答：A

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

7. 译：正方形 $FGHJ$ 的边长为 x ，区域 FGJ 是以 F 为圆心的圆的一个扇形。A：阴影区域的面积，B： $\frac{x^2}{4}$ 。

解：阴影部分的面积 = 正方形 $FGHJ$ 的面积 - 扇形 GJF 的面积。正方形 $FGHJ$ 的边长为 x ，则面积为 x^2 。扇形 GJF 的半径为 x ，则面积为 $\frac{1}{4}\pi x^2$ 。所以阴影部分的面积为 $x^2 - \frac{1}{4}\pi x^2 = (1 - \frac{1}{4}\pi)x^2 \approx 0.21x^2 < \frac{x^2}{4}$ ，即 $A < B$ 。

答：B

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

8. 译：在一概率实验当中， G 和 H 是独立事件。事件 G 发生的概率是 r ，事件 H 发生的概率是 s ， r 和 s 均大于 0。A： G 和 H 只有一个发生的概率，B： $r + s - rs$ 。

解：事件 H 不发生的概率是 $1 - s$ ，事件 G 和事件 H 是独立事件意味着事件 G 和事件“ H 不发生”也是独立事件，所以事件 G 发生而事件 H 不发生的概率是 $r(1 - s)$ ；同理事件 H 发生而事件 G 不发生的概率是 $s(1 - r)$ ；所以 G 和 H 只有一个发生的概率是 $r(1 - s) + s(1 - r) = r + s - 2rs$ ，所以 $A < B$ 。

答：B

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

9. 译：在 xy 平面内，一个圆的圆心为 $(-4, 3)$ 且经过原点。那么这个圆的面积是多少？

解：该圆的半径为 $\sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$ ，那么这个圆的面积是 $\pi \cdot 5^2 = 25\pi$ 。

答：E

10. 译： x 和 y 都是大于 1 的整数，如果 $4x \cdot 7y = 756$ ，那么 $x + y$ 的值是多少？

解：因为 $4x \cdot 7y = 756$ ，所以 $x \cdot y = 27$ ，因为 $27 = 3 \times 9 = 1 \times 27$ ，且 x 和 y 均大

于 1, 所以 $x+y=3+9=12$ 。

答: 12

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

11. 译: 一个盒子里有 4 个红块, 5 个蓝块和 3 个黄块。Judy 将随机从盒子里挑出一个块并放回, 然后再随机从盒子里挑出一个块。那么挑出的两个块均是黄色的概率是多少? 请以分数形式给出你的答案。

解: 由于第一次取出之后, 还要再放回, 所以第一次从盒中取出黄色的概率和第二次的概率是相同的, 且两次取出的行为是独立事件。因此两者同时发生的概率为单个事件发生概率的乘积 $\frac{3}{4+5+3} \times \frac{3}{4+5+3} = \frac{1}{16}$ 。

12. 译: 1993 年中, 售出的贺卡的平均单价为 \$1.25。除去右表给出的 10 个节日, 其他时间售出的贺卡数量比下列哪个节日售出的贺卡数量多? 请选择所有正确的答案。

解: 从左图能够看出 1993 售出贺卡的总价格大约为 \$5.75billion, 由于贺卡平均售价为 \$1.25, 那么 1993 售出贺卡的数量为 4.6billion。由右图可知给出的 10 个节日共卖出了数量为 3.9billion 的贺卡, 那么除去这 10 个节日外共卖出 $4.6-3.9=0.7billion=700million$ 张贺卡。从右图中看出, 除了 A 和 B 均符合条件。

答: CDEFGH

13. 译: 从 1990 年到 1993 年, 卖出贺卡的年收入增加了多少?

解: 从左图看出 1990 年卖出贺卡的收入为 4.5billion, 1993 年卖出贺卡的收入为 5.8billion, 那么增加了 $\frac{5.8-4.5}{4.5} \approx 28.89\%$ 。

答: D

14. 译: 1993 年, Valentine's Day 卖出的贺卡数量大约是 Thanksgiving 卖出贺卡数量的多少倍?

解: 从右表看出 1993 年 Valentine's Day 卖出的贺卡数量为 900million, Thanksgiving 卖出贺卡数量为 42million, $\frac{900}{42} \approx 21.42$ 。

答: A

15. 译: 1993 年, 一家贺卡公司在母亲节卖出的贺卡数量占该年母亲节售出贺卡总量的 40%, 且每张贺卡的价格范围是 \$1.00 到 \$8.00。如果该公司在 1993 年母亲节的收入为 r (百万美元), 那么下列选项中哪一个给出了正确的 r 的范围?

解：1993 年母亲节共卖出 155million 张贺卡，那么该公司售出 $155 \times 40\% = 62$ million 张贺卡。每张贺卡最低价为 \$ 1.00，最高价为 \$ 8.00，那么范围就是 $1 \times 62 < r < 62 \times 8 = 62 < r < 496$ 。

答：E

16. 译：集合 K 由数字 -10, -5, 0, 5 和 10 组成。那么下列集合中，哪些集合极差和集合 K 的一样。请选择所有正确的答案。

解：集合 K 的极差为 $10 - (-10) = 20$ 。集合 A 的极差为 $15 - (-15) = 30$ ，A 不正确；集合 B 的极差为 $13 - (-7) = 20$ ，B 正确；集合 C 的极差为 $10 - 0 = 10$ ，C 不正确；集合 D 的极差为 $22 - 2 = 20$ ，D 正确；集合 E 的极差为 $24 - 4 = 20$ ，E 正确。

答：BDE

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

17. 译：如果 7 个连续整数的乘积等于这 7 个数的中位数，那么这 7 个数中最小的那个是几？

解：易知这 7 个数分别为 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3，所以最小的数为 -3。

18. 译：毕业班的 236 名学生中，142 名学习代数，121 名学习化学。那么既学习代数又学习化学最多有多少名学生？

解：需要注意的是，本题并没有规定所有的学生只能学习代数和化学这两门学科。所以这两个学科交集的最大的数就是 142 和 121 取那个较小的数，即 121 个人既修化学也修代数。所以最大数应该是 121。

答：121

19. 译：数字 2, 3, 4, 5, 6, 7 能组成多少个比 400,000 大的六位数(每个数字只能使用一次)？

解：首位数字的选择可能是 4, 5, 6, 7 共 4 种，第二位数字的选择为除了首位的剩下的 5 种。第三位则有 4 种选择。以此类推，根据乘法原理可以得到总数为 $4 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 480$ 。

答：B

20. 译：在直角三角形 ABC 中，两条直角边长度之比为 2:5，如果三角形 ABC 的面积为 20，那么斜边的长度是多少？

解：设两直角边的长度分别为 $2x$ 和 $5x$ ，所以三角形 ABC 的面积为 $\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 5x = 5x^2 = 20$ ，所以 $x = 2$ ，则两条直角边的长度分别是 4 和 10，所以斜边的长度是 $\sqrt{4^2 + 10^2} = 2\sqrt{29}$ 。

答：E

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

section 2

1. 译: A: AB 的长度, B: BC 的长度。

解: 要注意题目中给出的图形不一定是按比例画的。给出的图中可以看出 $AB > BC$ 。我们可以假设当 $\angle BAC = 90^\circ$ 时, 此时 $AB < BC$ 。所以 AB 和 BC 的长度大小关系不确定。

答: D

2. 译: n 是一个能被 6 整除的正整数。A: n 被 12 除的余数, B: n 被 18 除的余数。

解: 我们可以举几个例子来判断大小。

当 $x=6$ 时, 6 被 12 除的余数是 6, 6 被 18 除的余数也是 6, 所以 $A=B$;

当 $x=12$ 时, 12 被 12 除的余数是 0, 12 被 18 除的余数也是 12, 所以 $A < B$;

综上, A 和 B 的大小关系不确定。

答: D

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

3. 译: 在实验 X 中我们获得了 500 个测量值, 平均值为 280, k 是第 75 个百分位数。在实验 Y 中我们获得了 500 个测量值, 平均值为 280, n 是第 75 个百分位数。

$A=k$, $B=n$ 。

解: k 是第 75 个百分位数, 即这 500 个数按顺序排列处于第 75% 位置的数, 即按顺序排列第 375 个数。但是题目没有给出实验 X 和 Y 的具体范围, 所以无法求得这两个试验中按顺序排列第 375 个数的具体数值, 所以无法比较。

答: D

4. 译: A: 线段 AC 的长度, B: 3。

解: 令 AC 边上的高为 BD 。直角三角形 BCD 是一个特殊的 $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ 的直角三角形, 三边边长之比为 $1:\sqrt{3}:2$, 所以 $BD=\sqrt{3}$, $CD=1$ 。三角形 ABD 是一等腰直角三角形, 所以 $AD=BD=\sqrt{3}$, 所以 $AC=AD+DC=\sqrt{3}+1 \approx 2.732 < 3$, 所以 $A < B$ 。

答: B

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

5. 译: $f(x)=4x^2+28x+49$ 对于所有 x 成立。A: 使得 $f(b)$ 是函数 f 的最小值的 b 的值, B: -3 。

解：对于开口向上的二次函数，我们知道最小值在对称轴处取到。函数 f 的对称

$$\text{轴为 } -\frac{28}{2 \times 4} = -\frac{7}{2} < -3, \text{ 即 } A < B.$$

答：B

6. 译：在 xy 平面内，直线 k 斜率为 2 且经过点 $(3, r)$ ， $A=r$ ， $B=3$ 。

解：斜率为 2 的直线可经过任意一个横坐标为 3 的点，即 3 和 r 并没有任何关系，所以 A 和 B 大小关系不确定。比如直线 $y=2x-5$ 经过点 $(3, 1)$ ，此时 $r=1 < 3$ ；直线 $y=2x-2$ 经过点 $(3, 4)$ ，此时 $r=4 > 3$ 。

答：D

7. 译：C 大学学生毕业六个月之后的收入的中位数比 D 大学的高出 \$3,000。A：C 大学学生毕业六个月之后的收入的第 75 个百分位数，B：D 大学学生毕业六个月之后的收入的第 75 个百分位数。

解：我们不知道两个大学生毕业六个月之后的收入是如何分布的，所以只根据百分位数的大小比较无法帮助我们比较两组数据第 75 个百分位数的大小，即 A 和 B 的大小关系不确定。

答：D

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

8. 译：A：面积为 R 的等腰直角三角形的一条直角边的长度，B：面积为 R 的正方形的边长。

解：令等腰直角三角形的直角边长为 x ，则面积为 $\frac{1}{2}x^2=R$ ，所以 $x=\sqrt{2R}$ ；面积为 R 的正方形的边长为 $\sqrt{R} < \sqrt{2R}$ 。

答：A

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

9. 译：在直角坐标系中，点 $(3, 1)$ 在以 $(0, -3)$ 为圆心的圆上，那么该圆的面积是多少？

解：该圆的半径为 $\sqrt{(3-0)^2 + (-3-1)^2} = 5$ ，所以该圆的面积为 25π 。

答：D

10. 译：某培养皿中有 40 个细菌样品，其中有 3 个样品具有某种特性。如果从培养皿中随机选出 5 个样品且不替换，那么选出的这 5 个样品中只有一个有这一特性的概率是多少？

解：从 40 个样品中选出 5 个一共有 C_{40}^5 种选择，选出 5 种样品 1 种具有特性其他 4 种没有这一特性一共有 $C_3^1 \times C_{37}^4$ 种选择，所以概率是 $\frac{C_3^1 \times C_{37}^4}{C_{40}^5}$ 。

答: E

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

11. 译: 小于 10000 的正整数中, 有多少各数位上数字之积为 210?

解: 先对 210 进行分解: $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 5 \times 6 \times 7 = 5 \times 6 \times 7 \times 1$ 。

当用 2, 3, 5, 7 这 4 个数字组成一个整数, 共有 $A_4^4 = 24$ 个不同的整数;

当用 5, 6, 7 这 3 个数字组成一个整数, 共有 $A_3^3 = 6$ 个不同的整数;

当用 1, 5, 6, 7 这 4 个数字组成一个整数, 共有 $A_4^4 = 24$ 个不同的整数;

所以一共有 $24 + 24 + 6 = 54$ 个。

答: D

12. 译: 圆 A 的半径为 r , 圆 B 的半径为 $\frac{3}{4}r$, 那么圆 A 和圆 B 的面积之比是多少?

解: 两圆面积之比是 $\pi r^2 : \pi \left(\frac{3}{4}r\right)^2 = 1 : \frac{9}{16} = 16 : 9$ 。

答: E

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

13. 译: 1988 年, 早晨上下班时间所需要的行驶时间是晚上上下班时间的多少倍?

解: 1988 年早晨交通通行时间内, 行驶十英里需要的时间大约是 13 分钟, 而晚上的行驶时间大约是 31 分钟, 早晨的时间大约是晚上时间的 40%, 所给的 5 个选项中 B 选项最接近该百分比。

答: B

14. 译: 从 1986 年到 1988 年, 上午上下班时间所需要的行驶时间大概减少了多少(答案为百分数形式)?

解: 1986 年早晨交通通行时间内行驶十英里所需要的时间大概是 17.5 分钟, 而 1988 年该数据大约是 13 分钟, 下降的百分比为: $\frac{17.5 - 13}{17.5} \times 100\% \approx 25\%$ 。

答: C

15. 译: 在图中, $\frac{x+y+z}{45}$ 的值是多少?

解: 三角形内角和为 180° , 所以 $x+y+z = 180$, 所以 $\frac{x+y+z}{45} = \frac{180}{45} = 4$ 。

答: C

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

16. 等式 $y=2 \cdot |4x-4| -10$ 的图像在 y 轴上的截距是多少?

解: 当 $x=0$ 时, $y=2 \times 4 -10 = -2$, 所以等式 $y=2 \cdot |4x-4| -10$ 的图像在 y 轴上的截距是 -2 。

答: -2

17. 译: 上图给出了 xy 平面的象限。在 xy 平面内, 直线 m 斜率为正数, 且在 x 轴上的截距为正数, 那么直线 m 经过哪些象限? 请选择所有正确答案。

- A. 第一象限
- B. 第二象限
- C. 第三象限
- D. 第四象限

解: 通过画出直线 m 可以得知该直线经过第一、三、四象限。

答: ACD

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

18. 译: Diana 向某一账户投入了 \$61,293, 年利率固定, 每季度计算复利。五年后, 该账户里本息和共 \$76,662.25。那么该账户的年利率大概是多少?

解: 设年利率为 r , 那么五年后的本息和为 $61293 \left(1 + \frac{r}{4}\right)^{4 \times 5} = 76662.25$, 化简得到: $\left(1 + \frac{r}{4}\right)^{20} = 1.25$ 。在这里我们给出一个估算公式: 当 x 趋于 0 时, $(1+x)^n \approx 1+nx$ 。应用该估算公式, $\left(1 + \frac{r}{4}\right)^{20} \approx 1 + 20 \cdot \frac{r}{4} = 1 + 5r$, 所以 $r \approx 0.05 = 5\%$, 选项中 B 选项最接近。

答: B

19. 一个正整数的“反射”可以通过把各个数位上的数字反过来得到。比如: 321 就是 123 的“反射”。那么一个五位数和它的反射之间的差值一定能被几整除?

解: 设五位数 $A=10000a+1000b+100c+10d+e$, 那么它的反射就为 $10000e+1000d+100c+10b+a$, 所以两者的差为 $10000a+1000b+100c+10d+e - (10000e+1000d+100c+10b+a) = 9999a+990b-990d-9999e = 9(1111a+110b-110d-1111e)$ 能被 9 整除。

答: E

20. 译: 用数字 2, 4, 6, 9 组成两个两位数(不重复使用这 4 个数字), 那么组成的这两个两位数最小的差值是多少?

解：要使得两个两位数差值最小，首先需要使其十位数相差最小，即选择 2 和 4 或者 4 和 6 作为十位数：若选定 2、4 作为十位数，那么这两个数应该是 29 和 46，差值为 $46 - 29 = 17$ ；若选择 4、6 作为十位数，那么这两个数应该是 49 和 62，差值为 $62 - 49 = 13$ 。因为 $13 < 17$ ，所以这两个两位数为 49 和 62，差值为 13。

答：D

第五套答案解析

section 1

1. 译: $A = \frac{1}{x}$, $B = \frac{x+1}{x^2}$ 。

解: $B - A = \frac{x+1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x^2} - \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x^2} > 0$, 所以 $B > A$ 。

答: B

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

2. 译: 上图中, 正方形 PQRV 和 VRST 边长都为 6, A: 阴影部分的面积, B: 36。

解: 已知两正方形的边长均为 6, 即 QR、RS 和 PQ 的长度均为 6, 所以 QS 的长度为 12。易知阴影部分是一直角三角形, 所以面积等于 $\frac{1}{2} \cdot PQ \cdot QS = \frac{1}{2} \times 6 \times (6+6) = 36$, 即 $A = B$ 。

答: C

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

3. 译: 上图中 ABCD 是平行四边形。A: ABCD 的面积, B: 24。

解: 易知当平行四边形以 AD 为底边时, 高是小于边 CD 的, 即 ABCD 的面积 $< 4 \times 6 = 24$, 所以 $A < B$ 。

答: B

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

4. 译: 点 O 是周长为 12 的圆的圆心, 点 P 是圆内不同于圆心的一点, A: 点 P 与圆上一点距离的最大值加上与圆上一点距离最小值的和, B: 4。

解: P 到圆上一点的最大距离与最小距离之和应为圆的直径 $d = \frac{12}{\pi} \approx 3.820 < 4$, 即 $A < B$ 。

答: B

5. x 和 z 的平均值比 y 大, 且 $x < y < z$ 。A: x, y, z 的平均值, B: x, y, z 的中位数。

解: 将题目条件转化成不等式形式:

$$\begin{cases} \frac{x+z}{2} > y \\ x < y < z \end{cases}$$

即：

$$\begin{cases} x+z > 2y \\ x < y < z \end{cases}$$

则 x , y 和 z 的平均值为 $\frac{x+y+z}{3} > \frac{2y+y}{3} = y$

而三个数的中位数为 y , 所以 A 较大。

答：A

6. 译：在变量 x 的分布中，第 50 个百分位数是 48.5，第 60 个百分位数是 56.5。

A： x 的分布中第 40 个百分位数，B： 40.5。

解：由于 x 的分布是未知的，无法从第 50 个百分位数和第 60 个百分位数推算第 40 个百分位数，所以 A 和 B 大小关系不确定。

答：D

7. 在一个俱乐部内，35 名男性平均年龄是 24.2 岁，25 名女性平均年龄为 27.6 岁。A：所有俱乐部内人的平均年龄，B： 25.9。

解：俱乐部内男性的年龄之和 $24.2 \times 35 = 847$ ，女性的年龄之和为 $25 \times 27.6 = 690$ ，所以俱乐部内 60 人的年龄之和为 $847 + 690 = 1537$ ，那么平均年龄为 $1537/60 = 25.6 < 25.9$ 。

答：B

8. 译：A：周长为 20 的矩形的面积，B：一个底为 5，高为 10 的三角形。

解：矩形周长一定时，长和宽相等即该矩形是正方形时，该矩形面积最大。所以该矩形面积最大为 $\left(\frac{20}{4}\right)^2 = 5^2 = 25$ ；三角形面积为 $\frac{1}{2} \times 5 \times 10 = 25$ 。所以矩形和三角形的面积大小关系还不能确定。

答：D

9. 译：一门人文学科的读书清单包含 10 本书，其中包括 4 本自传，剩下的都是小说。每个学生要求去从这 10 本书中选出 4 本，要包括至少 2 本自传。那么满足要求的选择一共有多少种？

解：一共有三种情况。

学生选 2 本自传 2 本小说，则一共有 $C_4^2 \cdot C_6^2 = 90$ 种选择；

学生选 3 本自传 1 本小说，则一共有 $C_4^3 \cdot C_6^1 = 24$ 种选择；

学生选 4 本自传 0 本小说，则一共有 $C_4^4 \cdot C_6^0 = 1$ 种选择；

所以一共有 $90 + 24 + 1 = 115$ 种选择。

答：B

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

解：题目要找满足条件的奖励的个数。提供某一项奖励的全部公司都要提供医疗保险才是满足条件的，比较医疗保险和公司数量那一列。可以看出，profit sharing, stock ownership, stock options 符合条件，即共三种。

答：D

14. 译：我们现在需要选出一个组合，该组合有两种津贴和一种奖励组成。选择的收益需要在所调查的公司中有一半以上提供这种津贴，而所选择的奖励需要在所调查的公司中有 $1/3$ 的公司提供这种奖励。那么一共有多少种可能的组合？

解：半数以上的公司提供的 benefit 有 4 个(除了 tele-commuting 不到 300)， $1/3$ 以上的公司提供的 incentive 有 2 个，现在进行组合， $C_4^2 \cdot C_2^1 = 12$ 。

答：E

15. 译：在五种津贴中，我们需要选出使得同时提供该津贴和股权奖励的公司数量与提供该津贴的公司数量之比最大的津贴种类：

- A. 医疗报销
- B. 弹性上班制
- C. 丧失劳动能力保险
- D. 学费
- E. 远程办公

解：对于 A，比值是 $60/588$ 。对于 B，比值是 $41/126$ 。对于 C，比值是 $44/387$ ，对于 D，比值是 $41/303$ ，对于 E，比值是 $24/207$ ，D 最大。

答：D

16. 译：在 xy 平面内，点 $(t, t-1)$ 在直线 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$ ，那么 t 的值是多少？

请以分数形式给出你的答案。

解：我们将点 $(t, t-1)$ 代入直线表达式中，得到 $t-1 = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{3}$ ，解得 $t = \frac{8}{9}$ 。

17. 译：已知 1 千米大约等于 0.62 英里。那么现在有一辆汽车时速为 50 英里，那么它每小时大概行驶多少千米？

解：50 英里等于 $50 \div 0.62 \approx 81\text{km}$ 。

答：E

18. 译：一沙漠军事基地的水资源供应足够 15 个人使用 21 天。假如每个人使用水的速率不变，那么水资源足够 9 个人使用多少天？

解：我们设这个地方的水源总量为单位“1”，所以每人每天使用总量的 $\frac{1}{15 \times 21} = \frac{1}{315}$ ，我们假设 9 个人能够使用 x 天，所以 $9x \cdot \frac{1}{315} = 1$ ，所以求得 $x = 35$ 。

答：C

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

19. 译：一位经理计划组建一个六人的队伍来完成一项工程。这个队伍有 11 位候选人，经理已经从中挑出了 3 人。那么剩下的三人，经理一共有多少种不同的选择组合？

解：11 位候选人已经选走了 3 人，那么现在这个问题等价于从 8 位候选人中选出三人，则一共有 $C_8^3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$ 种组合。

答：C

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

20. 译：一项调查中，58% 的人至多 40 岁，70% 的人至多 60 岁。如果在这项调查中有 252 个人年龄大于 40 岁且至多 60 岁，那么这项调查一共有多少人？

解：我们把题意进行转述：小于等于 40 岁的人数占总人数的 58%，小于等于 60 岁的人数占总人数的 70%，现在已知岁数在 40—60 之间的人数为 252，即占比为 $70\% - 58\% = 12\%$ ，所以这项调查中总人数为 $\frac{252}{12\%} = 2,100$ 。

答：B

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

section 2

1. 译： $\frac{1-x}{x-1} = \frac{1}{x}$ ， $A = x$ ， $B = -\frac{1}{2}$ 。

解：利用交叉相乘解方程，解得 $x = \pm 1$ 。但是 $x - 1$ 是分母，所以 $x \neq 1$ ，即 $x = -1$ 。所以 $A < B$ 。

答：B

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

2. 已知 $2u + v = 14$ ， $uv = 0$ ， $A = u$ ， $B = v$ 。

解：因为 $uv = 0$ ，所以 $u = 0$ 或者 $v = 0$ ； $u = 0$ 时， $v = 14$ ； $v = 0$ 时， $u = 7$ ；所以 A 和 B 的大小关系不确定。

答：D

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

3. x , y 和 z 是一三角形三边边长。 $A=x+y+z$, $B=2z$ 。

解：我们知道三角形两边之和大于第三边，所以 $x+y>z$ ，所以 $x+y+z>2z$ 。

答：A

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

4. 译：慈善机构的 4 笔捐款的算术平均值为 \$80，其中有两笔捐款分别为 \$90 和 \$60。A：剩下两笔捐款的平均值，B：80。

解：四笔捐款的总和为 $4 \times 80 = 320$ ，所以剩下两笔捐款的总和为 $320 - 90 - 60 = 170$ ，那么剩下两笔捐款的平均数为 $170 \div 2 = 85 > 80$ 。

答：A

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

5. 译：集合 S 由 8 个数组成，其中 4 个负数 4 个正数。A：集合 S 中 8 个数的算术平均值，B：集合 S 中 8 个数的中位数。

解：题目只给出了 8 个数字的正负，并没有给出具体的数值，所以中位数和平均数的大小关系是无法确定的。我们举几个例子：

$S = \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ ，所以 S 中 8 个整数的平均值为 0，中位数为 0，所以 $A=B$ ；

$S = \{-100, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ ，所以 S 中 8 个整数的平均值为 -12，中位数为 0，所以 $A < B$ ；

$S = \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 100\}$ ，所以 S 中 8 个整数的平均值为 12，中位数为 0，所以 $A > B$ ；

综上，A 和 B 的大小关系不确定。

答：D

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

6. xy 平面一直线经过点 (5, 4) 和 (2, 1)。A：直线的斜率，B：0。

解：直线的斜率为 $\frac{4-(-1)}{5-2} = \frac{5}{3} > 0$ ，所以 $A > B$ 。

答：A

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

7. 译：数组 S: 2, 5, s , t ；数组 Y: 2, 5, t ，且数组 X 内数的平均数与数组 Y 内的相等。 $A=s$, $B=0$ 。

解：数组 X 内数的平均数 $= \frac{2+5+s+t}{4}$ ，数组 Y 数的平均数 $= \frac{2+5+t}{3}$ ，由题目

可知： $\frac{2+5+s+t}{4} = \frac{2+5+t}{3}$ 。得到 $s = \frac{t+7}{3}$ ，但是这并不能判断出 s 与 0 的

大小关系，即 A 和 B 的大小关系不确定。

答：D

8. 译：x 是一正整数，x 被 2, 4, 6, 8 除的余数都是 1。A=x, B=24。

解：由题目可知 $x-1$ 是 2, 4, 6, 8 的公倍数，即 $x-1$ 是 24 的倍数。值得注意的是，x 也可以等于 1，此时 $x < 24$ 。所以 A 和 B 的大小关系是不能确定的。

答：D

9. 译：下列选项中哪个不可能是两个质数之和？

解：如果把一个奇数分解成两个整数之和，那么这两个整数一定是一个奇数、一个偶数；我们知道偶数中只有 2 是质数，所以为了将奇数分解为两个质数之和，其中的偶数一定是 2。那么我们观察选项中的奇数 9 和 11， $9=2+7$ ，2 和 7 都是质数，是成立的； $11=2+9$ ，9 不是质数，所以 11 无法分解成两个质数之和。

答：D

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

10. 译：一个正整数 n 被 45 除余数为 18，那么下列选项中哪一个一定是 n 的因子？

解：因为 n 被 45 除余数为 18，所以令 $n=45k+18$ ，k 为非负整数。所以 $n=45k+18=9 \cdot 5k+9 \times 2=9(5k+2)$ ，其中 $5k+2$ 是正整数，所以 9 一定是 n 的因子。

答：B

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

11. 译：1, -3, 4, 1, -3, 4, 1, -3, 4...

在上面这一序列内，前三个数无限循环。那么该序列中第 150 个数到第 154 个数的和是多少？

解： $150=3 \times 50$ ，所以第 150 个数为 4，之后以此类推从第 150 个数到第 154 个数为 4, 1, -3, 4, 1，所以和为 $4+1+(-3)+4+1=7$ 。

答：7

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

12. 译：有多少个年龄段的意外受伤人数占到了总人数的 15% 以上？

解：总人数通过右边饼状图把男女受伤人数求和，得总受伤人数是 59, 200，那 $15\% \times 59, 200 = 8, 880$ ，所以我们去找年龄中大于 8,880 的，一共有 3 个年龄段超过 8880，分别是 25-34, 35-44, 45-54 这三个年龄段。

答：C

13. 译：在 1998 年，如果 34 岁及以下年龄段意外受伤中有一半是由总人数造成，那么 35 岁及以上年龄段的意外受伤中有多少是由男性造成的？

解：34 岁和 34 岁以下总人数一共是 28,000 人，一半的话也就是 14,000 人是由男性导致的，男性总人数是 39,400，所以在 35 岁或者 35 岁以上的年龄段还有 $39,400 - 14,000 = 25,400$ 人是由男性导致的受伤。

答：D

14. 译：对于 55—64 岁这一年年龄段，由于意外受伤造成的平均工时损失为 48.5。如果一周工作时间为 40 小时，那么 55—64 岁年龄段因为意外受伤一共导致了大概多少个工作周的损失？

解：55—64 这个年龄段的受伤量是 5,200，所以总共的工作时间的损失是 $48.5 \times 5,200 = 252,200$ 小时，每个工作周按 40 小时来算，所以损失的工作周是 $252,200 \div 40 = 6,305$ 工作周，所以最接近的选项是 E。

答：E

15. 译：上周一，一商店以每只 x 美元的价格卖出 17 只扳手。上周二，该商店降价并以每只 $0.5x$ 美元的价格卖出 8 只扳手。那么周一周二卖出的 25 只扳手的平均价格是多少？

解：该商店总共卖出了 25 只扳手，共收入 $17x + 0.5x \cdot 8 = 21x$ ，那么这 25 只扳手的平均价格为 $21x/25 = 0.84x$ 。

答：E

16. 译：已知 $1 + x + x^2 + x^3 = 60$ ，那么 x ， x^2 ， x^3 和 x^4 的平均值是多少？

解：因为 $1 + x + x^2 + x^3 = 60$ ，所以等式两边同时乘 x ，得到 $x + x^2 + x^3 + x^4 = 60x$ ，所以 x ， x^2 ， x^3 和 x^4 的平均值是 $\frac{60x}{4} = 15x$ 。

答：B

[出处] 《The Official Guide to the GRE General Test》

17. 译：一排人排队购买电影票，现在 shandra 后面有 10 个人。假如 Shandra 前面有 3 个人买完了票离开队伍，除此之外没有其他人离开队伍，那么 Shandra 前面还剩下 8 个人。那么现在队伍里有多少人？

解：Shandra 后面有 10 个人，题目中说如果 Shandra 前面离开 3 个人那么还剩 8 个人，那么意味着 Shandra 现在有 11 个人，算上她自己队伍一共 $11 + 1 + 10 = 22$ 个人。

答：22

18. 译：满足不等式 $x^2 - 10 < 0$ 的整数有多少个？

解：因为 $x^2 - 10 < 0$ ，所以 $-\sqrt{10} < x < \sqrt{10}$ 。所以满足不等式的有 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 共七个。

答：D

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

19. 译：如果 $xy^2 = 12$ 且 $xy = 4$ ，那么 x 的值是多少？

解： $y = \frac{xy^2}{xy} = \frac{12}{4} = 3$ ，所以 $x = \frac{4}{y} = \frac{4}{3}$ 。

答：E

[出处] 《Official GRE Quantitative Reasoning Practice Question》

20. 译： x 取值为多少能使得 2×3^n 的个位数为 4？

解：3 的指数幂有如下规律： $3^1 = 3, 3^2 = 9, 3^3 = 27, 3^4 = 81, 3^5 = 243, \dots$ 要使 2×3^n 的个位数为 4，那么 3^n 的个位数字就是 7，即 $n = 4k + 3$ ，其中 k 为整数。所以，选项中只有 15 符合要求。

答：D

附录 GRE 数学词汇汇总

算数—整数

integer	整数
consecutive integer	连续的整数
positive whole number	正整数
negative whole number	负整数
even integer	偶数
odd integer	奇数
real number	实数
divisor	除数, 约数; 因子
multiple	倍数
remainder	余数
composite number	合数
quotient	商
prime number	质数, 素数
prime factor	质因子, 质因数
successive	连续的
spread	范围
consecutive	连续的
constant	常数, 恒定的

算数—分数

numerator	分子
denominator	分母
greatest common divisor/greatest	
common factor	最大公约数
least common multiple	最小公倍数
common multiple	公倍数
common factor	公因子
inverse	相反数
reciprocal	倒数
mixed number	带分数

reversible	可逆的, 可倒转的
nearest whole percent	最接近的百分数

算数—小数

decimal place	小数位
decimal point	小数点
infinite decimal	无穷小数
repeating decimal	循环小数
digit	数位
decimal system	十进制
units digit	个位数
tens digit	十位数
tenths unit	十分位
3-digit number	三位数
quartiles	四分位数
percentiles	百分位数
interquartile range	四分位差, 四分位距
negligible	可忽略不计的
closest approximation	最相近似的
calculate to three decimal places	结果保留 3 位小数
approximately	大约, 近似
estimation	估算, 近似

算数—实数

absolute value	绝对值
nonzero number	非零数
positive number	正数
negative number	负数
nonnegative	非负的
rational(number)	有理数
irrational(number)	无理数

算数—比例

common ratio	公比
direct proportion	正比
percent	百分比

account for
scatterplot
scale

占据(比例)
点阵图
比例; 刻度

算数—幂和根

cardinal
ordinal
exponent
base
radical sign/root sign
radicals
square root
cube root
product

基数
序数
指数
底数
根号
根式
平方根
立方根
乘积

算数—集合

subset
union
intersection
empty set
solution set
set of data/data set
sets
nonempty
mutually exclusive
juxtaposition
disjoint
elements
event
independent events
sufficient
the sum of A and B/the total of A
and B
the union of A and B

子集
合集, 并集
交集
空集
解集(满足一个方程或方程组的所有解的
集合叫作该方程或方程组的解集)
数据集
集合
非空的
互斥的
并列
不相交的
元素
事件
相互独立事件
充分的
A 与 B 的和
A 与 B 的并集

the intersection of A and B

A 与 B 的交集

Venn diagrams

韦恩图

算数—统计

average

平均数

mean

平均值; 平均数

maximum

最大值

minimum

最小值

median

中数, 中点, 中线, 中值

mode

众数

arithmetic mean

算术平均数

weighted average

加权平均值

weighted mean

加权平均数

range

极差

standard deviation

标准方差

to the nearest/round to

四舍五入

round

保留整数, 使成为整数; 四舍五入

value

值, 数值

probability

概率

distribution

(频数或频率)分布

probability distribution

概率分布

frequency distribution

频数分布

normal distribution

正态分布

standard normal distribution

标准正态分布

factorial notation

阶乘

arrangement

排列

combination

组合

circle graphs

饼图

boxplots

箱线图

bar graphs/histogram

柱状图; 直方图

at random

随机

random variables

随机变量

discrete random variable

离散随机变量

continuous random variable

连续随机变量

equally likely event
heads up
tails up
toss up

等可能事件
正面朝上，头朝上
背面朝上，数字朝上
掷硬币；(胜败)机会相等

算数—数学运算

add/plus
subtract/minus
multiply/times
divide
difference
sum
is equal to
total
divisible
division
divided evenly
dividend
the difference of A and B
the product of A and B
prime factorization
less than
greater than
no less than
no more than
no solution
interval
in equivalent to
increase by
increase to
decrease by
decrease to
identical
divisibility

加
减
乘
除
差
和
等于
总数
可被整除的
除；部分
被整除
被除数
A 与 B 的差
A 与 B 的乘积
质因数分解
小于
大于
大于等于
小于等于
无解
区间；间隔
与...相等
增加了
增加到
减少了
减少到
相等的
可约性，可除性

代数，方程，不等式

coefficient	系数
literal coefficient	字母系数
numerical coefficient	数字系数
term	项
constant term	常数项
quadratic	二次方程
equivalent equation	同解方程，等价方程
linear equation	线性方程
solution	解
inequality	不等式
expression	表达式
equation	方程式，等式
linear	一次的，线性的
factorization	因数分解
function	函数
variable/ variations	变量
domain	定义域
sequence	数列
sequences of numbers	数列
geometric progression	等比数列
arithmetic procession	等差数列
parentheses	括号
satisfy	使……成立
equivalent	相等的

几何—直线，垂线

a line segment	线段
midpoint	中点
endpoint	端点
right angle	直角
perpendicular	垂线
perpendicular lines	垂直线
perpendicular bisector	垂直平分线

parallel lines	平行线
bisect	平分
partition	分割, 分开
intercept	截距

几何—相交线和角

acute angle	锐角
obtuse angle	钝角
opposite angles	对角
vertical angle	对顶角
vertex angle	顶角
round angle	周角
straight angle	平角
included angle	夹角
alternate angle	内错角
interior angle	内角
central angle	圆心角
exterior angle	外角
supplementary angles	补角
complementary angles	余角
adjacent angle	邻角
a straight line	直线
angle bisector	角平分线
diagonal	对角线
intersect	相交
angle measurement in degrees	角度计算
altitude	高
equilateral triangle	等边三角形
hypotenuse	直角三角形的斜边
inscribed triangle	内接三角形
vertex	顶角, 顶点
isosceles triangle	等腰三角形
median of a triangle	三角形的中线
oblique	斜三角形

opposite	直角三角形中的对边
right triangle	直角三角形
scalene triangle	不等边三角形
similar triangles	相似三角形
leg	直角边
included side	夹边
Pythagorean theorem	勾股定理
congruent angles	全等角
congruent line segments	等长线段

几何—四边形和多边形

quadrilateral	四边形
pentagon	五边形
hexagon	六边形
heptagon	七边形
octagon	八边形
nonagon	九边形
decagon	十边形
polygon	多边形
multilateral	多边的
regular polygon	正多边形
parallelogram	平行四边形
square	正方形
rectangle	长方形, 矩形
rhombus	菱形
equilateral	等边的
trapezoid	梯形
congruent	全等的
symmetric	对称的
perimeter	周长
overlap	重叠
coordinate geometry	解析几何
corresponding side	对应边
area of a rectangle	长方形的面积

fold

对折

几何—圆

center of a circle

圆心

circle

圆形

concentric circles

同心圆

semicircle

半圆

circumference

圆周长

chord

弦

radius

半径

diameter

直径

tangent

正切

inscribe

内切, 内接

circumscribe

外切, 外接

point of tangency

切点

tangent line

切线

circumscribed

外接的

radian

弧度(弧长/半径)

arc

弧

segment of a circle

弧形

be parallel to

平行

be perpendicular to

垂直

be tangent to

与……相切

几何—立体几何

edge

边, 棱

length

长

width

宽

depth

深度

volume

体积

surface area

表面积

cube

立方体

rectangular solid

长方体

regular solid/regular polyhedron

正多面体

cylinder

圆柱体

faces	面
cross section	横截面
solid line	实线
dimension	维数
three-dimensional figures	三维图形
as illustrated	如图所示

几何—几何坐标

coordinate plane	坐标平面
coordinate system	坐标系
rectangular coordinate	直角坐标系
abscissa/x-coordinate	横坐标
ordinate	纵坐标
xy-planes	xy 平面坐标轴
number line	数轴
origin	原点
axis	轴
x-axis	X 轴
y-axis	Y 轴
intercept	截距
x-intercept	X 轴截距
quadrant	象限
four quadrants	四个象限
slope	斜率
a unique solution	唯一解
parabola	抛物线
linear functions	线性函数

公式和换算

feet	英尺
1 dozen = 12	1 打 = 12 个
1 foot = 12 inches	1 英尺 = 12 英寸
1 gallon = 4 quarts 1 加仑	1 加仑 = 4 夸脱
1 hour = 3,600 seconds	1 小时 = 3600 秒
1 mile = 5,280 feet	1 英里 = 5280 英尺

1 yard = 3 feet = 36 inches

1 码 = 3 英尺 = 36 英寸

 $0! = 1! = 1$

0 的阶乘为 1

句型

be fewer than

小于

be less than

小于

twice as many A as B

A 是 B 的两倍

The ratio of A to B is ...

A 比 B (A/B)

A multiplied by B

A 乘以 B

A divided by B

 A/B

A divided into B

 B/A

A is 20% less than B

 $(B-A)/B = 20\%$

A is 20% more than B

 $(A-B)/B = 20\%$

A is a divisor of B

A 是 B 的除数(约数)(B/A)

be direct(inverse) proportion at/to

成反比

A is subset of B

A 是 B 的子集

be more than twice as many X in

A 里面的 X 是 B 里面 X 的 2 倍以上

A as in B

与...成比例的

be proportional to

be drawn to scale

按比例绘制

实际应用

balance

余额

cost of production

产品成本

approximate cost

估算成本, 约计成本

down payment

预付定金, 首付款

installment

分期付款

discount rate

折扣率

charter

租赁, 包租

charge

收费

principal

本金

simple interest

单利

compound interest

复利

gross profit

毛利

retail price

零售价

sales revenue	销售额
sales taxes	营业税, 销售税
property tax	财产税
list price	标价
margin	利润; 付定金
mark up	涨价
purchases	销售数量
rebate	退还款, 折扣
pointer	指针
project	预测, 估计
corresponding value	对应值
mutual fund	共同基金
expected value	期望值, 预期值
intensity	强度
intercalary year/leap year	闰年
lifetime	寿命
reflection	镜射
simplification	简化
simplified	简化的
sketch	草图, 示意图
survey	调查
solid color	纯色
concentration	浓度
weight	加重量于……使变重
yields	产量
central tendency	集中趋势
tie	打平

其他

blot out	涂掉, 删掉
buck	一美元; 一澳元
dime	一角, 十分
clockwise	顺时针
constant rate	匀速的

cumulative	累积的, 附加的
defined	已定义的
categories	种类
in excess of	超过
in terms of	用……的话, 用……来表示
in turn	依次, 轮流
distinct point	不同点
nearest 0.1 percent	最接近 0.1%
inclusive	包括在内的
alongside	和……一起
preceding	在……前的, 先前的
simultaneously	同时
respectively	各自地, 分别地
per capita	按照人数分配的, 每人
wall	(容器的)壁
truckload	一卡车的容量
denote	表示