

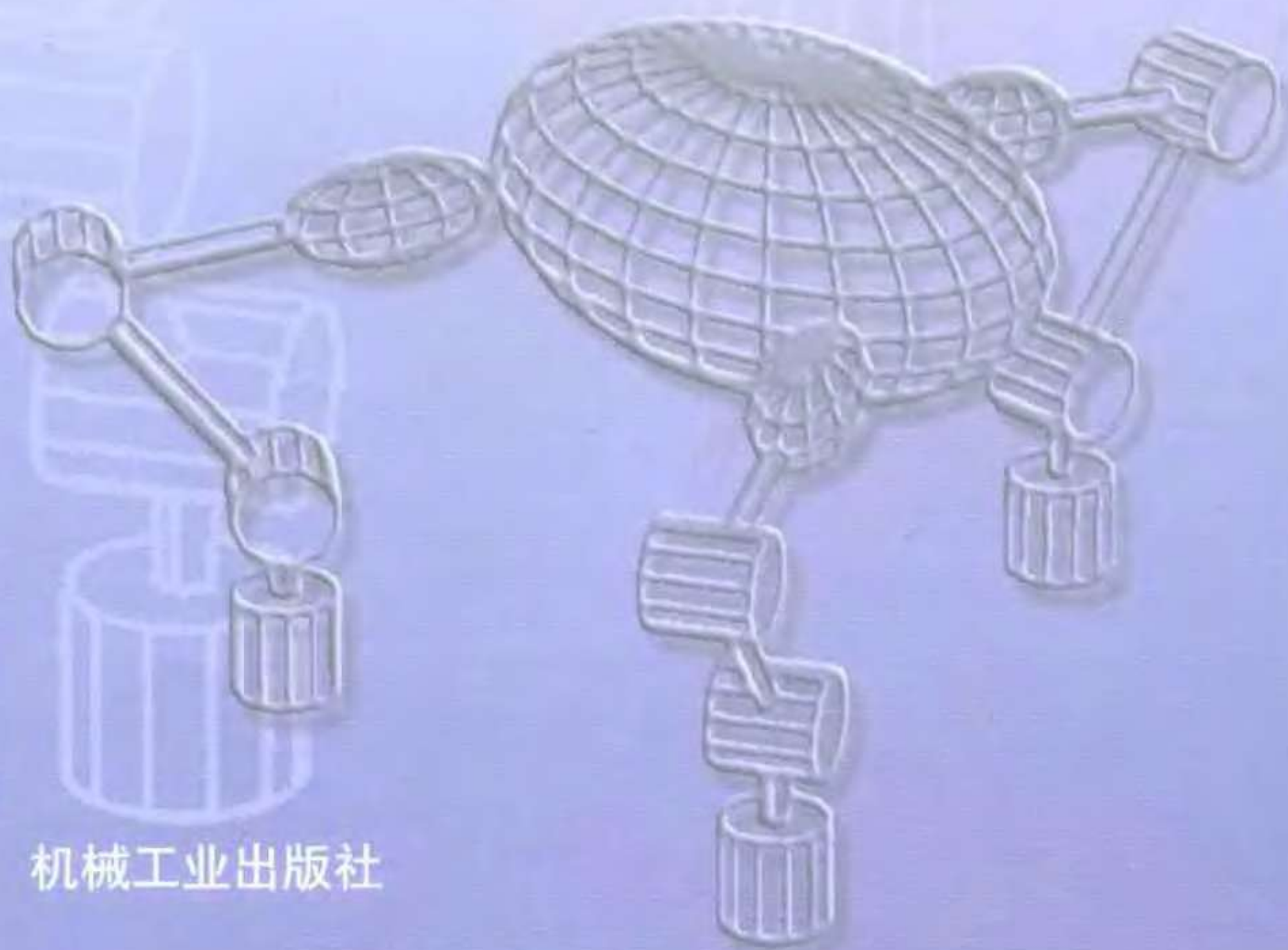
机器人操作的 数学导论

(美) 理查德·摩雷

(中) 李泽湘

著

(美) 夏恩卡·萨思特里



机械工业出版社



机器人操作的数学导论

(美) 理查德·摩雷
(中) 李泽湘 著
(美) 夏恩卡·萨思特里

徐卫良 钱瑞明 译



00429735



机械工业出版社

01-97-1070

本书在综合大量的技术文献资料基础上，结合作者从事的研究工作，从数学角度系统地论述了机器人操作的运动学、动力学、控制及运动规划。本书内容反映了近年来机器人领域的主要研究成果。

本书共九章，包括绪论、刚体运动、机器人运动学、机器人动力学及控制、多指手运动学、机器人手的动力学及控制、机器人系统的非完整约束、非完整运动规划和机器人操作的研究展望。第二章至第八章含有丰富的实例，并附有小结和大量的习题。

本书可作为有关专业研究生的教材，也可供从事机器人、自动控制等领域工作的科研和工程技术人员参考。

A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation/Richard M. Murray, Zexiang Li, S. Shankar Sastry

Original English language edition published 1994, by CRC Press, Inc., 2000 Corporate Blvd., N. W., Boca Raton, Florida 33431, USA. All rights reserved.

图书在版编目 (CIP) 数据

机器人操作的数学导论 / (美) 理查德·摩雷, (中) 李泽湘, (美) 夏恩卡·萨思特里著; 徐卫良, 钱瑞明译. —北京: 机械工业出版社, 1997

高等学校适用

ISBN 7-111-06058-X

I. 机… II. ①摩… ②李… ③萨… III. 机器人-操作-数学理论
IV. TP242

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (97) 第 28347 号

出版人: 马九荣 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑: 张一萍 版式设计: 霍永明 责任校对: 韩晶

封面设计: 姚毅 责任印制: 王国光

北京交通印务实业公司印刷·新华书店北京发行所发行

1998 年 6 月第 1 版第 1 次印刷

787mm×1092mm¹/₁₆·19.25 印张·462 千字

0 001—1 300 册

定价: 28.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

译 者 序

原著《机器人操作的数学导论》（《A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation》），由美国 CRC 出版社于 1994 年出版，是关于机器人操作理论的一本专著。该书从数学的角度、系统完整地论述了机器人操作的基本理论，使机器人学者可以从更高层次了解机器人操作原理和开拓机器人学研究的新领域。该书还特别介绍了著作者在多指机器人手与多机器人协调操作理论、非完整系统的运动规划与控制等方面的最新研究成果。该书出版后即被美国、日本及我国香港地区的许多大学用作博士和硕士研究生学习机器人理论的教材。

机器人学是一门新兴的、正在不断发展的技术科学，许多国家都将其作为高技术大力展开研究与应用。我国同样也不例外。机器人学与机器人技术的研究和应用已有 20 多年的历史，目前已达到了一个崭新的水平。高等学校也设置了机器人方面的课程，并针对不同专业的本科生和研究生培养需要编写出版了一些教材。译者经过多年的研究生教学与培养的实践，感到国内近期虽出版过一些有关机器人的专著。为此，我们翻译了《机器人操作的数学导论》这本书。

本书汇集了当今最新的有关机器人学研究的文献资料及著者从事这方面研究工作的成果，从数学角度系统地介绍了机器人操作的运动学、动力学、控制及运动规划，内容丰富，层次分明，系统性强，多数章节含有丰富的实例，并附有小结和大量的习题。第一章回顾了机器人技术的发展过程。第二章利用指数映射、旋量、运动螺旋、力螺旋等数学工具，从几何角度阐述了刚体的运动表示。第三章采用指数积公式论述了单机器人的操作运动学，包括运动学正逆解、雅可比矩阵等。第四章推导了单机器人的动力学及控制方程，并利用李亚普诺夫（Lyapunov）理论证明了有关控制规则的稳定性。第五章介绍了多指手的抓取运动学和抓取规划，讨论了稳定抓取的特性。第六章推导了多指机器人手和冗余度机器人系统的动力学与控制方程，给出了计算力矩控制规则和 PD 控制规则，并讨论了腱驱动机器人手的动力学问题。第七章讨论了机器人系统的非完整特性，列举了大量的非完整系统实例。第八章介绍了非完整运动规划的几种方法，研究了非完整系统轨迹规划问题。第九章论述了机器人学方面的一些新的研究和应用领域。本书内容反映了近年来机器人领域的主要研究成果。

本书在翻译过程中，得到中国工程院院士、北京航空航天大学张启先教授，国家自然科学基金会雷源忠教授和东南大学郑文纬教授的热情帮助，在此表示衷心的感谢。原著者之一，香港科技大学的李泽湘教授对本书译稿与清样作了校阅，提出了许多宝贵意见，对此深表谢意。

由于译者水平所限，译文中错误及不当之处在所难免，敬请读者批评指正。

译 者

1997 年 10 月于东南大学

前 言

在最近 20 年中，机器人技术有了巨大的发展。机器人学研究吸引了众多学者的兴趣，而且引起了公众极大的关注。随着机器人技术的逐步成熟，机器人从能完成一些简单的抓取、放置、喷漆和焊接操作，发展到能实现在印刷电路板上装插集成电路芯片和在汽车工业中装卸与传送零件这样复杂的操作。机器人的应用情况已成为衡量某些工厂自动化程度的标准，而且如本书所述，机器人在危险环境、微型外科手术和微型机电装置等领域的应用正成为机器人学研究的新领域。

随着近 20 年来机器人技术的发展，高等学校中有关机器人学课程的内容也相应得到了很大的发展。这些机器人学课程主要是面向计算机科学、机电工程和数学等专业的本科生或研究生，针对不同的授课对象在教学内容方面有所侧重。目前，已出版了很多这方面的优秀教材，内容包括机器人操作器的运动学、动力学、控制、传感和规划等。

不同专业背景的学生要全面了解机器人学方面的知识，需要一本详细介绍有关机器人操作器运动学、动力学和控制内容的教材。本书不仅介绍简单机器人的基本知识，而且讨论多指机器人手和多机器人的协调操作。本书是在给下列人员组成的混合班讲课时所用讲义的基础上编写而成，这些听课人员包括：不了解机构的电气工程师，不了解控制理论的计算机科学工作者，不了解开式运动链运动学和动力学的机械工程师以及那些有兴趣但没有时间去全面学习机器人学内容的数学工作者。

如果读者的数学基础知识比较扎实，将会有助于更好地理解本书内容。本书内容的选择由浅入深，包括简单机器人的运动学和动力学、多指机器人手对物体的抓取和操作以及非完整运动规划，既介绍了机器人学的基本概念，又反映了机器人学的最新研究成果。从 1990 年到 1993 年，本书内容曾在下列学校讲授过多次：加利福尼亚大学伯克利分校（University of California, Berkeley），纽约大学库兰特数学研究所（Courant Institute of Mathematical Sciences of New York University），加利福尼亚工学院（California Institute of Technology），香港科技大学（Hong Kong University of Science and Technology）。本书部分内容也曾作为下列学校的短期培训教材：罗马大学，印度孟加拉人工智能与机器人中心，台湾大学。

本书可作为高等学校本科高年级学生或一、二年级研究生使用的机器人学方面的高级课程教材。在给本科高年级学生讲课时，我们用 12 周的时间，讲授了第一章～第四章的内容，再加一些技术与规划方面的讨论课和一个实验。实验内容包括工业机器人的在线轨迹规划与控制、机器人离线编程仿真环境的使用。教学侧重于运动学内容，我们常跳过第四章机器人动力学方面的内容，而讲授第五章的多指手运动学。对于研究生，我们也用 10 周时间讲授第五章～第八章的内容，同时增加介绍一些操作或移动机器人方面的最新课题。

我们认为，对于本科生和对信号与系统有所了解的学生来说，在学习本教材之前，应先修线性代数方面的课程。如果学习过控制理论，那将是很帮助的，但并不是十分必要。对于能掌握第二章内容的学生来说，学习本书其它章节的内容是没有困难的，但数学基础还是非常重要的。

从第二章到第八章，我们都提供了大量的习题，以帮助学生理解所学的新知识和掌握每章内容。本书有意不采用数值计算型习题，但在教学过程中，我们却采用了数值计算型习题，具体原始数据来源于实验室的机器人或其他实时系统。教学内容应不断更新。

本书没有涉及有关机器人的运动规划和运动避障的内容，所以在课堂教学时，为使内容系统、完整，我们总是补充一些机器人运动规划方面的教学内容。对于研究生课，推荐一本由 Latombe 编写的关于运动规划方面的新书，可作为本书的教学参考书。本书未加讨论的另一个问题是机器人的传感技术。为了合理处理这些内容，有关学校是将计算机视觉、接触传感和其他有关内容，如信号处理，单独设课。

本书内容的选择基于以下思路：面对机器人方面大量新技术发明和新进展，这些内容在今后的几年内仍然是重要的，第九章简单地介绍了机器人学未来的发展方向。在阅读完本书后，希望读者与我们一起能促进机器人领域的技术和社会前景以及基本理论的发展。

1993 年 8 月于伯克利

理查德·摩雷

李泽湘

夏恩卡·萨思特里

致 谢

本书有关内容的研究,得到很多同仁大力的支持,在此表示衷心的感谢。本书第二章和第三章的大量内容参考了 Bradley Paden (University of California, Santa Barbara) 的博士论文;参与第五章和第六章多指机器人手研究工作的有: Ping Hsu (San Jose State University); Arlene Cole (AT&T Bell Laboratories); John Hauser (University of Colorado, Boulder); Curtis Deno (Intermedics, Inc. in Houston); Kristofer Pister (University of California, Los Angeles)。对于非完整运动规划方面的内容,曾得到下列同仁的合作: Jean-Paul Laumond (LAAS in Toulouse, France); Paul Jacobs (Qualcomm, Inc. in San Diego); Greg Walsh, Dawn Tilbury, Linda Bushnell (University of California, Berkeley); Richard Montgomery (University of California, Santa Cruz); Leonid Gurvits (Siemens Research, Princeton); Chris Fernandez (New York University)。

本书第二章和第三章建立机器人运动学关系的核心方法是采用由 Roger Brockett (Harvard University) 建立的指数积公式。对于 Roger Brockett 和他的学生在运动学、滚动接触和非完整控制方面给予的热情帮助和鼓励,表示衷心的感谢。Roger Brockett 所建立的有关非线性控制理论贯穿于本书的整个内容。

我们永远记住于 1983 年在伯克利举行的研讨班, P.S. Krishnaprasad (University Maryland) 使我们坚信了指数积公式的优点,并给我们提出了许多有价值的建议; Jerry Marsden (Berkeley) 和 Tony Bloch (Ohio State University) 在经典力学、现代数学和控制理论方面提供了很大的帮助。于 1987 年在伯克利举办的另一次研讨班上, Yoshi Nakamura (University of Tokyo) 激励了我们对多指机器人手和多机器人协调操作的研究。在运动学、最优控制和冗余度机构方面,通过与下列学者的交流得到了许多有益的启发: John Baillieul (Boston University); Jeff Kerr (Zebra Robotics); Mark Cutkosky (Stanford University); Robert Howe (Harvard University); Dan Koditschek (University of Michigan); Mark Spong (University of Illinois at Urbana-Champaign); Joel Burdick 和 Elon Rimon (California Institute of Technology)。Hector Sussmann (Rutgers University) 和 Gerardo Lafferiere (Portland State University) 在非完整运动规划方面也给予了非常有益的帮助,在此一并表示感谢。

本书的完成得到了同事们的支持与帮助,他们是伯克利分校 (Berkeley) 的 John Canny, Charles Desoer, David Dornfeld, Ronald Fearing, Roberto Horowitz, Jitendra Malik 和 “Tomi” Tomizuka; 纽约大学的 Jaiwei Hong, Bud Mishra, Jack Schwartz, James Demmel 和 Paul Wright; Catech 的 Joel Burdick 和 Pietro Perona; 香港科技大学的 Peter Cheung, Ruey-Wen Lin, Matthew Yuen; 西澳大利亚大学的 Robyn Owens; Georges Giralt (LAAS in Toulouse, France); Dorothee Normand Cyrot (LSS in Paris, France); Alberto Isidori, Marica Di Denedetto, Alessandro De Luca 和 Nando Nicolo (Universita di Roma); Sanjoy Mitter 和 Anita Flynn (MIT); Antonio Bicchi (Universita di Pisa); M. Vidyasagar (the Center for Artificial Intelligence and Robotics in Bangalore, India); 傅立成 (台湾大学); T. J. Tarn (Washington Uni-

versity)。本书图片由 Mark Spong, Kevin Dowling 和 Dalila Argez 提供, 在此也表示感谢。

我们的研究工作得到了国家自然科学基金的大力资助 (资助编号: DWC84-51129, IRI90-14490, IRI90-03986), 同时还得到国防研究基金 (DAAL88-K-0372), IBM, AT&T 基金, GE 基金, HKUST 基金 (DAG 92/93 EG23) 的资助。我们的母校加利福尼亚大学伯克利分校、加州理工学院和香港科技大学为我们的研究提供了实验设备, 在此对各校给予的帮助深表感谢。我们还要特别感谢伯克利分校工程系系主任 Karl Pister 给予的支持。

本书初稿曾在多所学校讲授过, 教学中用过本书初稿的除我们三人之外还有: James Clark (Harvard); John Canny, Curtis Deno 和 Matthew berkemeier (Berkeley); Joel Burdick (Caltech)。他们的反馈意见对我们修改书稿是非常有价值的。本书承蒙下列专家仔细审阅: Greg Chirikjian (Johns Hopkins), Michael McCarthy 和 Frank Park (University of California, Irvine)。

此外, 在本书的编写过程中还得到了许多学生的帮助, 他们是: L. Bushnell, N. Getz, J. P. Tennant, D. Tibury, G. Walsh, J. Wndlandt (Berkley); R. Behnken, S. Kelly, A. Lewis, S. Sur 和 M. van Nieuwstadt (Caltech); A. Lee 和 J. Au (香港科技大学)。Sudipto Sur (Caltech) 帮助开发了旋量计算的数学软件包。我们要感谢给予本书的编写以启发的所有人。

最后, 对于家人给予我们的支持和鼓励表示衷心的感谢。

目 录

译者序	
前言	
致谢	
第一章 绪论	1
1 历史回顾	1
2 多指手和灵巧操作	4
3 本书概述	7
3.1 单机器人操作	8
3.2 多指机器人手的协调操作	8
3.3 机器人系统的非完整约束	9
4 文献说明	10
第二章 刚体运动	11
1 刚体变换	11
2 三维空间中的旋转运动	13
2.1 旋转矩阵的性质	13
2.2 旋转的指数坐标	16
2.3 其他表示法	18
3 三维空间中的刚体运动	21
3.1 齐次坐标表示法	22
3.2 刚体运动的指数坐标和运动旋量	24
3.3 旋量：运动旋量的几何表示	28
4 刚体速度	31
4.1 转动速度	31
4.2 刚体速度	33
4.3 旋量运动的速度	36
4.4 坐标变换	36
5 力旋量和对偶旋量	38
5.1 力旋量	38
5.2 力旋量的旋量坐标	40
5.3 对偶旋量	42
6 小结	44
7 文献说明	46
8 习题	46
第三章 机器人运动学	51
1 概述	51
2 运动学正解	52
2.1 问题的描述	52
2.2 指数积公式	53
2.3 机器人的运动旋量参数表示	58
2.4 机器人的工作空间	61
3 运动学逆解	63
3.1 一个平面例子	63
3.2 Paden-Kahan 子问题	64
3.3 利用子问题求解运动学逆问题	67
3.4 运动学逆解问题的一般解法	70
4 机器人的雅可比矩阵	76
4.1 末端执行器的速度	76
4.2 末端执行器的作用力	80
4.3 奇异性	82
4.4 可操作性	84
5 冗余度机器人和并联机器人	85
5.1 冗余度机器人	85
5.2 并联机器人	87
5.3 四连杆机构	89
5.4 Stewart 平台	92
6 小结	95
7 文献说明	96
8 习题	96
第四章 机器人动力学及控制	102
1 概述	102
2 拉格朗日方程	103
2.1 基本公式	103
2.2 刚体的惯性	105
2.3 实例：两杆平面机器人的动力学	107
2.4 刚体的牛顿-欧拉方程	108
3 开链机器人动力学	110
3.1 开链机器人的拉格朗日函数	110
3.2 开链机器人的运动方程	111
3.3 机器人动力学和指数积公式	115
4 李亚普诺夫 (Lyapunov) 稳定性理论	118
4.1 基本定义	118
4.2 李亚普诺夫直接法	120
4.3 李亚普诺夫间接法	121
4.4 实例	122

4.5 李亚普诺夫不变原理	124	2.2 内力	185
5 位置控制与轨迹跟踪	125	2.3 其他机器人系统	186
5.1 问题描述	125	3 冗余度机器人系统和不可操作	
5.2 计算力矩	126	机器人系统	189
5.3 PD 控制	127	3.1 冗余度机器人的动力学	189
5.4 工作空间控制	129	3.2 不可操作抓取	192
6 有约束机器人的控制	132	3.3 实例:两个 SCARA 手指的抓取	193
6.1 约束系统的动力学	132	4 腱驱动的运动学和静力学	194
6.2 有约束机器人的控制	133	4.1 无弹性腱	194
6.3 实例:沿滑槽运动的平面机器人	134	4.2 弹性腱	196
7 小结	135	4.3 腱驱动手指的分析与控制	198
8 文献说明	136	5 机器人手的控制	199
9 习题	137	5.1 扩展的控制规则	199
第五章 多指手运动学	139	5.2 多级控制结构	200
1 抓取概述	139	6 小结	205
2 抓取静力学	140	7 文献说明	206
2.1 接触模型	140	8 习题	207
2.2 抓取映射	144	第七章 机器人系统的非完整约束	209
3 力封闭	146	1 概述	209
3.1 有关定义	146	2 可控性和 Frobenius 定理	211
3.2 构成力封闭的条件	147	2.1 矢量场和矢量流	212
4 抓取规划	151	2.2 李氏括号和 Frobenius 定理	212
4.1 所需接触数目的范围	151	2.3 非线性可控性	216
4.2 构成力封闭抓取	152	3 非完整系统实例	219
5 抓取约束	154	4 非完整系统的结构	223
5.1 手指运动学	154	4.1 非完整分布的分类	224
5.2 多指抓取的性质	156	4.2 非完整系统实例(续)	225
5.3 实例:两个 SCARA 手指抓取盒子	158	4.3 Philip Hall 基	227
6 滚动接触运动学	161	5 小结	228
6.1 曲面模型	161	6 文献说明	229
6.2 接触运动学	165	7 习题	229
6.3 滚动抓取运动学	169	第八章 非完整运动规划	233
7 小结	170	1 概述	233
8 文献说明	171	2 典型控制系统的正弦控制	234
9 习题	172	2.1 一阶可控系统:Brockett 系统	235
第六章 机器人手的动力学及控制	176	2.2 二阶可控系统	237
1 有约束的拉格朗日方程	176	2.3 高阶系统:链式系统	238
1.1 Pfaffian 约束	176	3 一般控制方法	240
1.2 拉格朗日乘子	178	3.1 傅里叶技术	240
1.3 拉格朗日-达朗伯方程	179	3.2 链式转换	243
1.4 非完整约束的性质	182	3.3 非完整系统的最优控制	244
2 机器人手的动力学	183	3.4 分段定常输入控制	247
2.1 公式推导及有关性质	183	4 动态手指重定位	251

4.1 问题的描述.....	251	1 用于危险环境的机器人.....	260
4.2 用正弦输入进行控制.....	252	2 用于医疗的多指手.....	261
4.3 几何状态算法.....	253	3 小型机器人——微机器人学.....	262
5 小结.....	255	附录 A 李群与机器人运动学	264
6 文献说明.....	256	附录 B 旋量计算软件包	285
7 习题.....	256	索引	288
第九章 机器人操作的研究展望	260	参考文献	292

第一章 绪 论

近 20 年来,有关机器人的概念及其应用已经从作为科幻电影的素材发展到在工业领域广泛应用的计算机控制的机电装置。在日常工作中可以见到机器人应用于如下领域:在汽车组装线上对车身进行焊接和喷漆;将集成电路元件装插在印刷电路板上;在核辐射、水下、地下等环境进行检查和维修;甚至用于农业生产中摘桔子、收葡萄。虽然这些机器人大都不是拟人的,但是人们对于拟人机器的追求并没有减少,人们甚至幻想把机器人发展成人类自身的复制品。虽然在未来几年里,还不能看到这类机器人,但把具有末端执行器的简单机器人引入到广阔的应用领域,人类已取得了很大进步。另外应该注意到,机器人学研究步伐的急切以及对机器人功能的期望,很大程度上取决于对人类自身生物运动控制系统之惊人能力的了解。

1 历史回顾

机器人一词是 1921 年由 Czech playwright Karel Capek 在他的讽刺剧“鲁世慕的万能机器人”中首先提出的。在剧中,他把机器人描绘成与人类相似但能不知疲倦地工作的机器。剧中,机器人最终违反他们的创造者而消灭了人类。由该剧派生出大量的科幻文学和电影,从而形成了对机器人的认识:像人,富有知识,甚至还有个性。因此,与娱乐界所创造的机器人相比,当今的机器人显得很原始也就不足为奇了。为使读者对现代机器人的发展有个了解,本书借助 Fu, Gonzalez 和 Lee^[35]以及 Spong 和 Vidyasagay^[11]的描述来说明该领域的发展简史。在从 50 年代到 80 年代的发展过程中,下面粗略地以 10 年为一个阶段加以回顾。

形成机器人今天这种局面的早期工作,开始于第二次世界大战之后对遥控机械操作手的研究,这种机械操作手由 Argonne & Oak Ridge 国家实验室开发,用于处理放射性物质。这些早期的机械装置包括主操作手和从操作手,经使用者对主操作手的运动示教,通过从操作手加以运动再现。从操作手通过一系列机械连杆与主操作手相连。在由通用电气公司和通用机器公司制造的“远程操作手”teleoperators 上,这些连杆最终被电动或液力偶合器所代替。1949 年,为使从操作手不至于压碎玻璃器皿之类的物体,在远程操作手上又加入了力反馈。

在远程操作手发展的同时,适用于小体积、高质量航空部件精密铣削加工的数控(CNC)机床也发展起来。George Devol 在 1954 年用 CNC 机床控制器的可编程技术取代远程操作手的主操作手,发明了第一台机器人,他称其为“可编程关节式输送装置”。哥伦比亚大学的学生 Joseph Engelberger 买下了上述专利权,并于 1956 年在康涅狄格州成立了 Unimation 公司。该公司于 1961 年在通用电机制造厂生产出它的第一台机器人。该机器人的主要革新之处在于可编程性,它能以相对低的花费,通过重新编程及更换刀具使它能完成多种多样的任务。Unimation 机器人手臂的机械结构与传统设计不同,它采用开式运动链,也就是多自由度的悬臂梁。这就使其具有比自身所占据空间更大的工作空间,但同时也给设计带来不少问题,因为悬臂梁末端的精确控制以及刚度的调节很困难,而且运动链末端会将运动

链根部的误差放大。为解决此问题, 关节驱动器采用功率大、精度高的液压驱动器。

新近开发的机器人通过传感反馈使其灵活性明显提高。1962年 Ernst 制造出具有力感觉的机器人, 它能堆积块料。据了解, 该系统最先涉及机器人与非结构化环境的相互作用, 它导致麻省理工学院 (MIT) MAC (Man And Computer) 工程的创立。Tomovic & Boni 开发了一种机器人用压力传感器, 借助于压力传感器, 机器人能挤压被夹物体, 并研究了两种不同抓取方式中的一种。几乎在同一时期, McCarthy 和他的同事于 1963 年开发出二元机器人视觉系统, 这种系统能对周围的障碍物作出反应。该时期还产生了许多其他类型的机器人运动学模型, 如 Stanford 操作手 (图 1.1)、Boston 臂、AMF 臂以及 Ed-

inburgh 臂。这个阶段的另一种新颖机器人是行走机器人, 它由通用电气公司于 1979 年为军队而设计。能够声控和堆积分散物体的机器人在 Stanford 和其他地方也发展起来。1968 年, 日本川崎获得了 Unimation 的许可证, 从而机器人在日本出现。

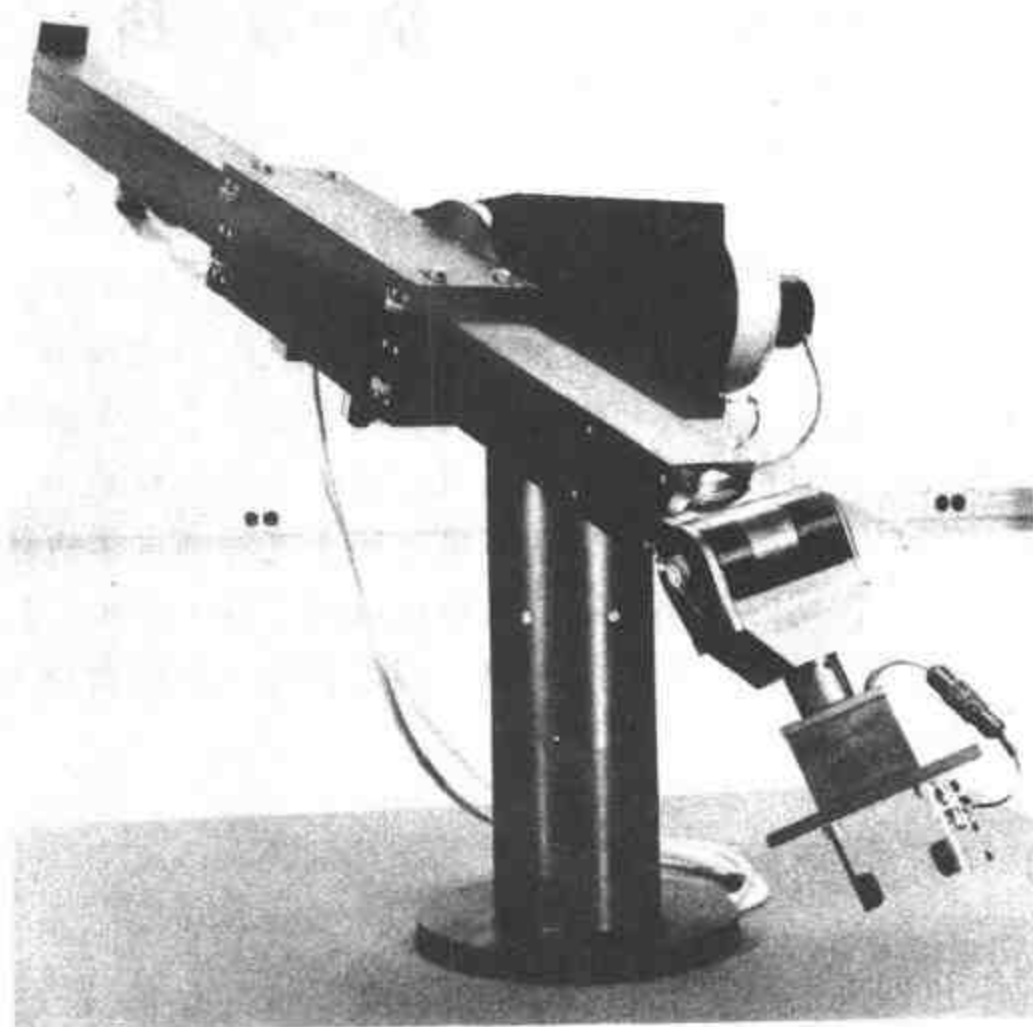


图 1.1 Stanford 操作手



图 1.2 Cincinnati Milacron T³ (未来工具) 机器人

1973 年, Stanford 大学研究出第一种用于机器人运动控制的编程语言——WAVE, 这就使得用高级命令驱动机器人成为可能。与此同时, 1974 年, 机床制造商 Cincinnati Milacron 有限公司生产出它的第一台计算机控制的机器人, 称为未来工具 (T^3) (图 1.2), 它能提起 450N 的负荷, 并能在装配线上跟踪运动的工件。70 年代后期, Paul & Bolles 成功地用 Stanford 操作手装配水泵, Will & Grossman 利用具有触觉和力传感器的机器人装配了由 20 多个零件组成的打字机, Draper 实验室的研究人员在装配作业中使用了一种远程中心随动装置 (RCC)。

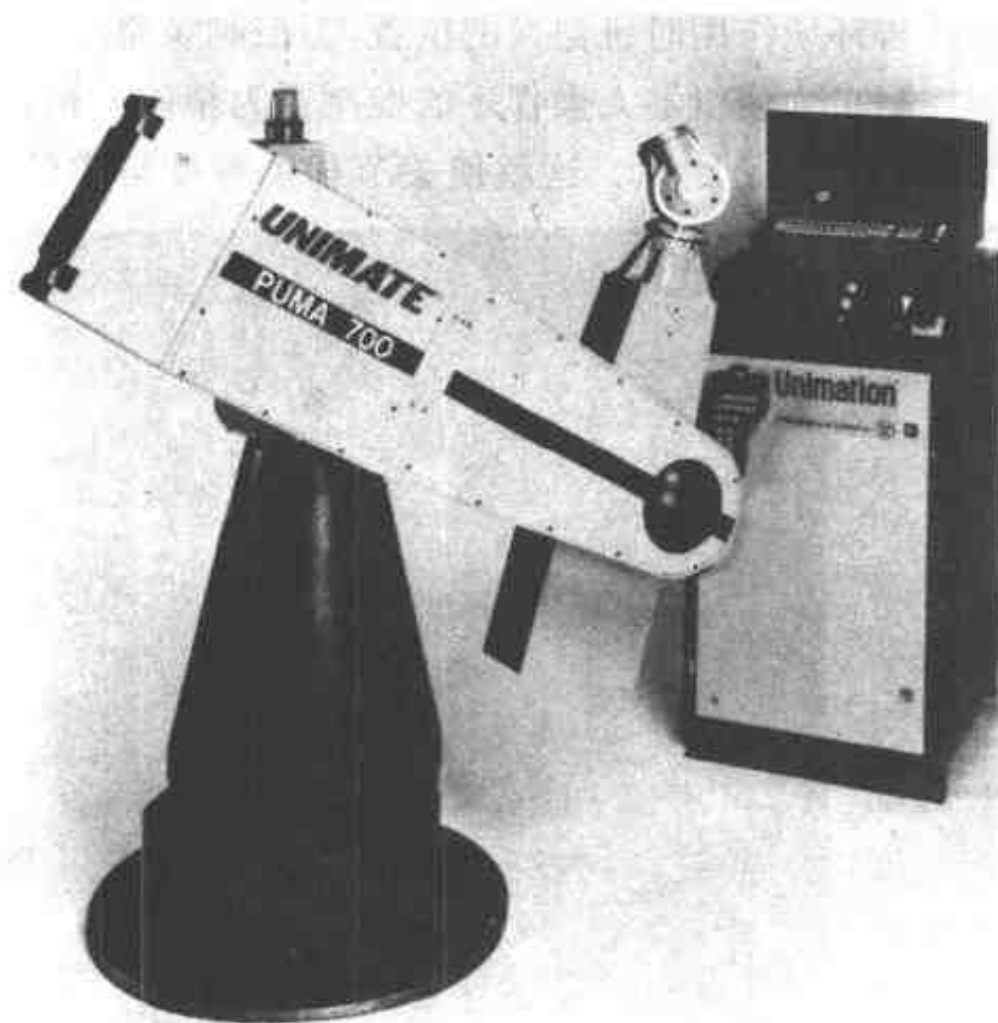


图 1.3 Unimation PUMA (装配用可编程万能机器人)

1978 年, Unimation 公司在通用电机研究成果的基础上, 开发出用于装配的可编程万能机器——PUMA 机器人 (图 1.3)。70 年代中期, 在喷气推进实验室, Bejczy 开始为太空操作手编写远程操作程序。1979 年, SCARA 机器人先后在日本和美国问世。

随着工业机器人应用的普及和推广, 出现了各种不同传动方式的机器人。对于轻载作业, 出于相对廉价和洁净的原因, 常采用电动机驱动的机器人。由于电动机只有在高速时才能获得最大功率, 因此使用时需对电动机进行减速。但是, 齿轮减速带来摩擦、间隙和成本高等问题。为此, 有必要寻找一种无需对电动机进行减速、能直接驱动机器人关节的方法。针对这种需要, 于 1981 年 Asada 在 Carnegie Mellon 开发出这种直接驱动机器人 (图 1.5)。

进入 20 世纪 80 年代后, 人们多方努力以求提高工业机器人在精细作业任务中的性能, 积极主动的方法是用反

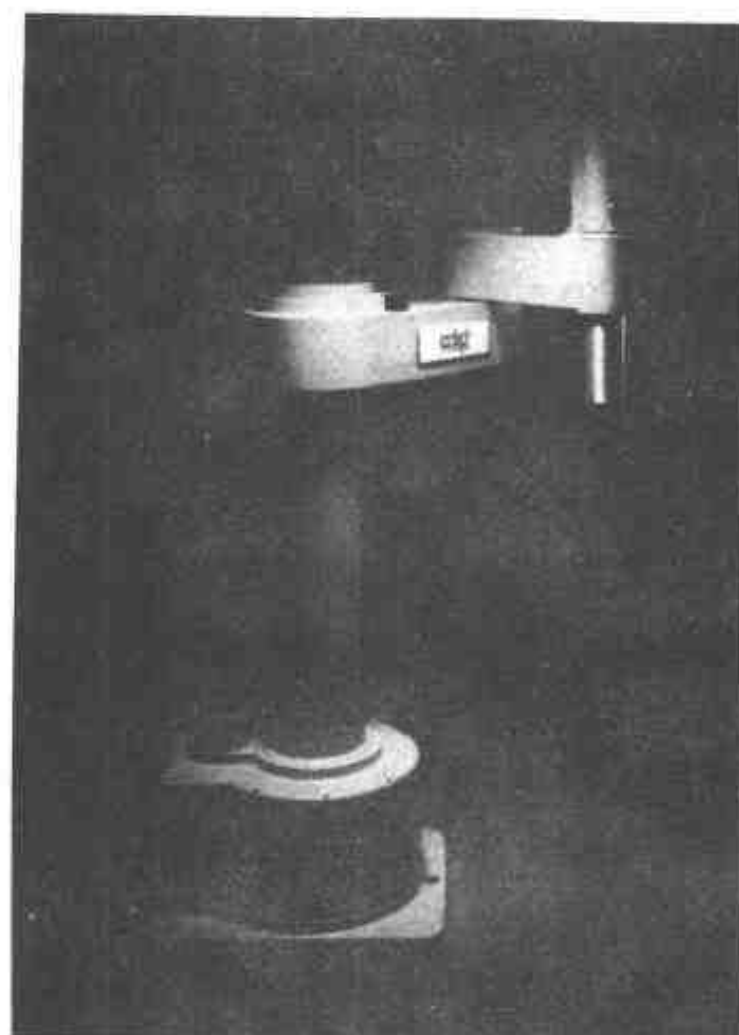


图 1.4 AdeptOne 机器人

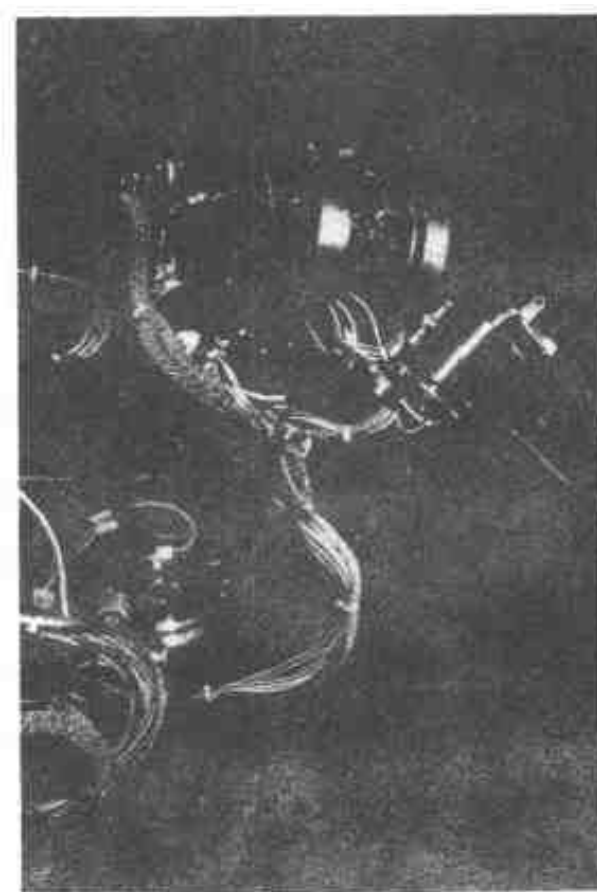


图 1.5 CMU 直接驱动臂 I 号

馈控制来提高机器人的定位精度和自适应性, 消极被动的方法是对机器人手臂机械结构进行重新设计。可以这样认为, 就开发新型机器人的需求而言, 80 年代不是一个伟大革新的时代, 期间研究的主体工作主要是掌握机器人控制算法、轨迹规划以及传感器的综合运用。所建立的第一代主动控制算法主要是基于比较有效的递推拉格朗日方程和关于机器人动力学方程中重力、哥氏力的算法。与此同步的研究工作是利用计算力矩的方法通过状态反馈将多关节机器人动力学作以比较准确的线性化。从计算的需要来看, 这种方法具有能给出操作手瞬态精确边界条件的优点, 而且还能精确地消去非线性项, 这在近似或自适应的实际操作中或是由近似方法, 或是由自适应方法来实现的。与环境作用时机器人的位置/力控制策略方面, 也研究出一些其他方法, 如混合控制或柔顺控制。为使机器人操作手的控制更为精确, 机器人连杆采用轻质材料, 其关节用谐波传动装置, 而不是轮系, 这就使关节和手臂变得柔性。由此关于柔性杆、柔性关节机器人控制算法的研究就显得很有必要。

90 年代机器人的发展趋势是使其能适应不同的装配任务。其中的一种称为“机器人世界”, 由 Automatix 制造, 它具有如下特点; 在 Sawyer 电动机的定子上安装空气轴承, 由空气轴承支撑组合式四自由度的杆系, 通过在杆系末端安装不同的末端执行器, 即能用于不同的装配任务。对于危险环境的作业, 移动机器人(图 1.6)的发展可算是迈出了一大步, 它能用于卫星探测, 危险的废料处理以及农业生产中。除了可重构形机器人或适用于危险环境的机器人研究项目外, 当今机器人学研究主要是在微小型传感器和作动器方面的一些大型技术的进步, 以及计算与控制技术的发展。本书将在第九章探讨机器人学的这些前沿研究。

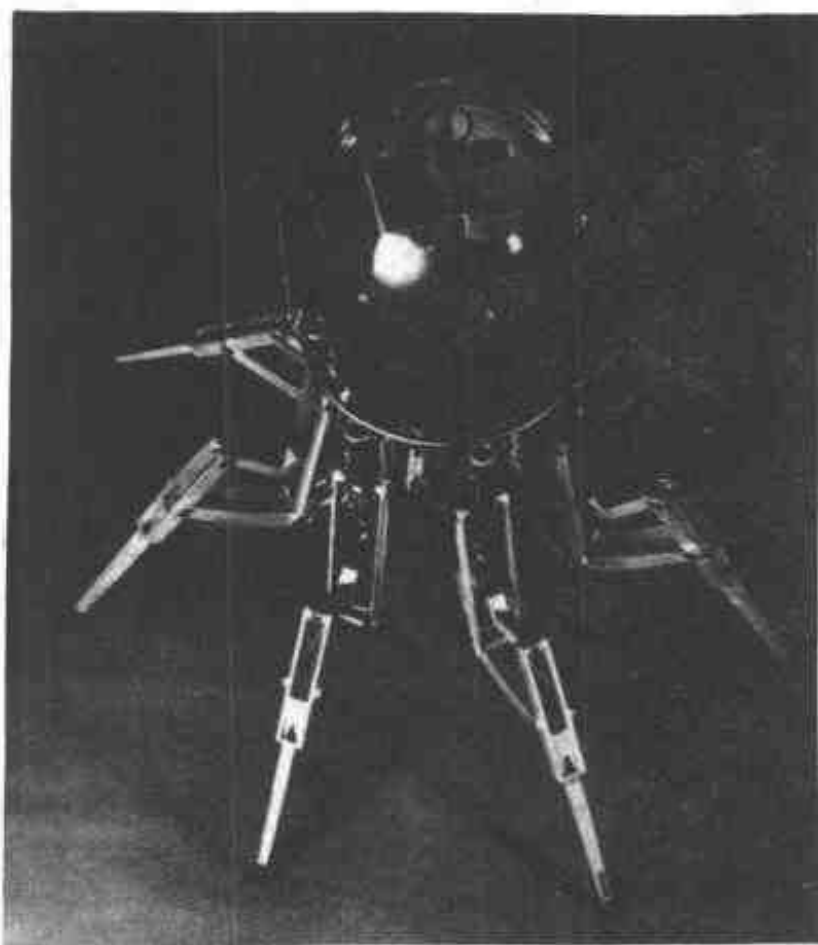


图 1.6 Odex I 号六足移动机器人

2 多指手和灵巧操作

当今实际应用中的机器人大多数是由六个转动或移动关节组成, 它们用简单的末端执行器夹持工件。其应用范围从抓取操作, 移动相机或检修设备, 到可完成含有配合件的复杂装配任务。这不是早期想象中科幻小说中的故事, 而是在许多领域已发挥作用的实实在在的事实。它们被用于焊接、喷漆、搬运物体、组装印制电路板以及在危险环境中的检修。

出于拟人化的想象, 用术语手或末端执行器来描述机器人与环境之间的相互接触关系。大多数的手是简单的, 如夹持器(两爪或三爪)、钳子、夹子或特定作业时的自适应柔顺装置。而大多数末端执行器是针对特定任务、特定被夹零件而设计的。例如, 吸杯可用来吸附玻璃制品, 但不能用于吸附金属件; 而气动爪可用于夹持金属物体, 但不能夹持易碎的塑料制品。进一步讲, 实际应用过程中通常遇到的问题是, 仅安装这些简单手的六自由度机器人

是很笨拙的，主要体现在如下几个方面。

1) 缺少灵活性。简单的夹持器夹持工件很可靠，但不能对被夹工件进行操作。

2) 夹持方式有限。对于不同的工作任务，需要频繁地更换末端执行器。

3) 即使末端执行器仅需要较小的运动量，也要通过机器人臂部较大的运动量来实现。因为机器人臂部上离末端执行器越远的电动机其功率越大，所以运动最早的电动机就会显得缓慢，并且效率不高。

4) 缺少精确的力控制。这就使得装配作业只能局限于一些最基本的任务。

多指手有助于解决以上问题，它使机器人更加灵活，也更通用。多指手由于具有自适应性，能实现多种不同的夹持，而无需更换末端执行器。多自由度手使用了大量的轻质驱动装置，从而有利于夹住物体实现快速、精确和高效的运动。高带宽精确运动的力控制技术也因此发展起来。实际上，多指手是真正意义上的拟人化并能实现灵活操作的手：我们人类先通过臂部的运动使手部在给定空间内定位，然后再用腕部和手指以一种比较复杂的方式来操作对象，只要改变抓取方式，即可通过手指实现捏、抱或固定物体。哺乳类动物的智能在于他们的运动表皮组织有助于手的控制。神经生理学家画出了这些运动表皮的组织图（图 1.7）。对人类而言，运动表皮的大部分（约 30%~40%）是用手的控制的。相比而言，多数猴子是 20%~30%，而狗和猫则低于 10%。

多指手最先用作假肢。Childress^[18]提及了在 1509 年为武士 Berlichingen 制作的一种装置，这位武士年轻时在战争中失去了一只手。这种弹簧驱动装置在战斗中是很有用的，但在日常生活中却很不方便。在 Berlichingen 手之后，从 1509 年至今，已设计和制作了许多其他的假手，其中几种至今仍然可用。它们中有些是被动型的（使用弹簧），有些则是主动型的（通过臂部的弯曲或耸肩进行控制）；有的可以随意锁合，有的则不能随意锁合。Childress 把手划分为以下四种类型：

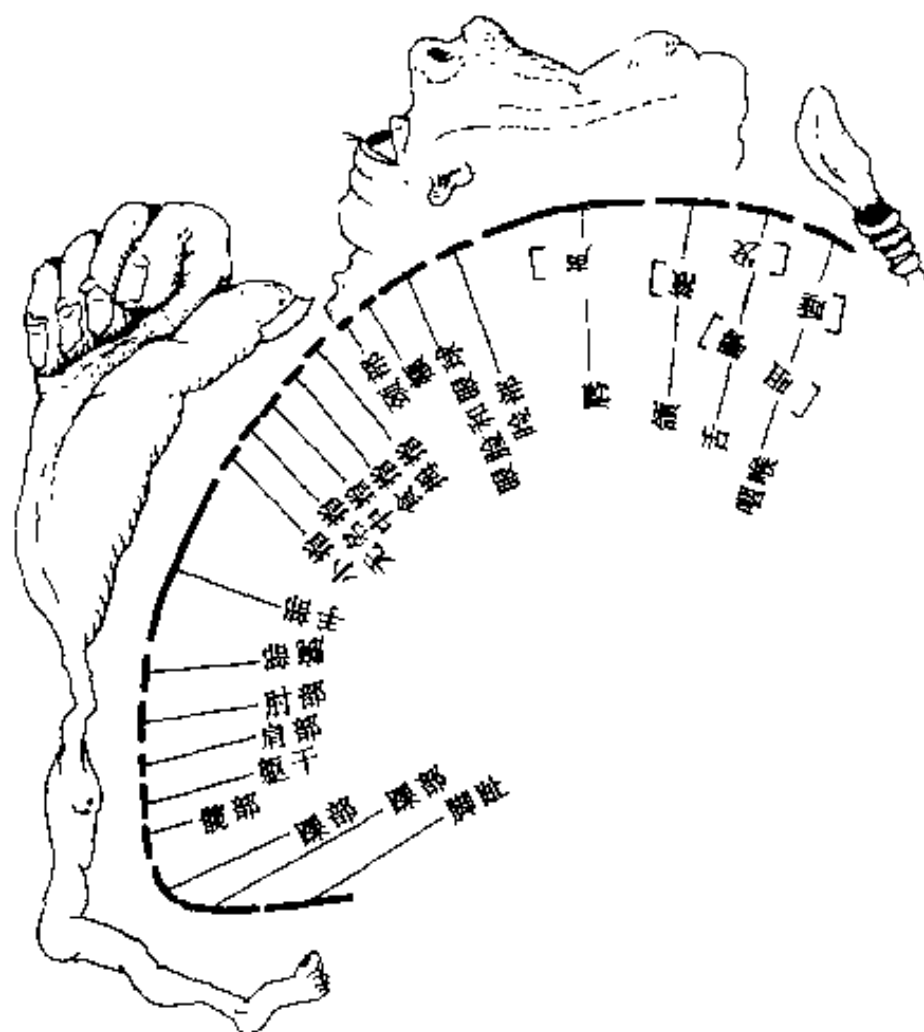


图 1.7 运动表皮的组织图

1) 装饰型。这类手没有真正意义上的运动，不能被驱动，但它们可用来推动物体或与其他手的配合使用。

2) 被动型。这类手需要人手（非假手）的帮助来调整其抓取动作，早期的手即属此类，如 Berlichingen 手。

3) 身体驱动型。这类手通过身体的运动进行驱动。两个最常见的动作是：通过臂部向前运动来拉电缆（臂部弯曲控制），或肩部的圆弧运动来拉电缆（耸肩控制）。事实上，经常可以见到被截肢者耸肩或上臂关节这类运动。

4) 外部动力型。这类手从储能装置如电池或压缩空气中获得能量。在假肢应用中常取代身体驱动型手。

动力型手从 1920 年开始流行。但其广泛应用却是从 20 世纪 30 年代开始的。由 Tomovic 和 Boni 研制的 Belgrade 手最初是为南斯拉夫的一位因伤寒而失去手臂的人设计的。其他手是用作四肢残缺畸形儿的肢体。Utah 大学开发了一系列肌电控制假肢, 主要用于抓取物体。这些装置在机构方面是相当先进的, 其灵巧性来源于使用者的视觉导向反馈训练, 而不是靠装置内部的反馈。

在机器人发展史中, 适应于危险或难于接近环境(如核辐射、水下、太空、探矿, 甚至外科医疗)的远程操作手为灵巧多指手的发展奠定了基础, 这些装置使操作者能在远处用自己的手来完成简单的操作, 并能将命令传给远程多指操作手。在外科医疗中, 远程操作手是一个安放在病人体内的手术装置。

在设计某种能介于远程操作手、假肢和灵巧末端执行器之间的多指手方面已做了许多尝试。这些手真正代表了从拟人(仿人手)到智能化末端执行器(赋予机器人更大的灵活性)之间的折中观点。有关多指手的研究例子可在 Skinner^[107]、Okada^[85]和 Hanafusa & Asada^[39]的工作中见到。Okada 手是一个由绳索驱动的三指手, 它能完成将螺栓拧进螺母之类的任务。Hanafusa & Asada 手有三个弹性手指, 由一个电动机驱动, 带有三个爪子, 从而可稳定抓取一些形状特殊的物体。

近期研制出来的多指手有: Salisbury 手(也称 Stanford/JPL 手)^[70]、Utah/MIT 手^[45]、NYU 手^[24]、研究型手 Stgx^[77]。

Salisbury 手(图 1.9)有三个手指, 每个手指有三个自由度, 所有关节都采用绳索驱动, 其中的一个手指(拇指)与其他两个手指相对配置。Utah/MIT 手(图 1.8)有四个手指(三个小指和一个拇指), 手指配置类似于人手, 其中每个手指有四个自由度, 采用绳索驱动。以上两种手在驱动方面的差异在于如何驱动绳索(腱), 前者使用电动机, 而后者使用气缸。NYU 手是一种非拟人型的平面手, 由步

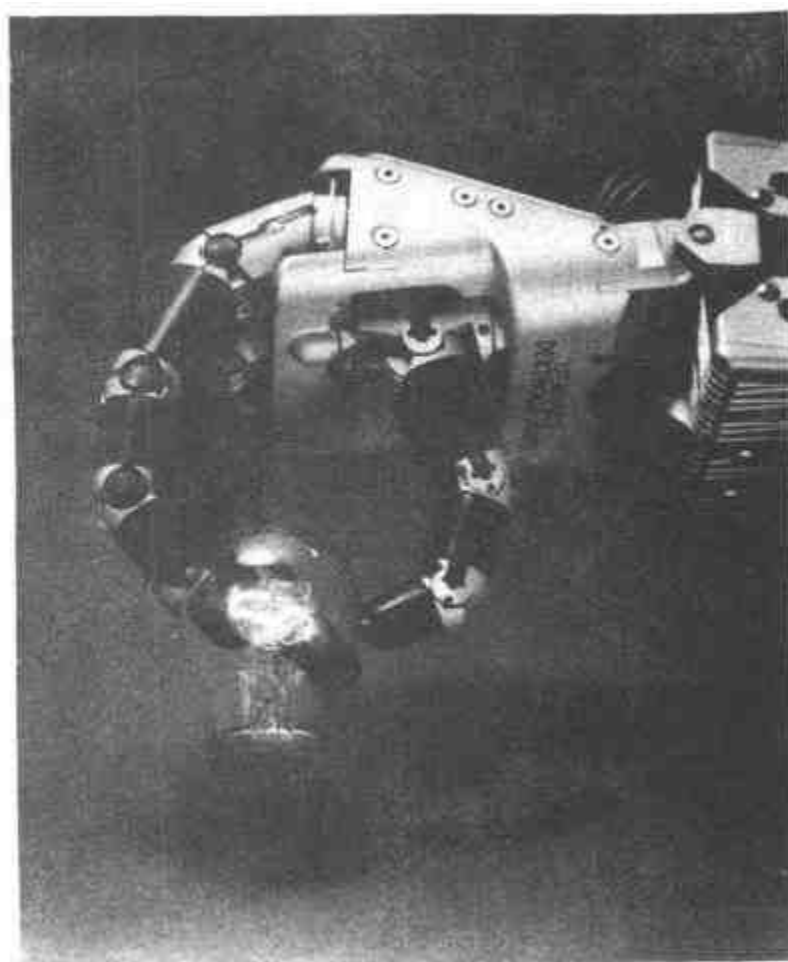


图 1.8 Utah/MIT 手

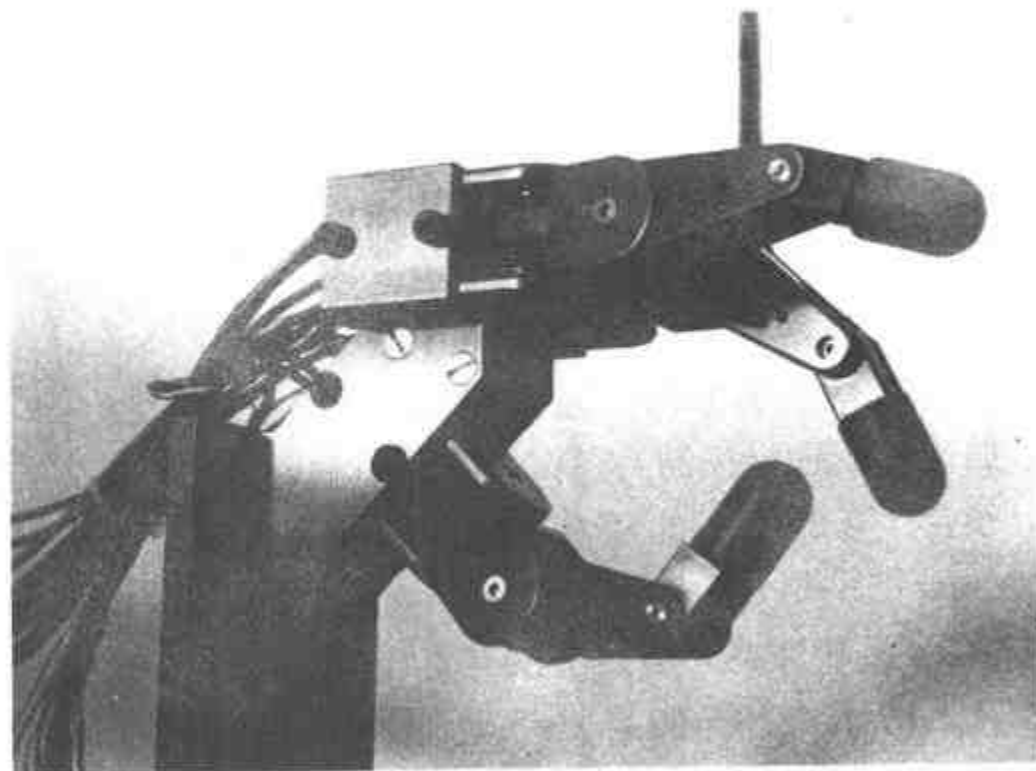


图 1.9 Salisbury 手(由 Kenneth Salisbury 设计)

进电动机驱动，其四个手指在同一平面内运动。Styx 手有两个手指，每个手指有两个关节，所有关节都是直接驱动的。如同 NYU 手一样，Styx 手（图 1.10）常用作多指手控制试验的样手。

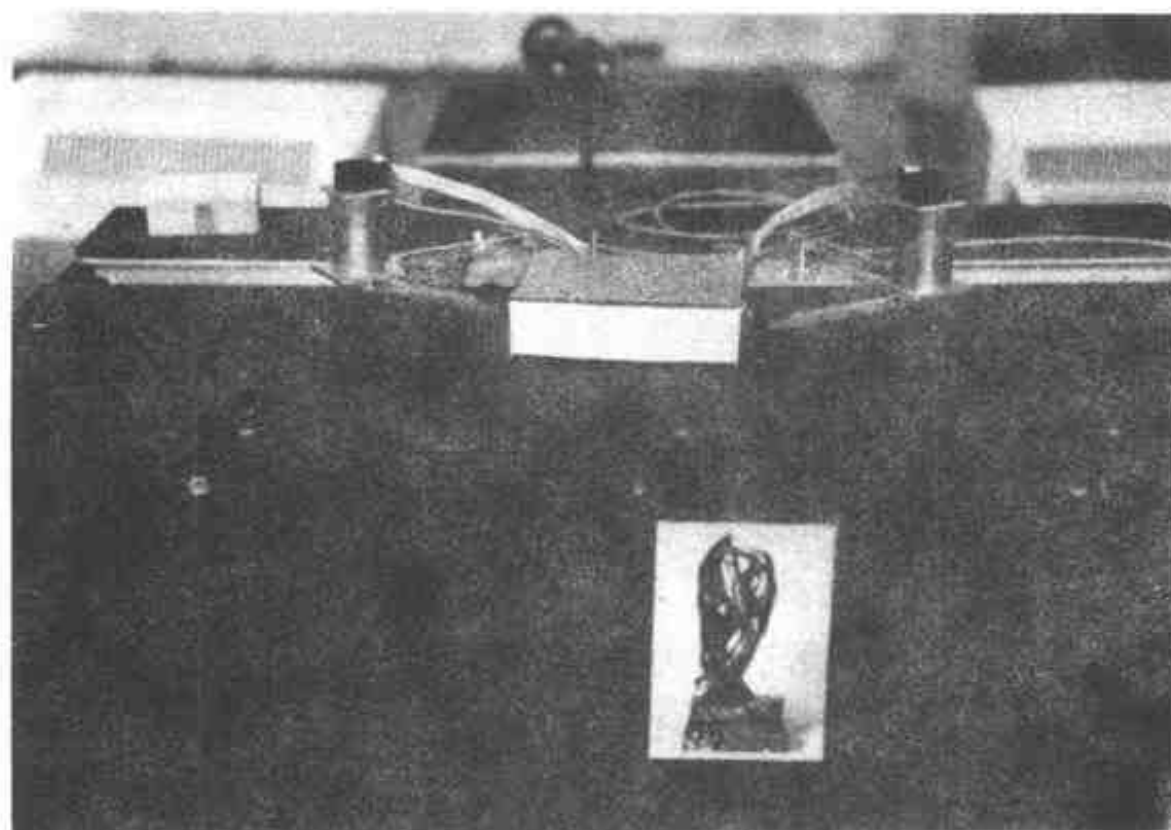


图 1.10 Styx 平面两指手

当今，已有多种多指手处于研制阶段或已投入使用，它们的尺寸可小到毫米，甚至是微米，其中部分属于专用或半专用型末端执行器。Pisa 研制的一种新型多指手可用于摘取桔子，日本研制的另一种多指手则用来弹钢琴。轻型手发展中的一个关键难题是需要解决轻质高转矩电动机。针对这种情况，已提出类似于肌肉的驱动器、虫状大小的电动机以及其他新型传动技术等研究课题，并正在着手研究。基于以上技术的多指机器人手的一个潜在应用是最小创伤外科手术。医疗中进入人体。这种应用的进一步讨论详见第九章。

3 本书概述

除本章外，本书分为八章，其中多数有小结和习题，且习题均不含数值运算。习题中的参数可取自实验室中的机器人或其他物理环境，另外选择了一些需数字运算的由此增加习题的真实性。

第二章介绍刚体运动。该章从几何的角度来解释刚体的平动或转动。虽然这是机械学和机器人学教材中都有的内容之一，但也恰恰最易被误解，有必要对刚体运动作深入的理解。该章的观点是经典的，但其数学方法却是先进的。在定义了刚体的旋转运动后，引入了指数映射，以表示旋转（此即欧拉定理），然后将其推广到一般的刚体运动。为此，介绍了旋量和运动螺旋概念，并用齐次变换来描述它们之间的关系。在此基础上，研究刚体微运动，并用运动螺旋来表示刚性速度。专门有一节针对表示广义力的力螺旋介绍了运动螺旋理论的对偶性。该章还讨论了对偶旋量问题。在教学中以较慢的进度来学习第二章的内容是很重要的，这样可使学生深入理解刚体运动。

旋量理论诞生于本世纪初，最经典的理论是 Chasles 定理及其对偶性和 Poincaré 定理。但

本章在内容安排上侧重于一些更为抽象的公式，这些公式在研究操作问题时是有用的。附录 A 详细介绍了这方面的知识

本书其余内容可分为三个部分：单机器人操作概论，多指机器人手的协调操作，以及非完整运动规划。下面将有所侧重地介绍每一部分的梗概。

3.1 单机器人操作

第三章介绍单机器人的操作运动学，根据机器人各关节转角来描述末端执行器或夹持器的位置和姿态，用第二章的指数坐标来表示刚体运动。已经证明，开链操作器的运动学可以表示为若干指数之积。这种最先由 Brockett^[12]提出的表示形式极其简洁，它用于第二章的许多复杂分析中。本书对运动学的处理类似于大多数其他教课书，如运动学的 Denavit-Hartenberg 方程。该章在求解逆运动学问题时显示出采用指数积公式的优点。所谓逆运动学问题是指在给定机器人末端执行器或夹持器位置和姿态的情况下，求解各关节转角。此类问题最初由 Paden & Kahan^[86]加以公式化，从而能精确处理大量工业机器人存在的逆运动学问题的多解性。将此方法推广到能解决更为一般的机器人逆运动学问题，就需要一些源自经典代数几何的最新技术。为此本书对经典代数几何作了简单介绍。

使用指数积公式解决运动学问题的另一个突出优点是易于对运动学方程进行微分以得到雅可比矩阵。雅可比矩阵的列可理解为机器人的运动螺旋轴。同时，这种方法很容易从几何上反映机器人的奇异性。指数积公式也可用于推导含一个或多个闭链（如 Stewart 平台或平面四杆机构）的机器人运动学方程。

第四章推导了单机器人的动力学和控制方程。首先回顾了多刚体系统运动的拉格朗日方程，通过对其专门研究，导出了刚体运动的牛顿-欧拉方程。这些内容与第二章一样都是经典的，但它们是构筑现代数学几何的框架。再次使用指数积公式，推导出开链机器人的拉格朗日方程，同时也说明了运动学方程的几何构成是如何演变成拉格朗日形式的。

最后，回顾了李亚普诺夫理论的基础部分，并用于证明本书中控制规则的稳定性。同时证明了单机器人两种控制规则的稳定性：计算力矩控制规则和 PD（比例 + 微分）控制规则。

3.2 多指机器人手的协调操作

第五章介绍抓取运动学。首先总结了接触模型的类型，引入抓取映射的概念，由其反映因手指接触物体而施加的力与该力对物体质心影响之间的关系。指出了可靠限制物体运动的稳定抓取或力封闭抓取的特性。基于这些特性，讨论了如何通过物体表面上选择合适的手指接触位置来构成力封闭抓取问题。

该章前半部分讨论手指作用在物体上的力；后半部分介绍被抓物体的运动与手指运动的对偶性，包括抓取性质与抓取物体的手指的运动学之间的相互关系。定义了力封闭的对偶性，即可操作性。该章最后讨论了指端在物体表面上的滚动，这是手指在物体表面上重新定位、从而改善抓取特性的一个重要途径。这对于用多指手完成作业任务来说，是必要的。

第六章推导了多指机器人手的动力学和控制方程。多指手运动学方程的推导是建立有约束（因抓取而产生的约束）机器人系统运动方程的前提。为写出具有 Pfaffian 约束系统的拉格朗日方程，本章介绍了必要的数学方法。讨论了为什么 Pfaffian 约束或速度约束不能简化为对系统位形参数的约束。事实上，以上问题是第七、第八章的内容。利用这些公式就可写

出多指手系统的运动方程。对于单机器人，指出了这些运动学方程的形式与其动力学方程之间的关系。当抓取是非冗余的并是可操作的时，系统的动力学方程就特别简单。而当抓取是冗余的或是不可操作的时，动力学方程就需要作大量修改。对多指手系统使用这种形式的动力学方程，提出了两种分离控制规则——计算力矩规则和 PID 控制规则。使用这两个规则就可使它们与单机器人联系起来。

大多数多指手，包括人类自身肌肉骨骼系统，都不是由电动机驱动的，而是由腱络驱动的。这种情况下，运动方程就需要作些调整以考虑手指各关节处产生力的机构。该章讨论了腱驱动机器人手的动力学问题。

多自由度系统（如多指机器人手）控制中需考虑的另一个重要问题是控制的分级管理。计算力矩规则和 PID 控制规则都存在计算费时的弱点。可以想像，一个具有几百个自由度的系统，如哺乳类动物的肌肉骨骼系统，它们在表皮上所具有的分级管理是粗糙的，然而它们在脊柱和肌肉内的分级管理却是精确的。这种分级管理是对高级命令到低级命令的输出进行管理的關鍵，同时也伴随着从肌肉到表皮层传感数据的输入。如何设计多指机器人系统控制器的环境，并以多机器人控制程序为例来考虑这种分级管理，这正是早已试图解决的问题。

3.3 机器人系统的非完整约束

第六章在给出多指机器人手动力学方程时，遇到如何处理 Pfaffian 约束的存在性问题。这一章，只讨论了怎样将约束合并到拉格朗日方程中，而留下一个未解决的问题，即非完整约束系统的轨迹规划问题。在多指手抓取物体的过程中，用控制规则使被抓物体跟踪某一特定的位置和姿态。然而，如果指端在物体表面上能自由滚动，那么仅用第六章的方法来控制滚动位置是不可能的，尤其是不可能给出将手指从一个接触位置运动到另一个接触的控制策略。在此启发下，第七章研究机器人系统的非完整约束。

引起非完整约束的原因有如下两种：物体间在接触处作无滑动的滚动，或在运动过程中角动量守恒。第七章列举了一些在机器人系统中因滚动而引起的非完整约束的例子，如汽车的停泊、移动机器人、太空机器人以及飞行机器人。虽然这些实例已超出多指机器人手的范畴，但由此可拓宽视野。基于对系统是属部分非完整约束（或不可积的）还是属于完整约束（或可积的）概念的理解，本章讨论了对这些系统进行分类的方法。这些分类方法是根据微分几何的基本表示和该章讨论的非线性控制理论（可控制性）得出的。如该章所述，Pfaffian 系统的非完整约束与可控制性之间的关系是一种对偶关系。

第八章介绍了非完整约束系统运动规划的几种方法，研究了非完整系统轨迹规划问题，这是一个机器人学和控制工程中迅速发展的研究领域。该章首先回顾了研究现状，随后专门研究了轨迹规划的几种方法。讨论了非完整系统产生李括号运动的正弦波的作用。这是受简单模型系统最优控制问题解的启发。由这类典型系统出发，讨论了如何将这类典型系统推广到所谓的链式系统。该章还讨论了利用分段定常控制及 Ritz 基函数控制非完整系统的更为一般的方法，并将这些方法应用于前一章的实例中。该章最后回到动态手指在被抓物体表面上重新定位的问题上，并给出从一种抓取到另一种抓取手指在被抓物体表面上滚动的几种不同方法。

第九章从技术的角度叙述了机器人学方面的一些发展领域。从研究和分析的角度来看，希望本书将会使读者确信在机器人操作方面尚有许多未开垦的处女地。

4 文献说明

近 15 年来,出版了许多有关机器人学方面的著作,这是对该领域发展的一大贡献。在此将这些著作一一列出是不可能的,而仅给出我们特别熟悉的几本。对于那些未被引用的著作深表歉意。

机器人学方面最早的教科书为 Paul^[91]所著“机器人的数学、规划和控制”。之后, Gortla & Renaud^[36], Craig^[21], Fu, Gonzalez & Lee^[35]也相继撰写出版了有关著作。其中前两本主要是介绍单机器人的机械结构、动力学和控制,而第三本主要包括机器人中的视觉、传感和智能。由 Spong & Vidyasagar^[111]所著的教材对机器人的动力学和控制作了详细的讨论。Coiffet^[21], Asada & Slotine^[2], Koivo^[53]等人写的书也都很有价值。在本书付印前,据了解, Siciliano & Sciavicco 即将完成一本新教材。由 Spong, Lewis & Abdallah^[110]编辑的论文集探讨了机器人控制策略发展的前景。

以上都是关于单机器人方面的著作。第一本关于多指机器人手的专著由 Mason & Salisbury^[70]所著,该书详细给出了抓取公式的推导过程以及 Salisbury 三指手的结构设计和控制策略。之后,该领域出版的书籍包括:由 Cutkosky^[22]、Nakamura^[80]撰写的专著,由 Iberall & Venkataraman^[43]编辑的论文集。

机器人学方面的论文集有很多。近期的几本论文集如下:由 Brockett^[13]根据 1990 年美国数学学会论文内容进行编辑的论文集;由 Spong, Lewis & Abdallah^[110]编辑的论述操作理论的论文集;由 Li & Canny^[62]根据 1991 年 IEEE 机器人学和自动化国际会议论文汇编而成的关于非完整运动规划方面的论文集。

计算机视觉或行走机器人的研究与发展蒸蒸日上。因篇幅所限,未列出与此有关的文献。

第二章 刚体运动

刚体运动是指物体上任意两点之间距离保持不变的运动。机器人运动学、动力学及其控制,实质上就是研究刚体的运动问题。本章将用线性代数和旋量理论来描述刚体运动。

早在 19 世纪初期,Chasles 和 Poinsot 在其著作中已有关于旋量理论基本原理的内容介绍。Chasles 已证明:刚体从一位置到另一位置的运动可通过绕某一直线的转动加上沿平行于该直线的移动得到。本书中称这种组合运动为螺旋运动 screw motion。螺旋运动的无穷小量称为运动螺旋,(twist) 刚体的瞬时速度用其线性分量和角度分量来描述。旋量和运动螺旋在机器人机构运动学研究中起着重要作用。

旋量理论的第二个主要作用是用于描述作用在刚体上的力。Poinsot 发现,作用在刚体上的任何力系总可以合成为一个作用于某直线的集中力和绕该直线的力矩,这种力和力矩的组合称为力螺旋(wrench)。力螺旋与运动螺旋存在对偶关系,所以有关运动螺旋的定理也适用于力螺旋。

Robert S. Ball 对 Chasles 和 Poinsot 提出的旋量理论加以发展,于 1900 年形成了一套完整的旋量理论^[6]。本章以线性代数和矩阵群为基础,给出更新的旋量理论处理方法。其基本思想就是用齐次坐标来表示刚体运动,并通过矩阵的指数映射将运动螺旋变换为相应的螺旋运动。为避免更多的数学预备知识,本章有关旋量理论仅以基本线性代数知识为基础。附录 A 以李群和李代数的概念给出了较深入的解释。

用旋量,运动螺旋和力螺旋来描述刚体运动学问题有两个主要优点。第一,可以从整体上来描述刚体的运动,这样可以避免用局部坐标系描述时所造成的奇异性,如用欧拉角来描述旋转时这种奇异性就不可避免;第二,旋量理论可以对刚体运动进行几何描述,从而可大大简化对机构的分析。本书将充分利用旋量的几何特性,尤其是下一章机构运动学和奇异性的研究。

1 刚体变换

在欧氏空间中,质点的瞬时位置可相对于惯性坐标系来描述。当选择组的三维正交坐标轴、用坐标 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ 来描述质点的位置时,每一坐标值表示该质点相对于相应坐标轴的位置。质点运动轨迹可用参数形式表示为 $p(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ 。

在机器人学中,通常关心的并不是各质点的独立运动,而是一组质点的共同运动,例如象机器人中杆的运动。因此,应认为刚体是一个完全不变形体,可严格地定义为:刚体(rigid body)是任意两质点之间距离保持不变的质点的集合,并与物体的任意运动和作用在物体上的任意力无关。若 p 和 q 为刚体上任意两点,则当刚体运动时, p 和 q 必须满足:

$$\|p(t) - q(t)\| = \|p(0) - q(0)\| = \text{常量}$$

刚体运动(rigid motion)是物体上任意两质点之间距离始终保持不变的连续运动。刚体从一位置到另一位置的刚体运动称为刚体位移(rigid displacement)。通常,刚体位移既包括

物体的平动又包括物体的转动。

对于由 $\mathcal{R}^3$ 的子集 O 描述的给定物体, 其刚体运动可以用一系列的连续变换 $g(t): O \rightarrow \mathcal{R}^3$ 来描述, 即可将物体上各质点相对于某个固定坐标系的运动描述成时间的函数。也就是说, 如果物体沿着一条连续的路径运动, $g(t)$ 将物体上一点的起始坐标变换为该点在 t 时刻的坐标, 而刚体位移则可用一个将刚体上各点的坐标由初始值变换为最终位形的变换 $g: O \rightarrow \mathcal{R}^3$ 来描述。

假定有两点 $p, q \in O$, 连接两点的矢量 $v \in \mathcal{R}^3$ 由 p 点指向 q 点, 由于 $p, q \in \mathcal{R}^3$, 故有 $v = q - p$ 。尽管 p, q 两点和矢量 v 的坐标皆由三个一组的数给出, 但它们含义迥然不同。矢量有方向和大小 (矢量的大小是指其欧氏范数, 即 $\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$)。然而, 矢量并不与物体相固联, 例如在物体上有另外的一对点 r 和 s , 并满足 $q - p = s - r$, 这时 v 也可以看作是连接 r, s 的矢量。所以矢量有时也称为自由矢量 (free vector), 以表明它可以移动到空间的任何位置而不改变其意义。

质点的刚体变换自然也就归结为矢量的变换。若用 $g: O \rightarrow \mathcal{R}^3$ 表示刚体位移, 则矢量变换为:

$$g_*(v) = g(q) - g(p)$$

注意上式等号右边是两点之差, 故也是一个矢量。

由于刚体上任意两点之间的距离不随刚体运动而改变, 所以描述刚体运动的变换 $g: O \rightarrow \mathcal{R}^3$ 也必须保证距离始终不变这一特点。但这一条件并不充分, 因为它允许有内反射, 也就是说, 变换可以保持距离不变, 但不能保持姿态不变。例如, $(x, y, z) \rightarrow (x, y, -z)$ 的变换虽能保持距离不变, 但它们是物体上关于 xy 坐标平面的反射点。为了消除这一可能性, 要求物体上矢量的叉积也保持不变。综上所述, 下面给出描述刚体三维运动的刚体变换 (rigid body transformation) 的定义。

定义 2.1 刚体变换

满足下列条件的变换 $g: \mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}^3$, 称为刚体变换:

- 1) 长度不变: 对于任意点 $p, q \in \mathcal{R}^3$, 均有 $\|g(p) - g(q)\| = \|p - q\|$;
- 2) 叉积不变: 对于任意矢量 $v, w \in \mathcal{R}^3$, 均有 $g_*(v \times w) = g_*(v) \times g_*(w)$ 。

由该定义可得到一些有用的结论。首先, 刚体变换使矢量内积也保持不变。若用极化恒等式 (polarization identity) 来描述, 即有

$$v_1^T v_2 = \frac{1}{4} (\|v_1 + v_2\|^2 - \|v_1 - v_2\|^2)$$

且

$$\|v_1 + v_2\| = \|g_*(v_1) + g_*(v_2)\|, \|v_1 - v_2\| = \|g_*(v_1) - g_*(v_2)\|$$

因此, 对于任意两矢量 v_1, v_2 , 有

$$v_1^T v_2 = g_*(v_1)^T g_*(v_2)$$

特殊情况, 正交矢量变换为正交矢量, 相应的刚体变换也保证叉积不变 (见上述定义之条件 2), 而且刚体变换将正交坐标系变换为正交坐标系。

刚体上任意两点之间的距离以及任意两矢量的叉积固定不变并不意味着刚体上质点间不能有相对运动, 但这些运动只能是旋转而不能是移动。因此, 为了描述刚体运动, 必须同时

反映刚体上任意质点的移动及刚体绕该点的转动。为此，在刚体上某点建立直角坐标系，通过描述该坐标系相对于固定坐标系的运动来表示刚体的位形 (configuration)。那么，刚体上各点的运动情况即可从刚体坐标系的运动以及质点相对于动坐标系的运动来获得。这里要求所有坐标系均应为右手系，即确定坐标轴的三个正交矢量 $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ 应满足 $z = x \times y$ 。

由于刚体变换 $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 保持叉积不变，所以右手坐标系仍变换为右手坐标系。刚体变换 g 对刚体坐标系的作用在于它把刚体坐标系的旋转变过程描述成刚体运动的结果。更确切地说，如果刚体的位形由自同一点 p 引出的三个矢量 v_1, v_2, v_3 确定的右手坐标系描述，那么经刚体变换 g 后，刚体的位形将由自 $g(p)$ 点引出的三个矢量 $g_*(v_1), g_*(v_2), g_*(v_3)$ 确定的右手坐标系描述。

本章要讨论的问题包括：刚体变换的性质、特点及表示，同时介绍一些本书后续内容必备的数学知识。

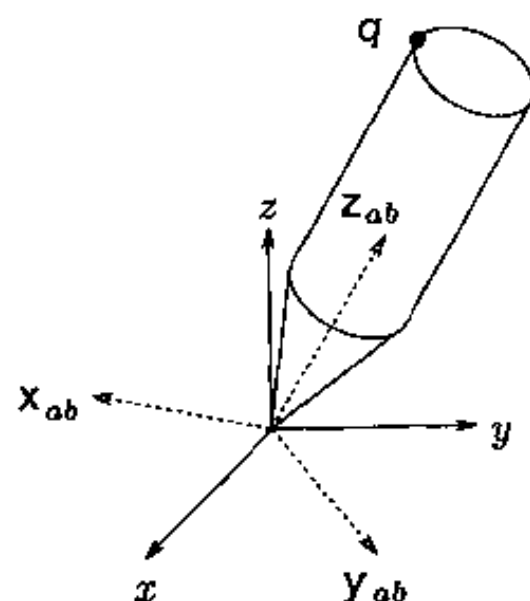


图 2.1 刚体绕一点的旋转
〔虚线坐标系建立在旋转的刚体上〕

2 三维空间中的旋转运动

首先研究物体仅作旋转运动的情况。利用与刚体固定的动坐标系相对于固定坐标系（或者叫惯性坐标系）的姿态来描述刚体的姿态。以下研究中除非特别说明，否则所有坐标系均为右手系。设 A 为惯性坐标系， B 为与刚体固联的动坐标系， $x_{ab}, y_{ab}, z_{ab} \in \mathbb{R}^3$ 为坐标系 B 中主坐标轴相对于坐标系 A 的坐标（见图 2.1）。依次排列这三个坐标矢量，构成一个 3×3 矩阵：

$$R_{ab} = [x_{ab} \ y_{ab} \ z_{ab}]$$

按这种方式建立的矩阵称为旋转矩阵 (rotation matrix)：物体相对于定坐标系的每一次旋转即对应该形式的一个矩阵。

2.1 旋转矩阵的性质

由旋转矩阵的结构可看出它有两个主要性质。设 $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 为旋转矩阵， $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}^3$ 为其列矢量。因旋转矩阵 R 的列矢量是相互正交的，即有

$$r_i^T r_j = \begin{cases} 0, & \text{若 } i \neq j \\ 1, & \text{若 } i = j \end{cases}$$

对于矩阵 R ，这些性质可写为

$$RR^T = R^T R = I \quad (2.1)$$

由上式可推出

$$\det R = \pm 1$$

为确定矩阵 R 的行列式的符号，由线性代数知识可知

$$\det R = r_1^T (r_2 \times r_3)$$

对于右手坐标系, 有 $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1$, 故 $\det \mathbf{R} = \mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_1 = 1$ 。因此右手坐标系可用行列式为 1 的正交阵来描述。所有满足这两个性质的 3×3 矩阵的集合记为 $SO(3)$, 符号 SO 是 special orthogonal (特殊正交) 的缩写, 其中 special 指的是 $\det \mathbf{R} = +1$, 而非 ± 1 。

更一般的情况, $\mathbb{R}^{n \times n}$ 空间中的旋转矩阵可定义为

$$SO(n) = \{ \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n} : \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I}, \det \mathbf{R} = +1 \} \quad (2.2)$$

但是, 通常感兴趣的是 $n=3$ 的情况。 $n=2$ (平面转动) 的情况也非常有用, 将在习题中加以研究。

$SO(3) \subset \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 是满足矩阵相乘运算的群 (group)。对于元素可用算子 $\circ$ 构成二元运算的集合 G , 如果满足下列条件, 则称为群:

- 1) 封闭性: 若 $g_1, g_2 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, 则 $g_1 \circ g_2 \in G$ 。
- 2) 单位性: 对于任意的 $g \in G$, 一定存在一个单位元素 e , 使得 $g \circ e = e \circ g = g$ 。
- 3) 可逆性: 对于任意的 $g \in G$, 一定存在唯一的逆 $g^{-1} \in G$, 使得 $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$ 。
- 4) 结合性: 若 $g_1, g_2, g_3 \in G$, 则有 $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$ 。

对于 $SO(3)$ 情况, 有

1. 如果 $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2 \in SO(3)$, 则 $\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \in SO(3)$ 。这是因为

$$\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2)^T = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_1^T = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_1^T = \mathbf{I}$$

$$\det(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2) = \det(\mathbf{R}_1) \det(\mathbf{R}_2) = +1$$

2. 单位矩阵是单位元素。

3. 由式 (2.1) 可知, $\mathbf{R} \in SO(3)$ 的逆是 $\mathbf{R}^{-1} \in SO(3)$ 。

4. 由矩阵乘法结合律可得群的结合律, 即 $(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2) \mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_1 (\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3)$ 。

因此, $SO(3)$ 是一个以单位矩阵 $\mathbf{I}$ 作为单位元素、以矩阵乘法作为群运算的群。 $SO(3)$ 称为三维旋转群 (rotation group)。

自由刚体相对于固定坐标系旋转后的位形可由唯一的 $\mathbf{R} \in SO(3)$ 表示。鉴于这一特性, 旋转群 $SO(3)$ 又称为系统的位形空间 (configuration space), 系统的运动轨迹为曲线 $\mathbf{R}(t) \in SO(3)$, 其中 $t \in [0, T]$ 。更为一般的情况是, 对于集合 Q , 如果其中每一个元素对应于系统的一个有效位形, 则称 Q 为位形空间, 系统的每一个位形都对应于 Q 中的唯一元素。

旋转矩阵 $\mathbf{R} \in SO(3)$ 也可用于实现同一点在不同坐标系中的坐标变换。如图 2.1 中的 q 点, 如果 q 点在坐标系 B 中的坐标为 $\mathbf{q}_b = (x_b, y_b, z_b)$, 那么, q 点在坐标系 A 中的坐标可用下列方法求得: 因 $x_b, y_b, z_b \in \mathbb{R}$ 是 q 点在 B 坐标系中相应坐标轴上的投影, 如果坐标系 B 相对于坐标系 A 的坐标为 $x_{ab}, y_{ab}, z_{ab} \in \mathbb{R}^3$, 则 q 点在 A 坐标系中的坐标为

$$\mathbf{q}_a = x_{ab} x_b + y_{ab} y_b + z_{ab} z_b$$

或

$$\mathbf{q}_a = [x_{ab} \ y_{ab} \ z_{ab}] [x_b \ y_b \ z_b]^T = \mathbf{R}_{ab} \mathbf{q}_b$$

换句话说, 当考虑 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的变换时, $\mathbf{R}_{ab}$ 即表示一点从 B 坐标系到 A 坐标系坐标的旋转变换。

旋转矩阵对一点的作用可用于定义旋转矩阵对矢量的作用。设 $\mathbf{v}_b$ 为 B 坐标系中的一个

矢量, 并且 $v_b = q_b - p_b$, 那么,

$$R_{ab}(v_b) := R_{ab}q_b - R_{ab}p_b = q_a - p_a = v_a$$

因矩阵相乘是线性的, 如果 $v_b = q_b - p_b = s_b - r_b$, 则可以证明有

$$R_{ab}s_b - R_{ab}r_b = R_{ab}q_b - R_{ab}p_b = v_a$$

这样就定义了 R_{ab} 对一个矢量的作用。

旋转矩阵可以通过矩阵相乘加以组合, 从而形成新的旋转矩阵。如果坐标系 C 相对坐标系 B 的姿态为 R_{bc} , 坐标系 B 相对于另一坐标系 A 的姿态为 R_{ab} , 那么, 坐标系 C 相对于坐标系 A 的位形为

$$R_{ac} = R_{ab}R_{bc} \quad (2.3)$$

式中 R_{ac} 为 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的变换, 其变换过程为: 先将一点在坐标系 C 中的坐标变换到 B , 然后再从 B 变换到 A 。式 (2.3) 称为旋转的合成法则 (composition rule)。

按前面的定义, 旋转矩阵表示刚体变换。也就是说, 它保持距离和姿态不变。利用两矢量间的叉积运算等代数性质可证明这一点。首先看一下两矢量 $a, b \in \mathbb{R}^3$ 叉积的定义

$$a \times b = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}$$

因为叉积是一个线性算子, 所以 $b \mapsto a \times b$ 可以用一个矩阵来表示。若定义

$$(a)^\wedge = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

则

$$a \times b = (a)^\wedge b \quad (2.5)$$

后面将经常用符号 $\hat{a}$ 来代替 $(a)^\wedge$ 。

引理 2.1 对于给定的 $R \in SO(3)$ 和 $v, w \in \mathbb{R}^3$, 则存在下列性质

$$R(v \times w) = (Rv) \times (Rw) \quad (2.6)$$

$$R(w)^\wedge R^T = (Rw)^\wedge \quad (2.7)$$

引理中的第一条性质说明: 矩阵 R 对应的旋转运动可转换成叉积运算, 即两矢量叉积的旋转等于各自旋转的叉积。对于绕瞬时旋转轴的旋转运动, 第二条性质的解释一目了然。现仅将其作为代数量。上述引理可以通过计算加以证明。

定理 2.2 旋转运动是刚体变换

旋转矩阵 $R \in SO(3)$ 是一个刚体变换, 即

1. R 保持距离不变: 对于任意的 $p, q \in \mathbb{R}^3$, 有 $\|Rq - Rp\| = \|q - p\|$ 。

2. R 保持姿态不变: 对于任意的 $v, w \in \mathbb{R}^3$, 有 $R(v \times w) = Rv \times Rw$ 。

证明: 性质 1 可通过直接验算得证:

$$\begin{aligned} \|Rq - Rp\|^2 &= (R(q - p))^T (R(q - p)) = (q - p)^T R^T R (q - p) = \\ &= (q - p)^T (q - p) = \|q - p\|^2 \end{aligned}$$

性质 2 可由式 (2.6) 推得。

2.2 旋转的指数坐标

机器人学中所遇到的一般运动形式是物体绕给定轴转过一定角度的旋转运动。例如，希望描述机器人的连杆绕固定轴的旋转运动，如图 2.2 所示。设 $\omega \in \mathbb{R}^3$ 为表示旋转方向的单位矢量， $\theta \in \mathbb{R}$ 为旋转角度。因物体的每一次转动都存在某个 $R \in SO(3)$ 与之对应，对此将 R 写成 ω 和 θ 的函数。

为便于推导，考虑旋转体上一点 q 的速度。如果物体是以单位速度绕 ω 轴作匀速转动，那么 q 点的速度 $\dot{q}$ 可表示为

$$\dot{q}(t) = \omega \times q(t) = \hat{\omega} q(t) \quad (2.8)$$

这是一个以时间 t 为自变量的线性微分方程，经积分得

$$q(t) = e^{\hat{\omega}t} q(0)$$

这里 $q(0)$ 是该点的起始位置 ($t=0$)， $e^{\hat{\omega}t}$ 是矩阵指数

$$e^{\hat{\omega}t} = I + \hat{\omega}t + \frac{(\hat{\omega}t)^2}{2!} + \frac{(\hat{\omega}t)^3}{3!} + \dots$$

如果物体以单位速度绕 ω 轴旋转 θ 角度，那么

$$R(\omega, \theta) = e^{\hat{\omega}\theta} \quad (2.9)$$

由定义很容易看出， $\hat{\omega}$ 是反对称矩阵，即满足 $\hat{\omega}^T = -\hat{\omega}$ 。所有 3×3 反对称矩阵的矢量空间记为 $so(3)$ 。更一般情况， $n \times n$ 反对称矩阵的矢量空间为

$$so(n) = \{S \in \mathbb{R}^{n \times n} : S^T = -S\} \quad (2.10)$$

($so(n)$ 后面将逐步清楚地看到使用记号 $so(n)$ 的原因)。在 $so(n)$ 中，感兴趣的仍只是 $n=2$ (见习题) 和 $n=3$ 的情况。

集合 $so(3) \subset \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 是一个包含整个实域的矢量空间。因此， $so(3)$ 中两个元素之和仍是 $so(3)$ 的元素， $so(3)$ 中元素与标量的乘积还是 $so(3)$ 的元素。此外，可以用式 (2.4) 及 $(v+w)^\wedge = \hat{v} + \hat{w}$ 使 $so(3)$ 和 $\mathbb{R}^3$ 等同起来。

把一个反对称矩阵表示成单位反对称矩阵与实数的乘积是很方便的。若矩阵 $\hat{\omega} \in so(3)$ ， $\|\omega\| = 1$ ，实数 $\theta \in \mathbb{R}$ ，则 $\hat{\omega}\theta$ 的指数可写为

$$\exp(\hat{\omega}\theta) = e^{\hat{\omega}\theta} = I + \theta\hat{\omega} + \frac{\theta^2}{2!}\hat{\omega}^2 + \frac{\theta^3}{3!}\hat{\omega}^3 + \dots \quad (2.11)$$

式 (2.11) 是一个无穷数列，从计算角度来说，是无用的。为了得到 $\exp(\hat{\omega}\theta)$ 的一个解析表达式，可以利用下列 $\hat{a}$ 的乘方公式这些公式可以通过直接计算得到验证。

引理 2.3 对于给定的 $\hat{a}$ ，存在下列关系：

$$\hat{a}^2 = aa^T - \|a\|^2 I \quad (2.12)$$

$$\hat{a}^3 = -\|a\|^2 \hat{a} \quad (2.13)$$

$\hat{a}$ 的更高次方的计算依此类推。

利用该引理并将 $a = \omega\theta$ ， $\|\omega\| = 1$ 代入，则式 (2.11) 变为

$$e^{\hat{\omega}\theta} = I + \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right)\hat{\omega} + \left(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} - \dots\right)\hat{\omega}^2$$

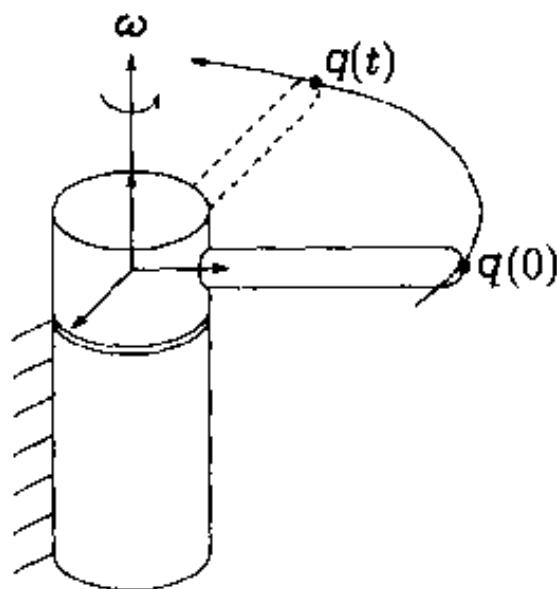


图 2.2 绕 ω 轴旋转形成的端点轨迹

因此

$$e^{\hat{\omega}\theta} = \mathbf{I} + \hat{\omega}\sin\theta + \hat{\omega}^2(1 - \cos\theta) \quad (2.14)$$

上式通常称为 Rodrigues 公式, 它是计算 $\exp(\hat{\omega}\theta)$ 的一种有效方法。当 $\|\omega\| \neq 1$ 时, 上式可修正为 (见习题 12)

$$e^{\hat{\omega}\theta} = \mathbf{I} + \frac{\hat{\omega}}{\|\omega\|} \sin(\|\omega\|\theta) + \frac{\hat{\omega}^2}{\|\omega\|^2} (1 - \cos(\|\omega\|\theta))$$

至此说明 $\exp(\hat{\omega}\theta)$ 确实是一个旋转矩阵。

定理 2.4 反对称矩阵的矩阵指数是正交的

对于反对称矩阵 $\hat{\omega} \in so(3)$ 和 $\theta \in \mathbb{R}$, 有

$$e^{\hat{\omega}\theta} \in SO(3)$$

证明: 定义 $\mathbf{R} := \exp(\hat{\omega}\theta)$, 要证得 $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$ 且 $\det \mathbf{R} = +1$ 。为证明第一条性质, 由式 (2.14) 可导出下列等式

$$[e^{\hat{\omega}\theta}]^{-1} = e^{-\hat{\omega}\theta} = e^{\hat{\omega}'\theta} = [e^{\hat{\omega}\theta}]^T$$

因此 $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$, 即 $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$ 。由此可得 $\det \mathbf{R} = \pm 1$ 。利用行列式的连续性, 将其看作是矩阵的函数, 结合指数变换的连续性及 $\det \exp(0) = 1$, 则得 $\det \mathbf{R} = +1$ 。

定理 2.4 表明: 指数变换将反对称矩阵变换为正交矩阵。从几何角度来讲, 反对称矩阵与旋转轴相对应 (即变换 $\omega \rightarrow \hat{\omega}$), 并且指数变换产生的旋转量也与绕轴的旋转角度量 θ 相对应。反对称矩阵与正交矩阵的关系部分地解释了 $so(3)$ 的含意。由此还可以看出每一个旋转矩阵皆可以表示为某个反对称矩阵的矩阵指数, 即变换 $\exp: so(3) \rightarrow SO(3)$ 是满射变换。

定理 2.5 指数变换是 $SO(3)$ 上的满射 (surjective) 变换

对于给定的 $\mathbf{R} \in SO(3)$, 存在 $\omega \in \mathbb{R}^3$, $\|\omega\| = 1$ 及 $\theta \in \mathbb{R}$, 使得 $\mathbf{R} = \exp(\hat{\omega}\theta)$ 。

证明: 其证明是构造性的, 令 $\mathbf{R}$ 与 $\exp(\hat{\omega}\theta)$ 相等并解相应的方程。根据定义, 旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 具有下列结构

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

令 $v_\theta = 1 - \cos\theta$, $c_\theta = \cos\theta$, $s_\theta = \sin\theta$, 则式 (2.14) 可写为

$$\begin{aligned} e^{\hat{\omega}\theta} &= \mathbf{I} + \hat{\omega}\sin\theta + \hat{\omega}^2(1 - \cos\theta) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 - v_\theta(\omega_2^2 + \omega_3^2) & \omega_1\omega_2v_\theta - \omega_3s_\theta & \omega_1\omega_3v_\theta + \omega_2s_\theta \\ \omega_1\omega_2v_\theta + \omega_3s_\theta & 1 - v_\theta(\omega_1^2 + \omega_3^2) & \omega_2\omega_3v_\theta - \omega_1s_\theta \\ \omega_1\omega_3v_\theta - \omega_2s_\theta & \omega_2\omega_3v_\theta + \omega_1s_\theta & 1 - v_\theta(\omega_1^2 + \omega_2^2) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \omega_1^2v_\theta + c_\theta & \omega_1\omega_2v_\theta - \omega_3s_\theta & \omega_1\omega_3v_\theta + \omega_2s_\theta \\ \omega_1\omega_2v_\theta + \omega_3s_\theta & \omega_2^2v_\theta + c_\theta & \omega_2\omega_3v_\theta - \omega_1s_\theta \\ \omega_1\omega_3v_\theta - \omega_2s_\theta & \omega_2\omega_3v_\theta + \omega_1s_\theta & \omega_3^2v_\theta + c_\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.16)$$

联立式 (2.15) 和式 (2.16), 可得

$$\text{trace}(\mathbf{R}) = r_{11} + r_{22} + r_{33} = 1 + 2\cos\theta$$

为证明该式有解, 可利用 $\mathbf{R}$ 的迹等于其特征值之和的关系。由于 $\mathbf{R}$ 能保持长度不变且

$\det \mathbf{R} = +1$, 其特征值为 1, 并且为复共轭 (见习题 3)。由 $-1 \leq \text{trace}(\mathbf{R}) \leq 3$ 得

$$\theta = \arccos\left(\frac{\text{trace}(\mathbf{R}) - 1}{2}\right) \quad (2.17)$$

其中 θ 值不确定, 它可在 $\theta \pm 2\pi n$ 或 $-\theta \pm 2\pi n$ 中选择。

再令 $\mathbf{R}$ 和 $\exp(\hat{\omega}\theta)$ 的非对角元素相等, 有

$$\begin{aligned} r_{32} - r_{23} &= 2\omega_1 s_\theta \\ r_{13} - r_{31} &= 2\omega_2 s_\theta \\ r_{21} - r_{12} &= 2\omega_3 s_\theta \end{aligned}$$

若 $\theta \neq 0$, 则取

$$\omega = \frac{1}{2s_\theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

如果在式 (2.17) 中已选择了 $2\pi - \theta$, 那么, 旋转轴将是 $-\omega$ 。事实上, 指数变换是 $\mathfrak{R}^3 \rightarrow SO(3)$ 的多对一变换。如果 $\mathbf{R} = \mathbf{I}$, 则 $\text{trace}(\mathbf{R}) = 3$ 且 $\theta = 0$, 而 ω 可任选。如果 $\mathbf{R} \neq \mathbf{I}$, 以上构造表明存在两个不同的 ω 和 $\theta \in [0, 2\pi)$, 使得 $\mathbf{R} = \exp(\hat{\omega}\theta)$ 。

式 (2.17) 和式 (2.18) 已给出了矢量 $\omega\theta \in \mathfrak{R}^3$ 的分量, 并称为 $\mathbf{R}$ 的指数坐标 (exponential coordinates)。考虑到 $\omega \in \mathfrak{R}^3$ 是旋转轴单位矢量, $\theta \in \mathfrak{R}$ 是旋转角度, 综合定理 (2.4)、定理 (2.5), 可得如下经典定理。

定理 2.6 (欧拉定理) 任意姿态 $\mathbf{R} \in SO(3)$ 等效于绕固定轴 $\omega \in \mathfrak{R}^3$ 旋转角 $\theta \in [0, 2\pi)$ 。

这种表示旋转运动的方法也叫作等效轴表示法 (equivalent axis representation)。由前而的证明可知, 这种表示法并不唯一, 因为 $\omega' = -\omega$, $\theta' = 2\pi - \theta$ 对应的旋转与 ω 和 θ 相同。此外, 如果 ω 是单位矢量, 那么对于 $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ 来说 (通过取 $\theta = 0$) ω 是可以任选的。前一问题是由于指数变换为多对一而造成的, 而后者则称为等效轴表示法的奇异性 (singularity), 这就意味着 $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ 时将会失去等效轴的严格相关性。

2.3 其他表示法

指数坐标又称作旋转群的正则坐标 (canonical coordinates)。旋转群也存在其他形式的坐标, 将在下面内容及习题中简要介绍。需强调的是要弄清它们与前面所述指数坐标之间的关系。关于这些表示法更经典的叙述, 可参考有关运动学教材。

欧拉角

描述坐标系 B 相对于坐标系 A 姿态的一种方法如下: 坐标系 B 最初与坐标系 A 重合。首先将 B 系绕其 z 轴旋转一个 α 角 (此时 A 、 B 两系 z 轴仍重合), 然后绕 B 系的新 y 轴旋转 β 角, 最后再绕 B 系的新 z 轴旋转 γ 角, 这就得到一个新的姿态 $\mathbf{R}_{ab}(\alpha, \beta, \gamma)$, 其中三个角度 (α, β, γ) 用于表示相应的旋转运动。

角度 (α, β, γ) 称为关于 ZYZ 的欧拉角 (Euler angles)。由于所有这些旋转运动都是绕动坐标系的主坐标轴进行的, 所以将分别绕 x , y , z 轴的变换矩阵定义为基本旋转变换矩阵:

$$\mathbf{R}_x(\phi) := e^{x\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y(\beta) := e^{y\beta} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

及

$$\mathbf{R}_z(\alpha) := e^{z\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

为获得 B 坐标系最终姿态，将 B 坐标系看作是固定坐标系来建立有关旋转公式最为方便，此时所有旋转均相对于固定轴进行。如果将 B 系看作固定，那么对 A 系而言，确切的旋转顺序为

$$\mathbf{R}_{ba} = \mathbf{R}_z(-\gamma)\mathbf{R}_y(-\beta)\mathbf{R}_x(-\alpha)$$

前后颠倒一下上面的表达式，即可得到 B 系相对于 A 系的旋转变换矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ab} &= \mathbf{R}_x(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_z(\gamma) \\ &= \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha c_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta \\ s_\alpha c_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ -s_\beta c_\gamma & s_\beta s_\gamma & c_\beta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.19)$$

这里， c_α 、 s_α 分别为 $\cos\alpha$ 和 $\sin\alpha$ 的缩写，其他记号亦然。

显然，形如式 (2.19) 的任何矩阵均为正交阵（因为它是由基本旋转矩阵构成）。当在指数变换情况下，从 (α, β, γ) 到 $SO(3)$ 的变换是否为满射是一个重要问题。该问题的答案是肯定的；对于任意的旋转矩阵 $\mathbf{R} \in SO(3)$ ，通过求解式 (2.19) 即可得到相应的欧拉角 (α, β, γ) 。例如当 $\sin\beta \neq 0$ 时，其解为

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha \tan 2(\sqrt{r_{31}^2 + r_{32}^2}, r_{33}) \\ \alpha &= \alpha \tan 2(r_{23}/s_\beta, r_{13}/s_\beta) \\ \gamma &= \alpha \tan 2(r_{32}/s_\beta, -r_{31}/s_\beta) \end{aligned} \quad (2.20)$$

这里， $\alpha \tan 2(y, x)$ 是计算 $\arctan(y/x)$ ，并且根据 x, y 的符号来确定计算角度所处的象限。

ZYZ 欧拉角是 $so(3)$ 参数化的一个例子。在等效轴表示法中，该参数化的奇异性（是指对于处理由旋转矩阵来确定欧拉角的逆问题时无全局光滑解），仅在 $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ 时才会出现。要注意的是，当 (α, β, γ) 为 $(\alpha, 0, -\alpha)$ 时，将导致 $\mathbf{R}_{ab}(\alpha, 0, -\alpha) = \mathbf{I}$ 。此时，对于一个旋转，将存在无穷多组 ZYZ 欧拉角参数化表示。

按不同顺序绕旋转轴转动，将得到其他类型的欧拉角参数化表示。通常的旋转顺序有：ZYX 轴（Fick 角）和 YZX 轴（Helmholtz 角）。其中，ZYX 欧拉角也称为偏转、俯仰和侧倾，旋转矩阵 $\mathbf{R}_{ab}$ 对应的旋转顺序为：首先绕动坐标系的 x 轴转动（侧倾），然后绕新的 y 轴转动（俯仰），最后再绕新的 z 轴转动（偏转）。ZYX 和 YZX 欧拉角参数表示都具有在 $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ 姿态无奇异性的优点，但在其他的不同姿态却存在奇异性。例如，对于 ZYX 欧拉角，

有

$$R_{ab} = R_z(\Psi)R_y(\theta)R_x(\phi) = e^{i\Psi}e^{j\theta}e^{i\phi}$$

当 $\theta = -\pi/2$ 时, 上式为奇异。在 $SO(3)$ 的三维表示中, 奇异性的不可避免是基本的拓扑事实。这种情况类似于在球面上不可能找到一个全局球坐标。

四元数

四元数 (quaternions) 是复数的推广。如同单位圆上的复数可用于描述平面旋转运动一样, 四元数可用于描述空间旋转运动。与欧拉角不同的是, 四元数是通过四个数而不是三个数来描述旋转, 给出了 $SO(3)$ 的一个全局参数表示法。

四元数是一个矢量, 其一般形式为

$$Q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \quad q_i \in \mathfrak{R}, i=0, \dots, 3$$

其中 q_0 为 Q 的标量部分, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ 为矢量部分。通常简洁表示为 $Q = (q_0, \mathbf{q})$, 其中 $q_0 \in \mathfrak{R}$, $\mathbf{q} \in \mathfrak{R}^3$ 。四元数的集合 Q 是一个建立在实数域上的四维矢量空间, 并且构成一个关于四元数相乘 (符号为 “ $\cdot$ ”) 的群, 而且乘法满足分配律和结合律, 但不满足交换律, 且有下列关系

$$a\mathbf{i} = \mathbf{i}b \quad a\mathbf{j} = \mathbf{j}a \quad a\mathbf{k} = \mathbf{k}a \quad a \in \mathfrak{R}$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = -1$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k} \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = -\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j}$$

四元数 $Q = (q_0, \mathbf{q})$ 与 $Q^* = (q_0, -\mathbf{q})$ 为共轭关系, 其模满足

$$\|Q\|^2 = Q \cdot Q^* = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$$

四元数的逆为 $Q^{-1} = Q^* / \|Q\|^2$, 单位四元数为 $Q = (1, 0)$ 。

两个四元数的积按照三维矢量的内积和叉积规则进行。若有两个四元数 $Q = (q_0, \mathbf{q})$ 和 $P = (p_0, \mathbf{p})$, 其中 q_0, p_0 分别为 Q 和 P 的标量部分, $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ 分别为相应的矢量部分。则这两个四元数的积满足

$$Q \cdot P = (q_0 p_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}, q_0 \mathbf{p} + p_0 \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{p})$$

在实际应用时, 不必直接利用上式中的乘法关系。

单位四元数是所有满足 $\|Q\| = 1$ 的集合 $Q \in Q$ 的一个子集。单位四元数也构成一个关于四元数乘法 (习题6) 的群。对于给定的旋转矩阵 $R = \exp(\hat{\omega}\theta)$, 关联单位四元数定义为

$$Q = (\cos(\theta/2), \omega \sin(\theta/2))$$

其中 $\omega \in \mathfrak{R}^3$ 表示旋转轴, $\theta \in \mathfrak{R}$ 表示旋转角度。计算表明, 如果 Q_{ab} 表示坐标系 A 相对于 B 的旋转, Q_{bc} 表示坐标系 B 相对于 C 的旋转, 那么坐标系 A 相对于 C 的旋转可用四元数表示为

$$Q_{ac} = Q_{ab} \cdot Q_{bc}$$

因此, 单位四元数的群运算与旋转群运算直接对应。对于给定的单位四元数 $Q = (q_0, \mathbf{q})$, 可以获得相应的旋转

$$\theta = 2\arccos q_0 \quad \omega = \begin{cases} \frac{\mathbf{q}}{\sin(\theta/2)} & \text{若 } \theta \neq 0 \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases}$$

及 $R = \exp(\hat{\omega}\theta)$ 。

由于四元数的群结构直接对应于旋转, 所以四元数提供了一种表示旋转运动并可避免奇异的有效方法。这些性质在习题中体现得尤为明显。

3 三维空间中的刚体运动

第一节已说明刚体运动能保持两质点之间的距离和两矢量之间的角度不变。可用描述刚体动坐标系相对于固定坐标系瞬时位置和姿态的刚体变换来表示刚体运动。这种表示法的基础是刚体变换将右手正交坐标系变换为右手正交坐标系, 因而能保证相应的距离和角度不变。本书将两坐标系之间的所有变换都称为刚体变换, 而不管刚体是否已明确指出。

通常, 刚体运动包括转动和移动两部分。前节已讨论了关于纯转动的表示方法。对于纯移动的描述是比较简单的: 选择刚体上任何一点, 描述该点相对于某已知坐标系的位置坐标, 从而获得整个刚体的运动轨迹曲线 $p(t) \in \mathbb{R}^3$, $t \in [0, T]$ 。

刚体一般运动 (包括移动和转动) 的描述比较复杂。下面描述固定于刚体上的动坐标系 B 相对于惯性系 A 的位姿 (见图 2.3)。设坐标系 A 的原点至坐标

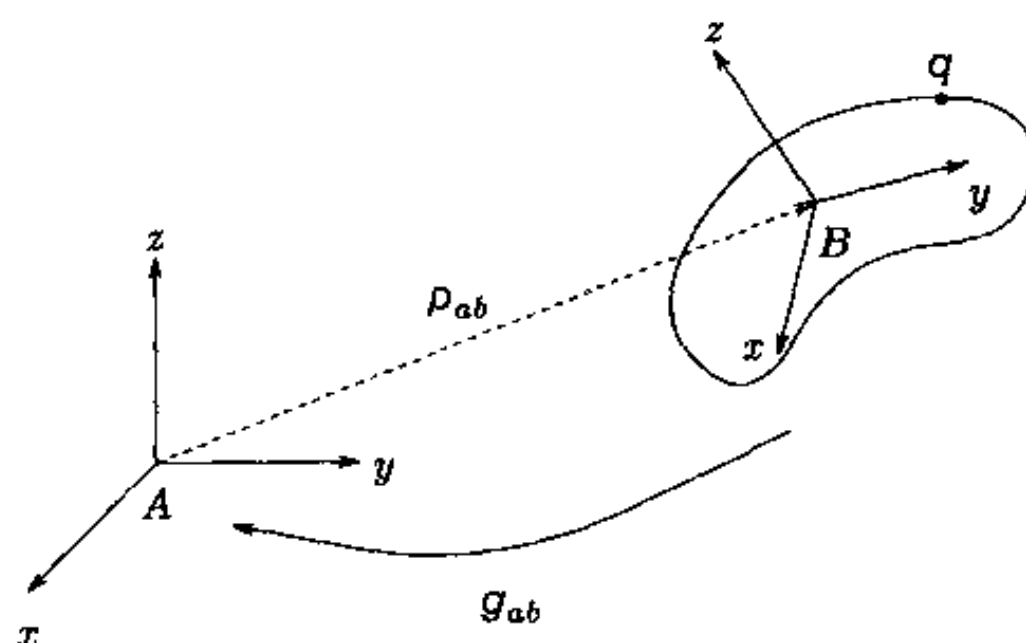


图 2.3 描述刚体运动的坐标系

系 B 的原点的位置矢量为 $p_{ab} \in \mathbb{R}^3$, B 系相对于 A 系的姿态为 $R_{ab} \in SO(3)$ 。系统的位姿由 (p_{ab}, R_{ab}) 确定, 系统的位形空间为 $\mathbb{R}^3$ 与 $SO(3)$ 的乘积空间, 记为 $SE(3)$:

$$SE(3) = \{(p, R) : p \in \mathbb{R}^3, R \in SO(3)\} = \mathbb{R}^3 \times SO(3) \quad (2.21)$$

关于上式为一个群的证明将在下一子节中给出。如推广到 n 维空间中, 则有

$$SE(n) := \mathbb{R}^n \times SO(n)$$

与旋转情况相类似, 元素 $(p, R) \in SE(3)$ 既可用于确定刚体的位形, 又可用于一点由一坐标系到另一坐标系的坐标变换。更确切地说, 若 $q_a, q_b \in \mathbb{R}^3$ 为 q 点分别相对于坐标系 A 和 B 的坐标, 则当已知 q_b 时, q_a 可通过坐标变换得到

$$q_a = p_{ab} + R_{ab}q_b \quad (2.22)$$

其中 $g_{ab} = (p_{ab}, R_{ab}) \in SE(3)$ 表示 B 系相对于 A 系的位形, 为了避免记号的混淆, 用 $g(q)$ 来表示一点的刚体变换, 即

$$g(q) = p + Rq$$

所以

$$q_a = g_{ab}(q_b)$$

矢量 $v = s - r$ 的刚体变换 $g = (p, R)$ 定义为

$$g_*(v) := g(s) - g(r) = R(s - r) = Rv$$

因此, 矢量经过了旋转变换。

3.1 齐次坐标表示法

类似于四维空间中矩阵和矢量的表示, 点和矢量的刚体变换也有一个简洁表示方法。首先引入一些符号, 用一点的三个坐标再加上 1, 从而组成一个四维列矢量

$$\bar{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ 1]^T$$

称为 q 点的齐次坐标 (homogeneous coordinates)。坐标原点的齐次坐标为

$$\bar{O} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$$

矢量的齐次坐标与点的齐次坐标有所不同, 矢量的齐次坐标形式为

$$\bar{v} = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ 0]^T$$

矢量和点的齐次坐标的第四个分量分别为 0 和 1, 必须注意这一差别。下面再规定一些计算规则:

1. 矢量的和与差仍是矢量。
2. 矢量与点的和是点。
3. 两个点的差是矢量。
4. 两个点的和无意义。

由式 (2.22) 所决定的变换 $q_a = g_{ab}(q_b)$ 是一个仿射变换 (affine transformation)。根据前面关于点的定义, 该变换可表示为如下线性形式

$$\bar{q}_a = \begin{bmatrix} q_a \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ab} & p_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_b \\ 1 \end{bmatrix} =: \bar{g}_{ab} \bar{q}_b$$

其中 4×4 矩阵 $\bar{g}_{ab}$ 称为 $g_{ab} \in SE(3)$ 的齐次坐标表示。通常, 若 $g = (p, R) \in SE(3)$, 那么

$$\bar{g} = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

刚体运动的齐次坐标或者线性表示虽然方便, 但却将有关量的表示维数由三维增加到四维。

式 (2.23) 矩阵中的最后一行也是额外增加的。但在图形学中, 其中的数字 1 常被标量常数代替, 当这个常数大于 1 时表示图形放大, 小于 1 时表示图形压缩。另外, 最后一行的 0 行矢量也可用某个其他行矢量代替, 以构成“透视变换” (perspective transformation)。这两种情况对应的矩阵变换已不再表示刚体变换。

刚体变换的组合将构成新的刚体变换。若 $g_{bc} \in SE(3)$ 表示坐标系 C 相对于坐标系 B 的位形, g_{ab} 表示 B 系相对于 A 系的位形, 那么由式 (2.23) 可得到 C 系相对于 A 系的位形为

$$\bar{g}_{ac} = \bar{g}_{ab} \bar{g}_{bc} = \begin{bmatrix} R_{ab} R_{bc} & R_{ab} p_{bc} + p_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

式 (2.24) 说明刚体变换的合成规则符合矩阵的标准乘法。如用齐次坐标表示, 可以证明刚性变换的集合是一个群, 即

1. 如果 $g_1, g_2 \in SE(3)$, 那么 $g_1 g_2 \in SE(3)$ 。
2. 4×4 的单位阵 I 属于 $SE(3)$ 。
3. 如果 $g \in SE(3)$, 那么 $\bar{g}$ 的逆可由矩阵的逆确定为

$$\bar{g}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \mathbf{p} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以 $\bar{g}^{-1} = (-\mathbf{R}^T \mathbf{p}, \mathbf{R}^T)$ 。

4. 刚体变换的合成规则满足结合律。

用齐次坐标来表示矢量 $\mathbf{v} = \mathbf{s} - \mathbf{r}$, 通过 $\mathbf{v}$ 的齐次坐标与 $\mathbf{g}$ 的齐次坐标相乘而得到 $\mathbf{v}$ 的刚体变换

$$\bar{g} * \bar{v} = \bar{g}(\bar{s}) - \bar{g}(\bar{r}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由于矢量的齐次坐标表示中最后一行为 0, 故可再次通过矩阵与矢量相乘来反映刚体变换的作用, 为了记号的简便书写, 更为了避免齐次坐标与点、矢量以及刚体变换的混淆, 用 $g\mathbf{q}$ 、 $g\mathbf{v}$ 分别代替 $\bar{g}\bar{q}$ 、 $\bar{g}*\bar{v}$ 。

下面的定理说明 $SE(3)$ 中的元素确实是刚体变换, 也就是说, 它们能保持两点之间的距离和两矢量之间的夹角不变。

定理 2.7 $SE(3)$ 中的元素表示刚体运动

任一 $g \in SE(3)$ 是刚体变换的条件为

1. g 能保持两点之间的距离不变: 即对于任意点 $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, 有

$$\|g\mathbf{q} - g\mathbf{p}\| = \|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|$$

2. g 能保持两矢量之间的夹角不变: 即对于任意矢量 $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, 有

$$g*(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = g*\mathbf{v} \times g*\mathbf{w}$$

证明: 由相应旋转矩阵的证明可以直接推出:

$$\|g\mathbf{q}_1 - g\mathbf{q}_2\| = \|\mathbf{R}\mathbf{q}_1 - \mathbf{R}\mathbf{q}_2\| = \|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2\|$$

$$g*\mathbf{v} \times g*\mathbf{w} = \mathbf{R}\mathbf{v} \times \mathbf{R}\mathbf{w} = \mathbf{R}(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

例 2.1 绕直线的旋转

考虑刚体绕平行于 z 轴且经过点

$(0, l_1, 0) \in \mathbb{R}^3$ 的一条直线的旋转运动, 如图 2.4 所示。若旋转角度为 θ , 那么 B 系相对于 A 系的姿态矩阵为

$$\mathbf{R}_{ab} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

B 系原点在 A 系中的坐标为

$$\mathbf{p}_{ab} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

所以, 刚体位形的齐次坐标表示为

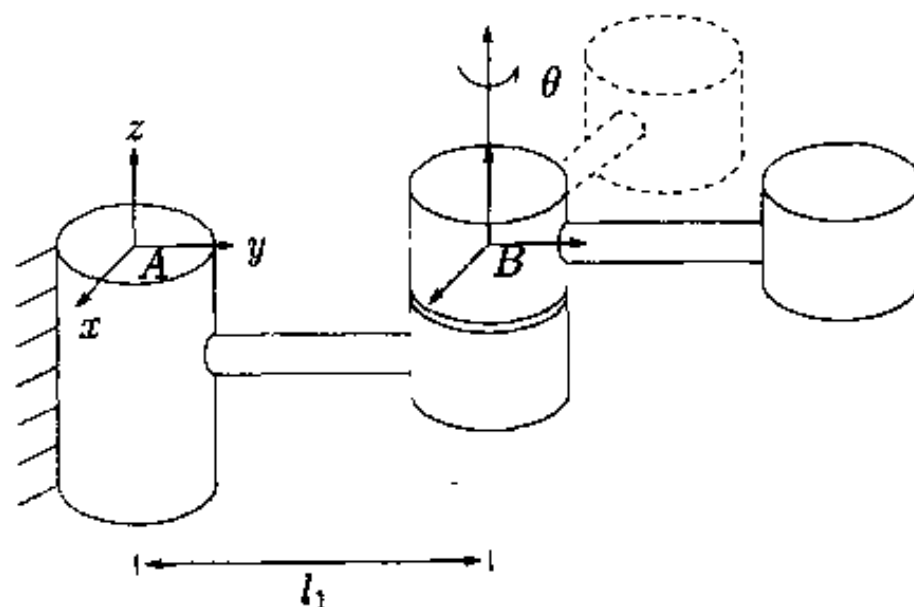


图 2.4 刚体绕固定轴的旋转运动

$$g_{ab}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

注意当 $\theta=0$ 时, $g_{ab}(0)$ 表示的两坐标系之间的相对运动为沿 y 轴的纯移动。

3.2 刚体运动的指数坐标和运动旋量

第二节介绍的 $SO(3)$ 指数变换可推广于欧氏群 $SE(3)$ 。由于它是处理空间刚体运动的一种行之有效方法, 所以下面将充分利用这种表示方法。首先看一些例子, 然后再给出有关的正式定义。

图 2.5a 所示为单臂机器人的简单实例, 其中旋转轴为 $\omega \in \mathfrak{R}^3$, 且 $\|\omega\|=1$, $q \in \mathfrak{R}^3$ 为轴上一点。假设臂以单位速度转动, 那么臂端点 $p(t)$ 的速度为

$$\dot{p}(t) = \omega \times (p(t) - q) \quad (2.25)$$

引入如下 4×4 矩阵

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

其中 $v = -\omega \times q$ 。则式 (2.25) 加一行后可写为

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & -\omega \times q \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} = \hat{\xi} \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\bar{p}} = \hat{\xi} \bar{p}$$

上述微分方程的解为

$$\bar{p}(t) = e^{\hat{\xi}t} \bar{p}(0)$$

式中 $e^{\hat{\xi}t}$ 为 4×4 矩阵 $\hat{\xi}t$ 的矩阵指数, 一般定义为

$$e^{\hat{\xi}t} = I + \hat{\xi}t + \frac{(\hat{\xi}t)^2}{2!} + \frac{(\hat{\xi}t)^3}{3!} + \dots$$

其中标量 t 是总的旋转角度 (因是以单位速度旋转), $\exp(\hat{\xi}t)$ 是一点从起始位置到旋转 t 弧度后的位置的变换。

同样, 由于移动的特点, 可将对应的变换用 4×4 矩阵的指数形式表示。以单位速度运动的移动关节上一点的速度为 (见图 2.5b)

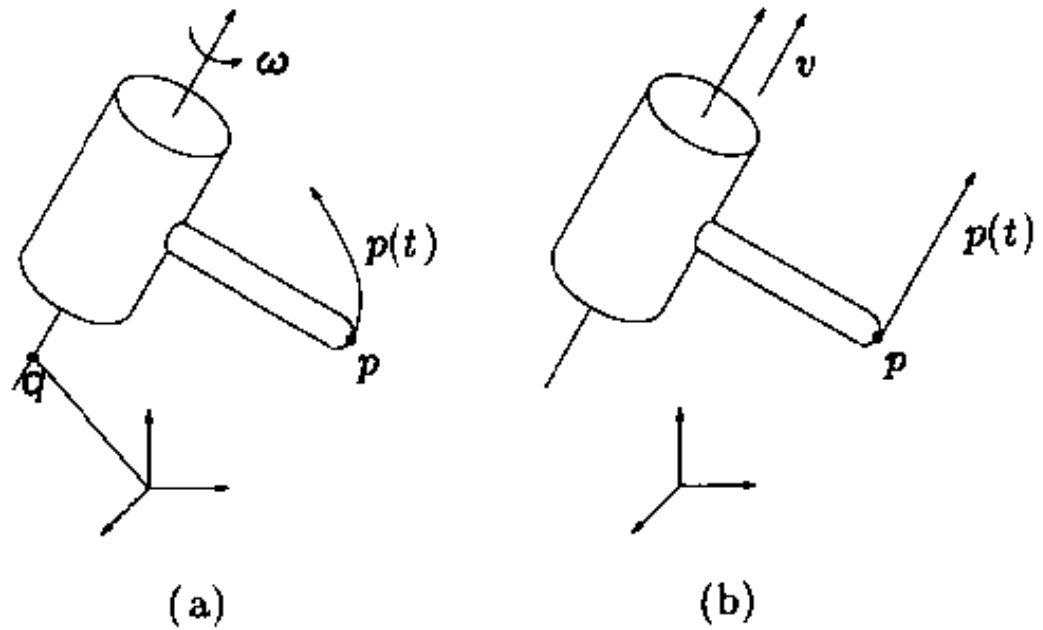


图 2.5 (a) 转动关节和 (b) 移动关节

$$\dot{p}(t) = v \quad (2.27)$$

式 (2.27) 的解为 $\exp(\hat{\xi}t) \bar{p}(0)$, 其中 t 是总的移动量, 并且有

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

式 (2.26) 和式 (2.28) 中的 4×4 矩阵 $\hat{\xi}$ 是反对称矩阵 $\hat{\omega} \in \mathfrak{so}(3)$ 的推广。类似于 $\mathfrak{so}$

(3), 有如下定义

$$se(3) := \{(\mathbf{v}, \hat{\boldsymbol{\omega}}) : \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, \hat{\boldsymbol{\omega}} \in so(3)\} \quad (2.29)$$

在齐次坐标中, 元素 $\hat{\xi} \in se(3)$ 可写为

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\omega}} & \mathbf{v} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

$se(3)$ 中的元素称为运动旋量, 或者叫作欧氏群的一个无穷小生成元。为了用 6 维矢量表示运动旋量, 引入 V (vee) 运算符

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\omega}} & \mathbf{v} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^V = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

并称 $\xi := (\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega})$ 为 $\hat{\xi}$ 的运动旋量坐标 (twist coordination)。6 维矢量逆运算 $\wedge$ (wedge) 将构成一个属于 $se(3)$ 的矩阵:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}^\wedge = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\omega}} & \mathbf{v} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

因此, $\xi \in \mathbb{R}^6$ 表示运动旋量 $\hat{\xi} \in se(3)$ 的运动旋量坐标。它类似于反对称矩阵的表示。

定理 2.8 从 $se(3)$ 到 $SE(3)$ 的指数变换

对于给定的 $\hat{\xi} \in se(3)$ 和 $\theta \in \mathbb{R}$, $\hat{\xi}\theta$ 的指数为 $SE(3)$ 的元素, 即

$$e^{\hat{\xi}\theta} \in SE(3)$$

证明: 可通过直接计算加以证明。证明过程中将得到关于计算 $\exp(\hat{\xi}\theta)$ 的公式。将 $\hat{\xi}$ 写为

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\omega}} & \mathbf{v} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

情况 1 ($\boldsymbol{\omega} = 0$): 若 $\boldsymbol{\omega} = 0$, 经直接计算可得

$$\hat{\xi}^2 = \hat{\xi}^3 = \hat{\xi}^4 = \dots = 0$$

因此 $\exp(\hat{\xi}\theta) = \mathbf{I} + \hat{\xi}\theta$, 且有

$$e^{\hat{\xi}\theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{v}\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\omega} = 0 \quad (2.32)$$

属于 $SE(3)$ 。

情况 2 ($\boldsymbol{\omega} \neq 0$): 假设 $\|\boldsymbol{\omega}\| = 1$ (必要时改变 θ 值), 并定义刚体变换为

$$g = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

此时, 利用引理 2.3 并结合 $\|\boldsymbol{\omega}\| = 1$, 可得

$$\begin{aligned} \hat{\xi}' &= g^{-1} \hat{\xi} g = \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\omega}} & \mathbf{v} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\omega}} & \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{v} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\omega}} & h\boldsymbol{\omega} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.34)$$

式中, $h := \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{v}$ 。利用下面的恒等式 (见习题 8)

$$e^{\hat{\xi}\theta} = e^{g(\hat{\xi}'\theta)g^{-1}} = g e^{\hat{\xi}'\theta} g^{-1} \quad (2.35)$$

可以计算 $\exp(\hat{\xi}\theta)$ 。利用 $\hat{\omega}\omega = \omega \times \omega = 0$ 可以证明

$$(\hat{\xi}')^2 = \begin{bmatrix} \hat{\omega}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, (\hat{\xi}')^3 = \begin{bmatrix} \hat{\omega}^3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots$$

因此有

$$e^{\hat{\xi}\theta} = \begin{bmatrix} e^{\hat{\omega}\theta} & h\omega\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

利用式 (2.35) 得

$$e^{\hat{\xi}\theta} = \begin{bmatrix} e^{\hat{\omega}\theta} & (I - e^{\hat{\omega}\theta})(\omega \times v) + \omega\omega^T v\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \omega \neq 0 \quad (2.36)$$

这是 SE (3) 中的元素。

变换 $g = \exp(\hat{\xi}\theta)$ 与前面的刚体变换有所不同。它描述的不是点在不同坐标系之间的变换，而是点由初始位置 $p(0) \in \mathbb{R}^3$ 到经如下刚体转动后的位置坐标之间的变换

$$p(\theta) = e^{\hat{\xi}\theta} p(0)$$

上式中， $p(0)$ 和 $p(\theta)$ 均在同一参考系中表示。与此类似，若 $g_{ab}(0)$ 表示刚体相对于 A 系的起始位姿，那么，相对于 A 系的最终位姿为

$$g_{ab}(\theta) = e^{\hat{\xi}\theta} g_{ab}(0) \quad (2.37)$$

因此，对于一个运动旋量来说，指数变换反映的是刚体的相对运动，运动旋量的指数可理解为描述刚体由起始到最终位形的变换，这一点对于下一章机器人机构运动学研究尤其重要。

指数变换可用于描述刚体运动，因此有必要说明的是：每一个刚体变换都可写为某个运动旋量的指数。下列定理将证实这是可能的，并给出由刚体变换确定运动旋量的构造过程。

定理 2.9 建立在 SE (3) 上的指数变换是满射变换

对于给定的 $g \in SE(3)$ ，存在 $\hat{\xi} \in se(3)$ 和 $\theta \in \mathbb{R}$ ，使得 $g = \exp(\hat{\xi}\theta)$ 。

证明：(构造性) 设 $g = (R, p)$ ，其中 $R \in SO(3)$ ， $p \in \mathbb{R}^3$ 。忽略解为 $\theta = 0$ 及任意 $\hat{\xi}$ 的次要情况 $(R, p) = (I, 0)$ 。

情况 1 ($R = I$)：若不存在使下式成立的旋转运动

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{p}{\|p\|} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \theta = \|p\|$$

则由式 (2.32) 可以证明 $\exp(\hat{\xi}\theta) = (I, p) = g$ 。

情况 2 ($R \neq I$)：为求 $\xi = (v, \omega)$ ，使 $\exp(\hat{\omega}\theta)$ 与 g 相等，并求解 v 、 ω 。由式 (2.36) 得

$$e^{\hat{\xi}\theta} = \begin{bmatrix} e^{\hat{\omega}\theta} & (I - e^{\hat{\omega}\theta})(\omega \times v) + \omega\omega^T v\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

与前一节定理 2.5 类似， ω 和 θ 可通过求解旋转方程 $\exp(\hat{\omega}\theta) = R$ 得到。这样即有

$$(I - e^{\hat{\omega}\theta})(\omega \times v) + \omega\omega^T v\theta = p \quad (2.38)$$

由上式必能求得 v 。而且可以看出矩阵

$$A = (I - e^{\hat{\omega}\theta})\hat{\omega} + \omega\omega^T\theta$$

对于所有的 $\theta \in (0, 2\pi)$ 都是非奇异的。由此可知当 $\theta \neq 0$ (且 $R \neq I$) 时, 组成 A 的两个矩阵具有相互正交的零空间。因此由 $Av = 0$, 得 $v = 0$ 。详细过程见习题 9。

根据定理 2.9, 任一刚体变换 g 都能写成某个运动旋量 $\hat{\xi}\theta \in se(3)$ 的矩阵指数形式。矢量 $\xi\theta \in \mathfrak{R}^6$ 称为刚体变换 g 的指数坐标。需说明的是: 在旋转运动情况下, 变换 $\exp: se(3) \rightarrow SE(3)$ 是多对一的, 这是因为在运动的旋转分量求解时, ω 和 θ 的选择不是唯一的。但这并没有导致多大的困难, 在大多数的应用场合, 所给定的运动旋量只是问题的一部分, 并且希望获得的是相应的刚体运动。

例 2.2 绕直线旋转的运动旋量坐标

求图 2.6 所示绕空间固定轴作旋转运动产生的刚体位移。B 坐标系的位形矩阵为

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & -l_2\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & l_1 + l_2\cos\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

希望计算出 B 系相对于 A 系位形的运动旋量坐标。

为计算产生 g_{ab} 的运动旋量, 可按定理 2.9 的证明, 假定 $\alpha \neq 0$, 即 $R \neq I$ 。满足 $\exp(\hat{\omega}\theta) = R_{ab}$ 的转轴 $\omega \in \mathfrak{R}^3$ 和转角 $\theta \in \mathfrak{R}$ 为

$$\omega = [0 \ 0 \ 1]^T \quad \theta = \alpha$$

由于是绕 z 轴旋转, 为求 v , 必须解下式

$$[(I - e^{\hat{\omega}\theta})\hat{\omega} + \omega\omega^T\theta]v = p_{ab}$$

因 $\theta = \alpha$, 将上式左边展开, 得

$$\begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha - 1 & 0 \\ 1 - \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} -l_2\sin\alpha \\ l_1 + l_2\cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

解得

$$v = \begin{bmatrix} \frac{\sin\alpha}{2(1-\cos\alpha)} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sin\alpha}{2(1-\cos\alpha)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_2\sin\alpha \\ l_1 + l_2\cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l_1 - l_2}{2} \\ \frac{(l_1 + l_2)\sin\alpha}{2(1-\cos\alpha)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

因此, g_{ab} 的运动旋量坐标为

$$\xi = \left[\frac{l_1 - l_2}{2} \quad \frac{(l_1 + l_2)\sin\alpha}{2(1-\cos\alpha)} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \right]^T \quad \theta = \alpha \neq 0$$

对于绕一轴作纯转动情况, 这个结果是不希望的。导致这个结果复杂的原因是因为 B 系与 A 系之间的绝对变换用了指数坐标。相反地, 当用指数坐标来表示相对变换时有

$$g(\alpha) = g_{ab}(\alpha)g_{ab}^{-1}(0)$$

其中 $g_{ab}(0)$ 为 $\alpha = 0$ (纯移动) 时的变换。由此可以证明相对变换 $g(\alpha)$ 的指数坐标为

$$\xi = [l_1, 0, 0, 0, 0, 1]^T \quad \theta = \alpha \neq 0$$

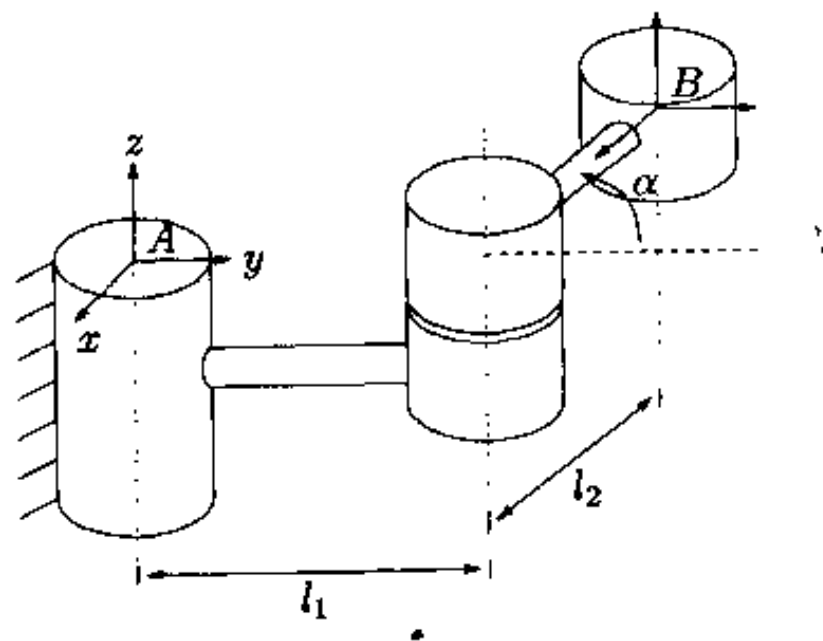


图 2.6 绕固定轴旋转产生的刚体位移

3.3 旋量：运动旋量的几何表示

本节将研究与运动旋量 $\xi = (v, \omega)$ 有关的一些几何特性。这些特性将加深对参数化刚体运动旋量的理解。首先，定义一种特殊类型的刚体运动，称为旋量运动，然后再研究运动旋量与旋量在本质上的联系。

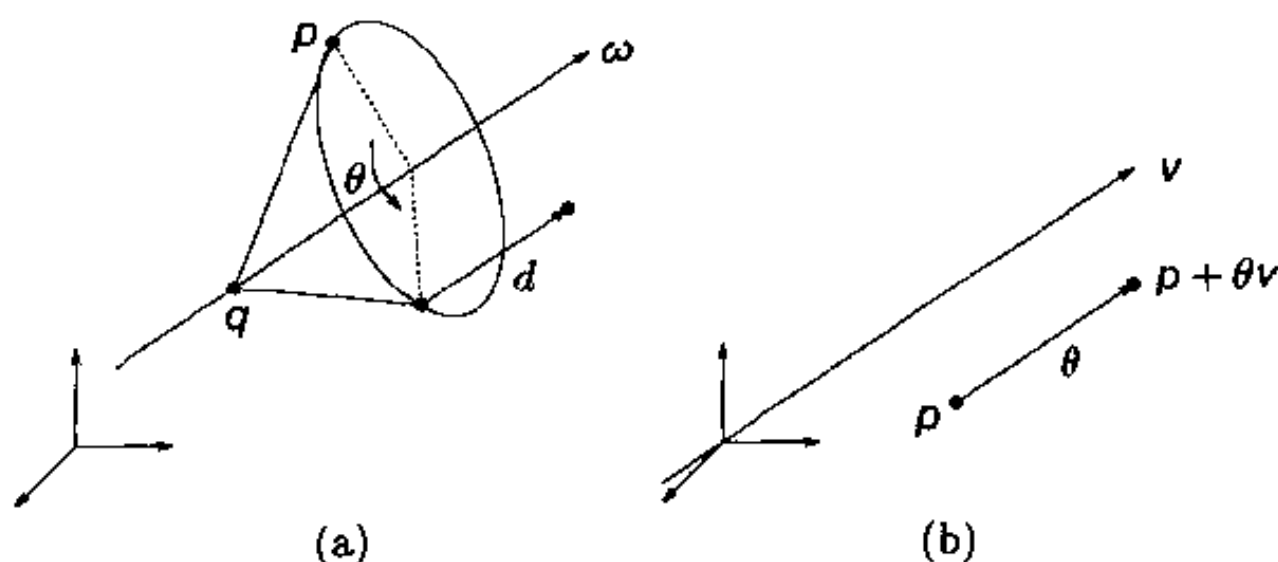


图 2.7 旋量运动

(a) 一般旋量运动 (b) 纯移动

如图 2.7a 所示，考虑先绕空间轴旋转 θ 角再沿该轴平移距离 d 的刚体运动。这种组合运动称为旋量运动，它类似于绕同一轴转动和移动的旋量。为了进一步分析的方便，把平移量与旋转量的比值 $h := d/\theta$ （假设 $\theta \neq 0$ ）叫作旋量的节距（pitch）。因此，旋转 θ 角后的纯移动量为 $h\theta$ 。把旋转轴表示为过一点的有向线。若 $q \in \mathbb{R}^3$ 为旋转轴上一点， $\omega \in \mathbb{R}^3$ 为确定该轴方向的单位矢量，该旋转轴可表示为点的集合

$$l = \{q + \lambda\omega : \lambda \in \mathbb{R}\} \quad (2.39)$$

当旋量运动为非零旋转加平移时，上式成立。

若旋转角度为零，旋量的轴必须重新定义：如图 2.7b 所示，把过原点方向为 v 的直线作为旋转轴（ v 为一单位矢量）。这时规定旋量的节距为 ∞ ，大小为沿 v 方向的移动量。综上所述，旋量运动定义如下。

定义 2.2 旋量运动

旋量包括轴 l 、节距 h 及大小 M 。旋量运动表示绕轴 l 旋转 $M = \theta$ 再沿与 l 平行的方向移动 $h\theta$ 。如果 $h = \infty$ ，那么相应的旋量运动即为沿旋转轴移动距离为 M 的平动。

为计算与旋量对应的刚体变换，先分析点 $p \in \mathbb{R}^3$ 的运动，如图 2.8 所示。 p 点最终位置坐标由下式给出

$$gp = q + e^{\hat{\omega}\theta}(p - q) + h\theta\omega$$

或用齐次坐标表示为

$$g \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\hat{\omega}\theta} & (I - e^{\hat{\omega}\theta})q + h\theta\omega \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix}$$

因上式对任意的 $p \in \mathbb{R}^3$ 都要成立，

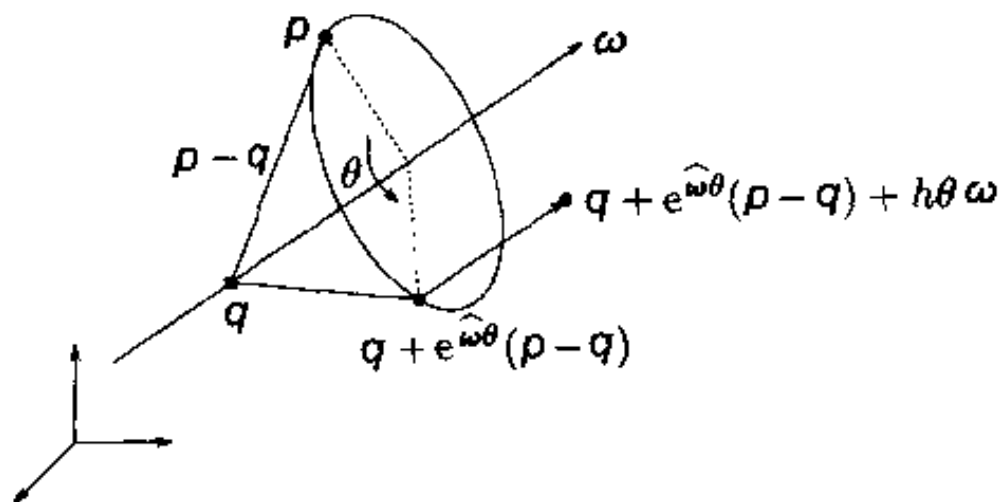


图 2.8 广义旋量运动（非零旋转）

所以用旋量表示的刚体运动为

$$g = \begin{bmatrix} e^{\hat{\omega}\theta} & (I - e^{\hat{\omega}\theta})q + h\theta\omega \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

最后一节中将说明式 (2.40) 是将刚体上的点由起始坐标 ($\theta=0$) 变换到最终坐标的变换, 并且所有点均相对于固定坐标系描述。

需要指出的是: 由式 (2.40) 所确定的刚体位移与式 (2.36) 表示的运动旋量的矩阵指数具有相同的形式:

$$e^{\hat{\xi}\theta} = \begin{bmatrix} e^{\hat{\omega}\theta} & (I - e^{\hat{\omega}\theta})(\omega \times v) + \omega\omega^T v\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

事实上, 如果取 $v = -\omega \times q + h\omega$, 那么 $\xi = (v, \omega)$ 即产生式 (2.40) 的旋量运动 (假定 $\|\omega\| = 1, \theta \neq 0$)。在纯转动情况, $h=0$ 且与旋量运动有关的运动旋量将简化为 $\xi = (-\omega \times q, \omega)$ 。而在纯移动情况, 若设 θ 为移动量, 则由旋量表示的刚体运动为

$$g = \begin{bmatrix} I & \theta v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

上式即为当 $\xi = (v, 0)$ 时由 $\exp(\xi\theta)$ 产生的运动。由此可以认为, 与定常运动旋量对应的旋量运动等于旋量的大小。

实际上可以进一步定义与每一运动旋量相关的旋量。若 $\hat{\xi} \in \mathfrak{se}(3)$ 为与运动旋量坐标 $\xi = (v, \omega) \in \mathfrak{R}^6$ 对应的旋量, 且不假定 $\|\omega\| = 1$, 即允许移动加转动及纯移动这两种情况, 则旋量的运动旋量坐标如下

1. 节距:

$$h = \frac{\omega^T v}{\|\omega\|^2} \quad (2.42)$$

旋量的节距是平动与转动的比值。若 $\omega=0$, 则认为 ξ 是无穷大节距。

2. 轴:

$$l = \begin{cases} \left\{ \frac{\omega \times v}{\|\omega\|^2} + \lambda\omega; \lambda \in \mathfrak{R} \right\}, & \text{若 } \omega \neq 0 \\ \{0 + \lambda v; \lambda \in \mathfrak{R}\}, & \text{若 } \omega = 0 \end{cases} \quad (2.43)$$

轴 l 为过一点的有向线。当 $\omega \neq 0$ 时, 此轴是过点 $\frac{\omega \times v}{\|\omega\|^2}$ 与 ω 同向的直线; 当 $\omega = 0$ 时, 此轴是过原点与 v 同向的直线。

3. 大小:

$$M = \begin{cases} \|\omega\|, & \text{若 } \omega \neq 0 \\ \|v\|, & \text{若 } \omega = 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

如果刚体运动含有旋转分量, 则旋量的大小是指纯转动量。否则为纯移动量。若取 $\|\omega\| = 1$ (或当 $\omega=0$ 时取 $\|v\| = 1$), 那么旋量 $\hat{\xi}\theta$ 的大小为 $M = \theta$ 。

下面将说明对于给定的旋量, 可以定义一个实现该旋量运动并具有特定几何属性的运动旋量。这就足以证明可以定义具有给定属性的旋量, 因为任何具有这些属性的运动旋量都将产生相应的旋量运动。

定理 2.10 旋量运动与旋量是一一对应的

对于给定的旋量, 其轴为 l 、节距为 h 、大小为 M , 则存在单位旋量 ξ , 使得与该旋量

有关的刚体运动由运动旋量 $M\xi$ 产生。

证明：该证明由构造得到。将证明分为通常的两种情况：纯移动及移动加旋转。为便于一致，引入形如 $\hat{\xi}\theta$ 的旋量，其中 $\theta = M$ 。假定 q 为旋量轴上的一点。

情况 1 ($h = \infty$)。设 $l = \{q + \lambda v : \|v\| = 1, \lambda \in \mathcal{R}\}$, $\theta = M$, 并定义

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则刚体运动 $\exp(\hat{\xi}\theta)$ 对应于沿旋转轴移动 θ 的纯移动。

情况 2 (h 为有限值)。设 $l = \{q + \lambda\omega : \|\omega\| = 1, \lambda \in \mathcal{R}\}$, $\theta = M$, 并定义

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & -\omega \times q + h\omega \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则通过直接计算即可证明刚体运动 $\exp(\hat{\xi}\theta)$ 就是旋量运动。

下面是几种经常遇到的特殊旋量运动：1) 零节距旋量，它表示 $h = 0$ 、刚体绕轴作纯转动的旋量运动。零节距旋量可用于描述机器人中的转动关节，旋量轴即为转动关节的旋转轴。2) 无穷大节距旋量，如上所述它是当 $h = \infty$ 时的纯移动，可用于描述移动关节，此时旋量轴是过原点并指向移动方向的有向直线（经过其它任意点的直线也可以），旋量的大小即为移动量。3) 单位旋量，它是 $\|\omega\| = 1$ 或 $\omega = 0$ 且 $\|v\| = 1$ 的旋量，即单位旋量的大小为 $M = 1$ 。单位旋量是很有用的，因为这样可以把转动关节和移动关节的刚体运动描述为 $g = \exp(\hat{\xi}\theta)$ ，其中 θ 相应于转动量或移动量。

对于上述公式中旋量轴上的点 q 应作一些说明。例如，应注意当选择旋量轴上的不同点时，公式并不改变。因此，若 $q' = q + \lambda\omega$ 为旋量轴上的另一点，式 (2.40) 将不会改变。可以验证旋量轴上各点对应的旋量运动是大小为 $h\theta$ 的纯移动，因而式 (2.40) 也适用于旋量轴上各点。

旋量的几何含义在下列定理中有简要说明，而且其证明也可以直接由旋量属性的定义导出。

定理 2.11 (Chasles 定理) 任意刚体运动均可通过绕一轴的转动加上平行于该轴的移动实现。

如前所述，运动旋量的指数表示刚体的相对运动。作为一个变换， $\exp(\hat{\xi}\theta)$ 表示将点由起始坐标 $p(0) \in \mathcal{R}^3$ 变换到经刚体运动后的坐标

$$p(\theta) = e^{\hat{\xi}\theta} p(0)$$

其中 $p(0)$ 和 $p(\theta)$ 均在同一坐标系中表示。如果 B 系固连在刚体上，经旋量运动后， B 系相对于固定的 A 系的瞬时位形为

$$g_{ab}(\theta) = e^{\hat{\xi}\theta} g_{ab}(0) \quad (2.45)$$

该变换的意义如下：乘上 $g_{ab}(0)$ 表示将一点相对于 B 系的坐标变换为相对于

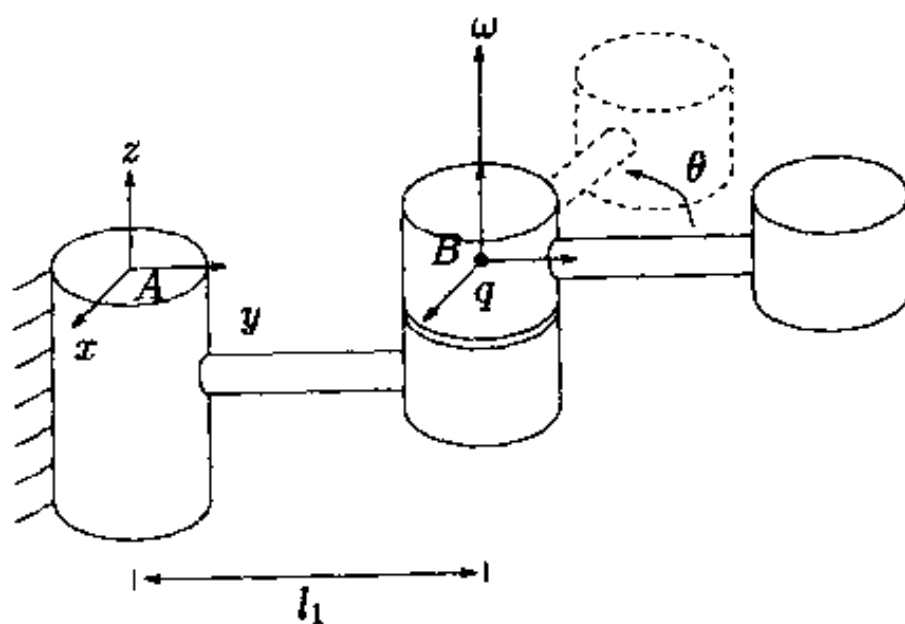


图 2.9 绕固定轴旋转的刚体运动

A 系的坐标, 而指数变换则是将点变换到最终位置 (仍在 A 系中)。

例 2.3 绕直线的转动

图 2.9 所示为绕空间固定轴旋转的刚体运动。该运动对应于以经过点 $\mathbf{q} = (0, l_1, 0)$ 的矢量 $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, 1)$ 为轴的零节距旋量。相应的运动旋量为

$$\xi = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = [l_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$$

其矩阵指数形式为

$$e^{\xi\theta} = \begin{bmatrix} e^{\hat{\boldsymbol{\omega}}\theta} & (\mathbf{I} - e^{\hat{\boldsymbol{\omega}}\theta})(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & l_1\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & l_1(1-\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

当用齐次坐标来描述一点时, 该矩阵给出了刚体上一点相对于 A 系 ($\theta=0$) 的起始坐标到该点绕轴旋转 θ 角后的坐标之间的变换。

将点在 B 系中的坐标变换到 A 系中的坐标的刚体变换 (也描述了刚体的位形) 为 $g_{ab}(\theta) = \exp(\xi\theta)g_{ab}(0)$, 其中

$$g_{ab}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & [0 \quad l_1 \quad 0]^T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

采用指数形式并进行矩阵相乘即得

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4 刚体速度

本节将导出以时间 t 为参数属于 $SE(3)$ 的刚体运动 $g(t)$ 对应的刚体速度公式。显然该问题与单质点运动 $\mathbf{q}(t) \in \mathcal{R}^3$ 、质点的速度为 $\mathbf{v}_q(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{q}(t)$ 的情况不同, 由于 $SE(3)$ 不是欧氏空间, 这种单质点的速度表示不能加以推广。特别是 $\dot{g}(t) \in SE(3)$ 且 $\dot{g}(t) \in se(3)$, 所以在处理转动与移动速度问题时要谨慎。下面说明如何利用运动旋量来描述刚体速度。

4.1 转动速度

首先考虑 $\mathcal{R}^3$ 中的纯转动情况。设 $\mathbf{R}_{ab}(t) \in SO(3)$ 为表示物体坐标系 B 运动轨迹的曲线, B 系与固定的 A 系共原点并绕 A 系旋转。称 A 系为空间坐标系[⊖], B 系为物体坐标系。刚体上任一点 $\mathbf{q}$ 在空间坐标系中的运动轨迹为

$$\mathbf{q}_a(t) = \mathbf{R}_{ab}(t)\mathbf{q}_b$$

⊖ “空间”一词有时用于区别二维平面运动和三维一般(空间)运动, 本章空间一词是指“相对于固定(惯性)坐标系”。

其中坐标 q_b 在物体坐标系中是固定不变的。该点在空间坐标系中的速度为

$$v_{qa}(t) = \frac{d}{dt} q_a(t) = \dot{R}_{ab}(t) q_b \quad (2.46)$$

因此, $\dot{R}_{ab}$ 将一点的刚体坐标变换为该点的空间速度。转动速度的这种表示有时并不有效, 这是因为它要用九个参数来描述旋转刚体的速度。利用矩阵 $\dot{R}_{ab}$ 的特殊结构可以导出更为简洁的表示。为此将式 (2.46) 改写为

$$v_{qa}(t) = \dot{R}_{ab}(t) R_{ab}^{-1}(t) R_{ab}(t) q_b \quad (2.47)$$

由下面的引理可知 $\dot{R}_{ab}(t) R_{ab}^{-1}(t) \in so(3)$, 即它是反对称的。

引理 2.12 对于给定的 $R(t) \in SO(3)$, 则 $\dot{R}(t) R^{-1}(t) \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ 和 $R^{-1}(t) \dot{R}(t) \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ 均为反对称阵。

证明: 对单位矩阵

$$R(t) R(t)^T = I$$

进行微分, 并略去参数 t , 有

$$\dot{R} R^T + R \dot{R}^T = 0$$

所以

$$\dot{R} R^T = -R \dot{R}^T$$

即 $\dot{R} R^{-1} = \dot{R} R^T$ 是反对称矩阵。通过对 $R^T R = I$ 的微分可以证明 $R^{-1} \dot{R}$ 也是反对称矩阵。

引理 2.12 说明用三维矢量即可表示旋转速度。为此定义瞬时空间角速度 $\hat{\omega}_{ab}^s \in \mathfrak{R}^3$ 为

$$\hat{\omega}_{ab}^s := \dot{R}_{ab} R_{ab}^{-1} \quad (2.48)$$

矢量 ω_{ab}^s 为物体相对于空间坐标系 A 的瞬时角速度。同样, 可以定义瞬时物体角速度 $\omega_{ab}^b \in \mathfrak{R}^3$ 为

$$\hat{\omega}_{ab}^b := R_{ab}^{-1} \dot{R}_{ab} \quad (2.49)$$

它描述的是相对于瞬时物体坐标系 B 的角速度。由以上两式可得两种角速度之间的关系

$$\hat{\omega}_{ab}^b = R_{ab}^{-1} \hat{\omega}_{ab}^s R_{ab} \text{ 或 } \omega_{ab}^b = R_{ab}^{-1} \omega_{ab}^s \quad (2.50)$$

因此, 物体角速度即为将角速度矢量旋转到瞬时物体坐标系而得到的空间角速度。

现在, 再看一下式 (2.47), 可以用物体的瞬时角速度来表示一点的速度。将式 (2.48) 代入式 (2.47) 得

$$v_{qa}(t) = \hat{\omega}_{ab}^s R_{ab}(t) q_b = \omega_{ab}^s(t) \times q_a(t) \quad (2.51)$$

再利用式 (2.50), 可得物体坐标系中一点的速度为

$$v_{qb}(t) := R_{ab}^T(t) v_{qa}(t) = \omega_{ab}^b(t) \times q_b \quad (2.52)$$

式 (2.51) 和式 (2.52) 即为用物体和空间角速度 ω_{ab}^b 和 ω_{ab}^s 来表示物体速度的简洁形式。

例 2.4 单自由度机器人的旋转运动

图 2.10 所示为一单自由度机器人的运动。若 $\theta(t)$ 为绕某参考位形的旋转角度, 而机器人的运动轨迹为

$$R(t) = \begin{bmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

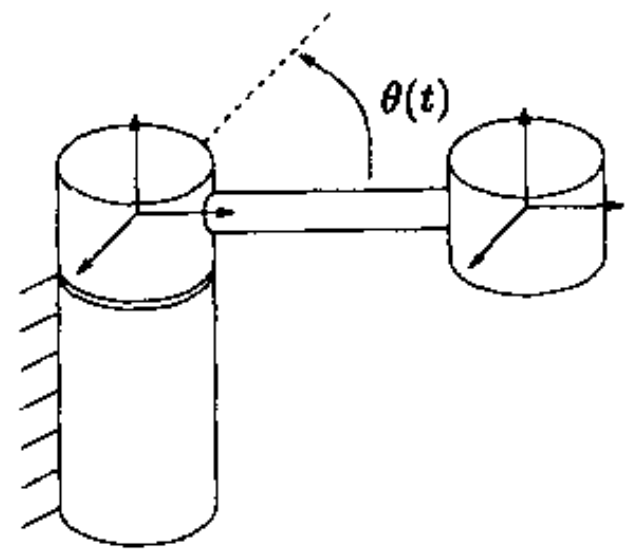


图 2.10 单自由度机器人的旋转运动

空间速度为

$$\hat{\omega}^i = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}\sin\theta & -\dot{\theta}\cos\theta & 0 \\ \dot{\theta}\cos\theta & -\dot{\theta}\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此

$$\omega^i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

物体速度为

$$\hat{\omega}^b = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \omega^b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

4.2 刚体速度

现在考虑刚体运动轨迹为单参数曲线 $g_{ab}(t) \in SE(3)$ 的一般情况，特别是与刚体相联的坐标系 B 相对于固定或惯性坐标系的刚体运动。虽然绕自身坐标系的旋转 $\dot{g}_{ab}(t)$ 并没有特别的用处，但 $\dot{g}_{ab}g_{ab}^{-1}$ 和 $g_{ab}^{-1}\dot{g}_{ab}$ 却有特别的意义。由于

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ab}(t) & \mathbf{p}_{ab}(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可得

$$\dot{g}_{ab}g_{ab}^{-1} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}_{ab} & \dot{\mathbf{p}}_{ab} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ab}^T & -\mathbf{R}_{ab}^T\mathbf{p}_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}_{ab}\mathbf{R}_{ab}^T & -\dot{\mathbf{R}}_{ab}\mathbf{R}_{ab}^T\mathbf{p}_{ab} + \dot{\mathbf{p}}_{ab} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

上式在形式上与运动旋量相似。通过与旋转速度的类比，将空间速度 $\hat{\mathbf{V}}_{ab}^s \in se(3)$ 定义为

$$\mathbf{V}_{ab}^s = \dot{g}_{ab}g_{ab}^{-1} \quad \mathbf{V}_{ab}^s = \begin{bmatrix} v_{ab}^s \\ \omega_{ab}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{R}}_{ab}\mathbf{R}_{ab}^T\mathbf{p}_{ab} + \dot{\mathbf{p}}_{ab} \\ (\dot{\mathbf{R}}_{ab}\mathbf{R}_{ab}^T)^\vee \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

空间速度 $\hat{\mathbf{V}}_{ab}^s$ 可以用来求解空间坐标系中一点的速度。在空间坐标系中，固联在刚体上的一点 q 的坐标为

$$\mathbf{q}_a(t) = g_{ab}(t)\mathbf{q}_b$$

两边微分得

$$\mathbf{v}_{q_a} = \dot{\mathbf{q}}_a = \dot{g}_{ab}\mathbf{q}_b = \dot{g}_{ab}g_{ab}^{-1}\mathbf{q}_a$$

因此

$$\mathbf{v}_{q_a} = \hat{\mathbf{V}}_{ab}^s \mathbf{q}_a = \omega_{ab}^s \times \mathbf{q}_a + v_{ab}^s \quad (2.54)$$

刚体运动的空间速度分量有时并不直观。转动分量 ω_{ab}^s 是在空间坐标系中表示的刚体瞬时角速度；移动分量 v_{ab}^s 并不是刚体坐标系原点的速度（由式 (2.53) 可以看出），而 $v_{ab}^s(t)$ 却是刚体上一点在 t 时刻经过空间坐标系原点时（可能是想象的）的速度。即，如果一个人站在空间坐标系的原点处去测量刚体上正好经过原点的一点的瞬时速度，那么该瞬时速度即为 $v_{ab}^s(t)$ 。

利用上一节关于运动旋量与旋量的关系，将能得到关于空间速度含义的更贴切的解释：

与运动旋量 $\hat{V}_{ab}^s$ 相对应的旋量给出了物体相对于空间坐标系运动的瞬时转动轴、节距及大小。

刚体速度也可以相对于（瞬时）物体坐标系表示。为此刚体运动 $g_{ab}(t) \in SE(3)$ 的速度可定义为

$$\hat{V}_{ab}^b = g_{ab}^{-1} \dot{g}_{ab} = \begin{bmatrix} R_{ab}^T \dot{R}_{ab} & R_{ab}^T \dot{p}_{ab} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad V_{ab}^b = \begin{bmatrix} v_{ab}^b \\ \omega_{ab}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ab}^T \dot{p}_{ab} \\ (R_{ab}^T \dot{R}_{ab})^\vee \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

物体坐标系中点的速度为

$$v_{q_a} = g_{ab}^{-1} v_{q_a} = g_{ab}^{-1} \dot{g}_{ab} q_b = \hat{V}_{ab}^b(t) q_b$$

因此， $\hat{V}_{ab}^b$ 的作用是将一点 q_b 的物体坐标返回为物体坐标系中描述的该点的速度 v_{q_b} ：

$$v_{q_b} = \hat{V}_{ab}^b q_b = \omega_{ab}^b \times q_b + v_{ab}^b \quad (2.56)$$

物体速度的含义是显而易见的： v_{ab}^b 是物体坐标系原点相对于空间坐标系的速度在当前物体坐标系中的表示， ω_{ab}^b 也是在当前物体坐标系中表示的坐标系角速度。需要指出的是，物体速度并不是物体相对于物体坐标系的速度（后者的速度总是为零）。

通过相似变换可找出刚体运动的空间速度与物体速度之间的关系。为计算这个关系，注意到

$$\dot{V}_{ab}^s = \dot{g}_{ab} g_{ab}^{-1} = g_{ab} (g_{ab}^{-1} \dot{g}_{ab}) g_{ab}^{-1} = g_{ab} \hat{V}_{ab}^b g_{ab}^{-1}$$

经代换可得

$$\begin{aligned} \omega_{ab}^s &= R_{ab} \omega_{ab}^b \\ v_{ab}^s &= -\omega_{ab}^s \times p_{ab} + \dot{p}_{ab} = p_{ab} \times (R_{ab} \omega_{ab}^b) + R_{ab} v_{ab}^b \end{aligned}$$

任何情形下，都可将上述关系综合为

$$V_{ab}^s = \begin{bmatrix} v_{ab}^s \\ \omega_{ab}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ab} & \hat{p}_{ab} R_{ab} \\ 0 & R_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ab}^b \\ \omega_{ab}^b \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

上述将运动旋量由一个坐标系变换到另一坐标系的 6×6 矩阵称为关于 g 的伴随变换 (adjoint transformation)，记为 Ad_g 。因此，对于给定的两坐标系之间的变换 $g \in SE(3)$ ， $\text{Ad}_g: \mathfrak{R}^6 \rightarrow \mathfrak{R}^6$ 为

$$\boxed{\text{Ad}_g = \begin{bmatrix} R & \hat{p}R \\ 0 & R \end{bmatrix}} \quad (2.58)$$

结合前面的计算，可以看出 Ad_g 描绘了物体速度运动旋量坐标到空间速度运动旋量坐标之间的转换。 Ad_g 是可逆的，其逆阵为（见习题 14）

$$\text{Ad}_g^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -(R^T p)^\wedge R^T \\ 0 & R^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T \hat{p} \\ 0 & R^T \end{bmatrix} = \text{Ad}_g^{-1}$$

本书中将经常用到伴随变换。由前面的计算可得与刚体变换 $g \in SE(3)$ 伴随的下列有用特性。

引理 2.13 若 $\hat{\xi} \in se(3)$ 是坐标为 $\xi \in \mathfrak{R}^6$ 的运动旋量，则对于任意的 $g \in SE(3)$ ， $g \hat{\xi} g^{-1}$ 是运动旋量坐标为 $\text{Ad}_g \xi \in \mathfrak{R}^6$ 的运动旋量。

若速度的定义不明确参考系，则比较方便。对于位形为 $g \in SE(3)$ 的刚体运动，空间速度定义为

$$\hat{V}^s = \dot{g}g^{-1} \quad V^s = \begin{bmatrix} v^s \\ \omega^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{R}R^T p + \dot{p} \\ (\dot{R}R^T)^V \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

物体速度定义为

$$\hat{V}^b = g^{-1}\dot{g} \quad V^b = \begin{bmatrix} v^b \\ \omega^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^T \dot{p} \\ (R^T \dot{R})^V \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

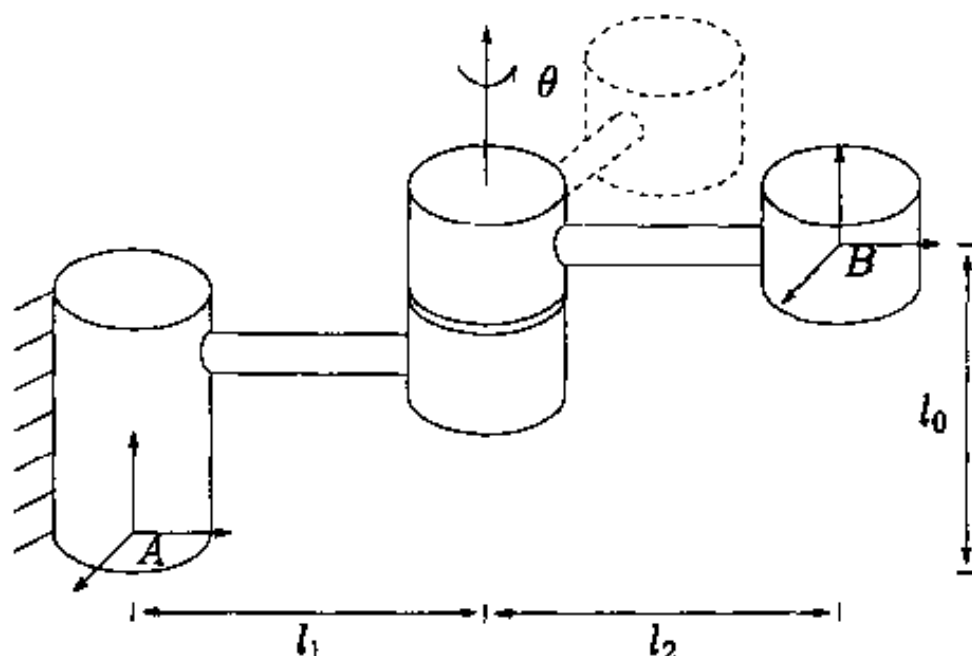


图 2.11 绕固定轴旋转的刚体运动

物体速度与空间速度通过伴随变换相联系

$$V^s = \text{Ad}_g V^b \quad (2.61)$$

例 2.5 单自由度机器人

图 2.11 所示为单自由度机器人, B 坐标系相对于 A 坐标系的位形为

$$g(t) = \begin{bmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 & -l_2\sin\theta(t) \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 & l_1 + l_2\cos\theta(t) \\ 0 & 0 & 1 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这里为了简便, 省略了所有下标。旋转刚体的空间速度为

$$V^s = \begin{bmatrix} v^s \\ \omega^s \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} v^s &= -\dot{R}R^T p + \dot{p} \\ \omega^s &= (\dot{R}R^T)^V \end{aligned}$$

利用前面实例中关于 ω^s 的计算, 可得

$$v^s = \begin{bmatrix} l_1 \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \omega^s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

严格地说, 这里的 v^s 是物体上与坐标系 A 原点重合的一点的速度。

物体速度为

$$V^b = \begin{bmatrix} v^b \\ \omega^b \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} v^b &= R^T \dot{p} \\ \omega^b &= (R^T \dot{R})^V \end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{v}^b = \begin{bmatrix} -l_2 \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\omega}^b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

物体速度可以理解为 B 坐标系的原点在 B 坐标系中的速度。因此,线速度总是沿 $-x$ 方向,角速度总是与 z 同向。而线速度的大小则取决于连接 B 坐标系与关节的连杆的长度。

4.3 旋量运动的速度

前一例子计算了在旋量 $\exp(\hat{\xi}\theta)$ 作用下所产生的刚体运动的空间速度。由前节的例 2.3 可以看出,空间速度 $\mathbf{V}^s$ 与 $\dot{\theta}=1$ 时的 $\hat{\xi}$ 是相同的。考虑更一般的情况

$$g_{ab}(\theta) = e^{\hat{\xi}\theta} g_{ab}(0)$$

表示 B 系相对于 A 系的位形。对于定常运动旋量 $\hat{\xi}$, 有 (见习题 8)

$$\frac{d}{dt}(e^{\hat{\xi}\theta}) = \hat{\xi}\dot{\theta}e^{\hat{\xi}\theta}$$

刚体运动的空间速度为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{V}}_{ab}^s &= \dot{g}_{ab}(\theta) g_{ab}^{-1}(\theta) = \\ &= (\hat{\xi}\dot{\theta}e^{\hat{\xi}\theta} g_{ab}(0)) (g_{ab}^{-1}(0)e^{-\hat{\xi}\theta}) = \\ &= \hat{\xi}\dot{\theta} \end{aligned}$$

因此,对应于该运动的空间速度即为由旋量产生的速度。

旋量运动的刚体速度计算与此类似:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{V}}_{ab}^s &= g_{ab}^{-1}(\theta) \dot{g}_{ab}(\theta) = \\ &= (g_{ab}^{-1}(0)e^{-\hat{\xi}\theta}) (\hat{\xi}\dot{\theta}e^{\hat{\xi}\theta} g_{ab}(0)) = \\ &= (g_{ab}^{-1}(0)\hat{\xi}g_{ab}(0))\dot{\theta} = (\text{Ad}_{g_{ab}^{-1}(0)}\hat{\xi})^{\wedge}\dot{\theta} \end{aligned}$$

当 $\dot{\theta}=1$ 时, $\hat{\mathbf{V}}_{ab}^s$ 为动坐标系中的定常矢量。物体速度运动旋量的方向由刚体初始位形 $g_{ab}^{-1}(0)$ 对应的伴随变换决定。特殊情况当 $g_{ab}(0) = \mathbf{I}$ 时 (即物体坐标系与空间坐标系重合于 $\theta=0$), 那么有 $\mathbf{V}_{ab}^s = \mathbf{V}_{ab}^b = \hat{\xi}\dot{\theta}$, 其中 $\hat{\xi}$ 是产生旋量运动的定常运动旋量。

4.4 坐标变换

如同可通过刚体变换的组合, 由给定的 $g_{ab}, g_{bc} \in SE(3)$ 求 $g_{ac} \in SE(3)$ 一样, 如果给定第一个坐标系相对于第二个坐标系的速度及第二坐标系相对于第三坐标系的速度, 那么也可以确定第一坐标系相对于第三坐标系的速度。下面将以定理形式给出有关主要结论。

定理 2.14 空间速度的变换

设有 A 、 B 、 C 三个坐标系, 各坐标系中的空间速度存在下列关系

$$\mathbf{V}_{ac}^s = \mathbf{V}_{ab}^s + \text{Ad}_{g_{ab}} \mathbf{V}_{bc}^s$$

证明: C 坐标系相对于 A 坐标系的位形为

$$g_{ac} = g_{ab}g_{bc}$$

由定义及有关规则得

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{V}}_{ac}^s &= \dot{g}_{ac} g_{ac}^{-1} = \\ &= (\dot{g}_{ab}g_{bc} + g_{ab}\dot{g}_{bc})(g_{bc}^{-1}g_{ab}^{-1}) = \end{aligned}$$

$$\dot{g}_{ab}g_{ab}^{-1} + g_{ab}(\dot{g}_{bc}g_{bc}^{-1})g_{ab}^{-1} = \hat{V}_{ab}^s + g_{ab}\hat{V}_{bc}^s g_{ab}^{-1}$$

将上式变为运动旋量坐标形式

$$V_{ac}^s = V_{ab}^s + \text{Ad}_{g_{ab}} V_{bc}^s$$

定理 2.15 物体速度的变换

设有 A、B、C 三个坐标系，各坐标系中的相对物体速度存在下列关系

$$V_{ac}^b = \text{Ad}_{g_{ab}} V_{bc}^b + V_{bc}^b$$

证明：证明方法同上。

定理 2.14 和定理 2.15 可用于实现刚体速度在不同坐标系之间的变换。通常，其中两个坐标系之间的相互位置是固定的，从而速度关系可以简化。例如，如果 A 和 B 是两个惯性坐标系，它们之间的相对位置固定不变，那么 C 坐标系的空间速度满足

$$V_{ac}^s = \text{Ad}_{g_{ab}} V_{bc}^s \quad (2.62)$$

相应的物体速度关系为

$$V_{ac}^b = V_{bc}^b \quad (2.63)$$

这是因为物体速度与所度量的相对惯性坐标系无关。

由定理 2.14 和定理 2.15 给定的变换原则也可用于定常运动螺旋，例如可用于表示转动关节和移动关节。若 ξ 为表示旋量运动的运动旋量，并通过施加一刚体运动 $g \in \text{SE}(3)$ 使运动旋量运动，则由式 (2.62) 可得一新的运动旋量。可以认为 g 是一个固定的刚体运动，并且与空间速度矢量 ξ 相等。此时 $\dot{g} = 0$ ，因此

$$\xi' = \text{Ad}_g \xi \quad \text{或} \quad \hat{\xi}' = g \xi g^{-1} \quad (2.64)$$

上式在后续的章节中非常重要，并且必须注意运动中不同的运动旋量轴与机器人关节的对应关系。

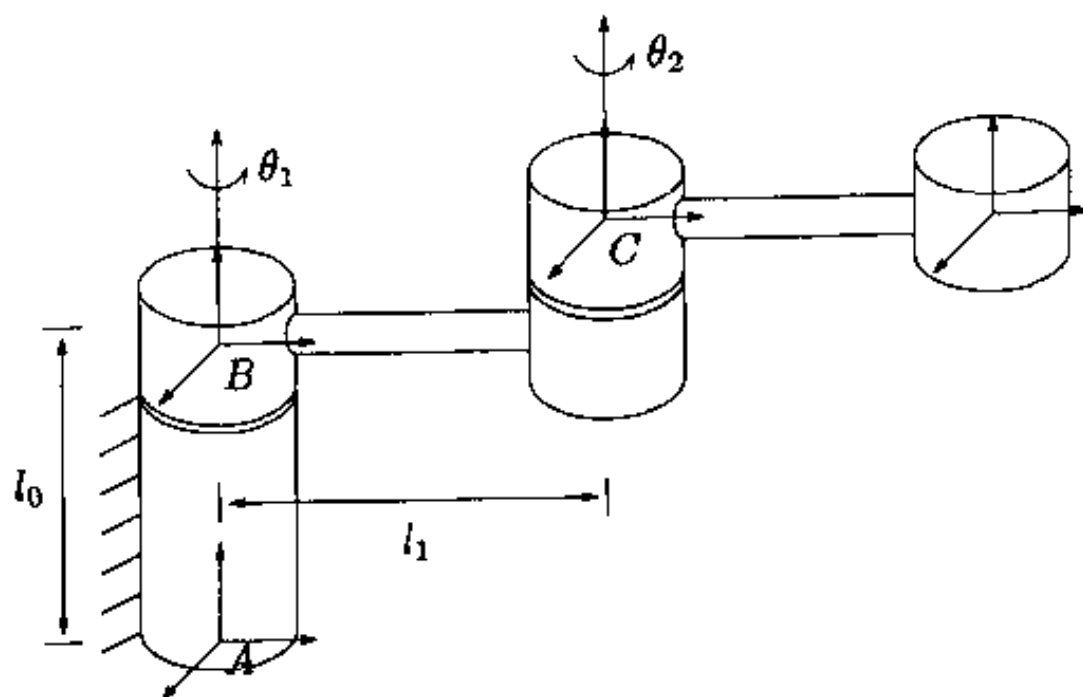


图 2.12 两自由度机器人

例 2.6 两杆机构的速度

对于图 2.12 所示两自由度机器人。已知关节速度 $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2 \in \mathbb{R}$ ，求坐标系 C 相对于坐标

系 A 的速度。由于每个运动均为旋量运动，所以有

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{ab}^s &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{ab} \\ \boldsymbol{\omega}_{ab} \end{bmatrix} \dot{\theta}_1 & \mathbf{v}_{ab} &= [0 \quad 0 \quad 0]^T & \boldsymbol{\omega}_{ab} &= [0 \quad 0 \quad 1]^T \\ \mathbf{V}_{bc}^s &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{bc} \\ \boldsymbol{\omega}_{bc} \end{bmatrix} \dot{\theta}_2 & \mathbf{v}_{bc} &= [l_1 \quad 0 \quad 0]^T & \boldsymbol{\omega}_{bc} &= [0 \quad 0 \quad 1]^T \end{aligned}$$

$\text{Ad}_{g_{ab}}$ 的计算为

$$\text{Ad}_{g_{ab}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ab} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_0 \end{bmatrix}^\wedge \mathbf{R}_{ab} \\ 0 & \mathbf{R}_{ab} \end{bmatrix}$$

由定理 2.14 可得

$$\mathbf{V}_{ac}^s = \mathbf{V}_{ab}^s + \text{Ad}_{g_{ab}} \mathbf{V}_{bc}^s = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \dot{\theta}_1 + [l_1 \cos \theta_1 \quad l_1 \sin \theta_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \dot{\theta}_2$$

需注意速度由两项组成，每一项对应于一个关节它们按线性叠加组合在一起。

引理 2.16 刚体速度的同一性

利用前面给出的关于一个坐标系相对于另一坐标系的速度的表示，有下列关系成立：

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{ab}^b &= -\mathbf{V}_{ba}^a \\ \mathbf{V}_{ab}^b &= -\text{Ad}_{g_{ba}} \mathbf{V}_{ba}^a \end{aligned}$$

5 力旋量和对偶旋量

本节同时考虑作用于刚体上的力和力矩，并由此引入旋量系和对偶旋量的概念。

5.1 力旋量

作用在刚体上的广义力包括移动分量（纯力）和作用于一点的转动分量（纯力矩）。该广义力可用一个六维矢量表示：

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ll} \mathbf{f} \in \mathbb{R}^3 & \text{移动分量} \\ \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^3 & \text{转动分量} \end{array}$$

称力/力矩的组合为力旋量。

力旋量矢量 $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^6$ 的值与表示力和力矩的坐标系有关。若 B 为与刚体固定的坐标系，则作用于 B 坐标系原点的力旋量记为 $\mathbf{F}_b = (\mathbf{f}_b, \boldsymbol{\tau}_b)$ ，其中 $\mathbf{f}_b$ 和 $\boldsymbol{\tau}_b$ 均在坐标系 B 中描述。

力旋量与运动旋量的自然组合即可定义瞬时功。考虑刚体运动 $g_{ab}(t)$ ，其中 A 是惯性坐标系， B 是刚体坐标系。设 $\mathbf{V}_{ab}^b \in \mathbb{R}^6$ 表示刚体瞬时速度， $\mathbf{F}_b$ 表示施加的力旋量。这两个量都在 B 坐标系中描述，它们的点积是无穷小量功

$$\delta W = \mathbf{V}_{ab}^b \cdot \mathbf{F}_b = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f} + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\tau})$$

由力旋量 $\mathbf{F}_b$ 在时间间隔 $[t_1, t_2]$ 内经运动旋量 $\mathbf{V}_{ab}^b$ 产生的纯功为

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{V}_{ab}^b \cdot \mathbf{F}_b dt$$

如果两个力旋量对于任何可能的刚体运动所作之功相等, 则称它们等价。等价力旋量可以替代作用在异点的给定力旋量 (相对于不同的坐标系)。图 2.13 给出了这样的例子, 已知

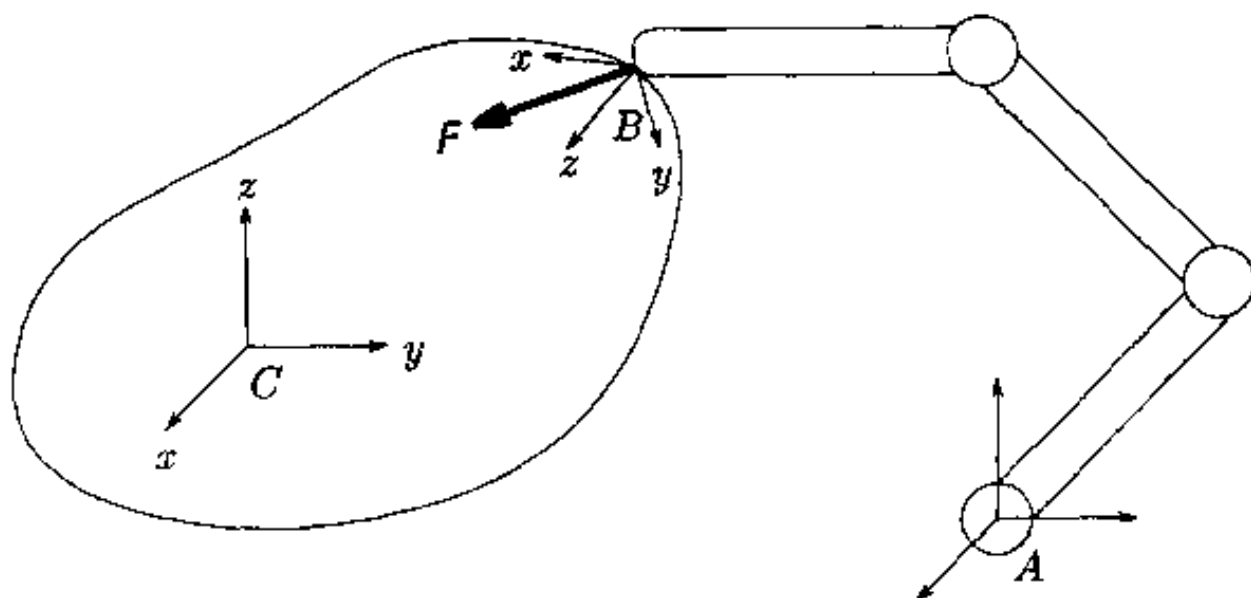


图 2.13 两坐标系间力旋量的变换

力旋量 F_b 作用于坐标系 B 的原点, 要求确定作用于物体坐标系 C 原点的等价力旋量。为计算该等价力旋量, 可利用刚体经任一运动时力旋量所作之瞬时功。若 $g_{bc} = (p_{bc}, R_{bc})$ 为坐标系 C 相对于 B 的位形, 并令力旋量 F_b 和 F_c 在一任意时间间隔内所作之瞬时功相等, 得

$$V_{ac}^b \cdot F_c = V_{ab}^b \cdot F_b = (\text{Ad}_{g_{bc}}^T V_{ac}^b)^T = V_{ac}^b \cdot \text{Ad}_{g_{bc}}^T F_b$$

由于 V_{ac}^b 是自由矢量, 所以

$$F_c = \text{Ad}_{g_{bc}}^T F_b \quad (2.65)$$

式 (2.65) 表示将作用于 B 坐标系原点的力旋量变换为作用于 C 坐标系原点的等价力旋量, 其中 F_c 的分量为相对于 C 坐标系。将式 (2.65) 展开得

$$\begin{bmatrix} f_c \\ \tau_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{bc}^T & 0 \\ -R_{bc}^T \hat{p}_{bc} & R_{bc}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_b \\ \tau_b \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

注意到伴随变换将 B 坐标系中的力和力矩矢量旋转到了 C 坐标系, 并由力 f_b 和力臂 $-p_{bc}$ 产生了一个附加力矩 $-p_{bc} \times f_b$ 。

将力旋量表示在刚体之外的坐标系中也是可以的, 如图 2.13 中的坐标系 A。在 A 坐标系中力旋量 F 可表示为

$$F_a = \text{Ad}_{g_{ba}}^T F_b$$

该力旋量所表示的等价力/力矩对, 如同 A 坐标系固接在物体上。这与简单地将 F_b 的分量重写在 A 坐标系中是不同, 因为 F_a 的作用点是 A 坐标系的原点而非 B 坐标系的原点。

如果多个力旋量同时作用于一个刚体, 那么作用于刚体上的合力旋量可以通过力旋量矢量的叠加来构造。为使叠加有意义, 所有力旋量必须在同一坐标系中表示。这样, 对于给定的一组力旋量 F_i , 每个力旋量必须首先表示成同一坐标系中的等价力旋量, 然后将这些力旋量叠加以确定作用于刚体上的总力旋量。这有助于解释为什么等价力旋量需要转换坐标原点: 只有当力旋量表示的力和力矩作用在同一点时 (例如物体质心或固定坐标系) 才能相

加。

作用于位形为 $g_{ab} \in SE(3)$ 的刚体上的合力旋量 F 通常有两种表示方法。在动坐标系中力旋量记为 F_b ，它表示等效力和力矩作用于 B 坐标系的原点（在 B 坐标系中表示）。力旋量的固定坐标系表示是指在 A 坐标系中表示的等价力旋量。这些表示方法类似于刚体速度的固定坐标系表示或动坐标系表示。

借助于速度表示，可以很方便地给出固定和动坐标系中力旋量的表示，而无须明确指出给定的哪组坐标系。如果刚体的一个位形为 $g_{ab} \in SE(3)$ ，那么用 F_b 表示动坐标系中的力旋量，用 F_s 表示固定坐标系中的力旋量。这两个力旋量可通过下列伴随矩阵的变换来表示其关系

$$F^b = \text{Ad}_g^T F^s \quad (2.67)$$

上式说明力旋量 F 以瞬时速度 V （动坐标系中的速度或固定坐标系中的速度）运动刚体所作之瞬时功为

$$\delta W = V^b \cdot F^b = V^s \cdot F^s$$

其证明留作习题。

例 2.7 多指抓取

考虑图 2.14 所示多指抓取。设在 C_i 坐标系中表示的第 i 手指作用于被抓物体上的力旋量为 F_{ci} 。作用于动坐标系原点 O 的合力旋量为

$$F_o = \sum \text{Ad}_{g_{ci}}^T F_{ci}$$

这是确定抓取过程中手指与物体在接触点处作用力的基本关系。

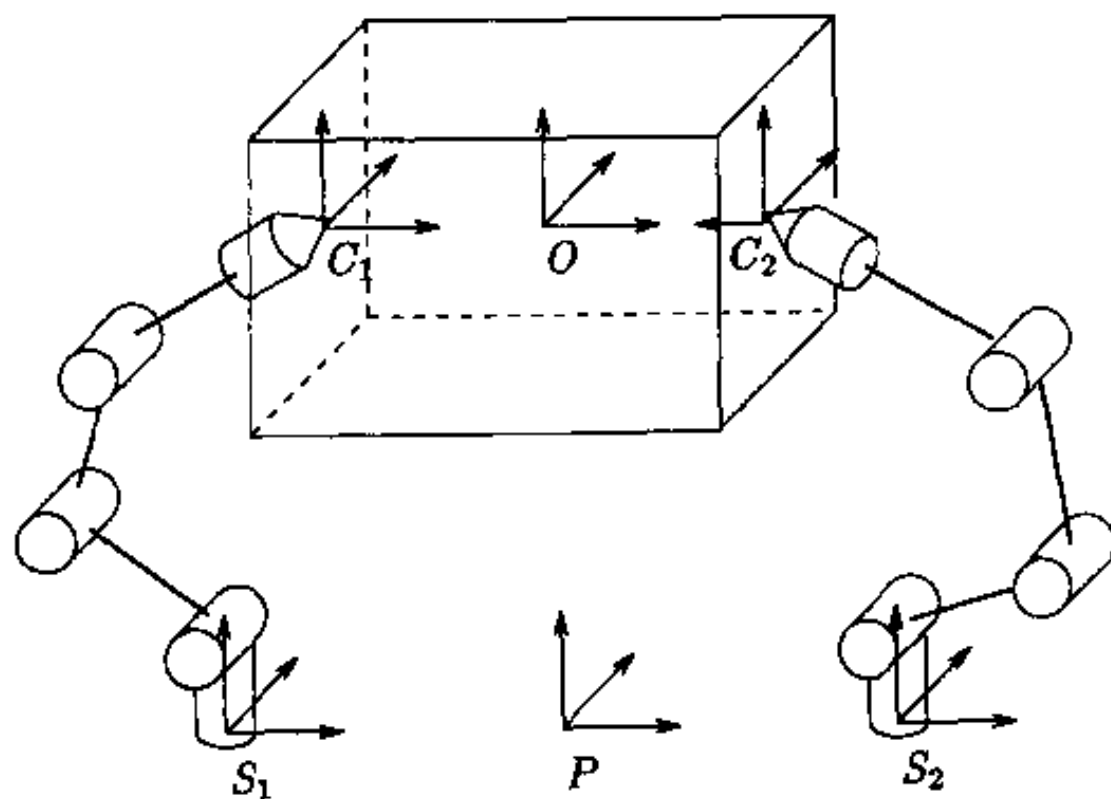


图 2.14 简单抓取中的坐标系示例

5.2 力旋量的旋量坐标

借助运动旋量，可以通过沿空间轴线施加一个力和一个关于该轴线的瞬时力矩来获得力旋量。根据 Chasles 定理的对偶性，任意运动旋量都可由旋量产生，这就是 Poinsot 定理。它说

明任意力旋量都等价于一个作用于同一轴线的力和力矩对。下面首先定义沿旋量作用的力旋量的表示。

在固定坐标系 A 中, 设 S 是轴线为 $l = \{q + \lambda\omega : \lambda \in \mathfrak{R}\}$, $\|\omega\| = 1$, 节距为 h , 大小为 M 的旋量。通过施加一个沿直线 l 、大小为 M 的力及关于该直线大小为 hM 的力矩来构造力旋量。若 $h = \infty$, 可通过施加关于 l 的纯力矩来获得力旋量。该力旋量在坐标系 A 中可表示为

$$\begin{aligned} F &= M \begin{bmatrix} \omega \\ -\omega \times q + h\omega \end{bmatrix} & h \text{ 为有限值时} \\ F &= M \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \end{bmatrix} & h = \infty \text{ 时} \end{aligned} \quad (2.68)$$

其中 $-\omega \times q$ 表示旋量轴线偏离坐标系 A 原点的距离。称 F 为沿旋量 S 的力旋量。由于 F (以及 q 和 ω) 是在固定坐标系 A 中描述的, 因此 F 表示作用于刚体上的空间力旋量 (这里省去了下标, 因为所有量都在同一坐标系中描述)。

为求力旋量的旋量坐标, 当给定 $F = (f, \tau)$ 时, 可由式 (2.68) 求得 ω , q , h 及 M 。由此得如下定理。

定理 2.17 (Poinsot)

作用于刚体上的任意力旋量组等价于一个沿固定轴线的力及一个关于该轴线的力矩。

证明: 此证明是构造性的。设 $F = (f, \tau)$ 为加于刚体上的合力旋量, 不考虑 $F = 0$ 的情况。

情况 1: ($f = 0$, 纯力矩)。令 $M = \|\tau\|$, $\omega = \tau/M$, $h = \infty$ 。式 (2.68) 说明它们就是旋量坐标。

情况 2: ($f \neq 0$)。令 $M = \|f\|$, $\omega = f/M$ 。由下式

$$M(q \times \omega + h\omega) = \tau$$

可求得 q 和 h 。一个解为

$$h = \frac{f^T \tau}{\|f\|^2} \quad q = \frac{f \times \tau}{\|f\|^2}$$

由于任意 $q' = q + \lambda\omega$ 都满足式 (2.68), 因而解并不唯一。

运用 Poisson 定理, 可以定义力旋量 $F = (f, \tau)$ 的旋量坐标:

1. 节距

$$h = \frac{f^T \tau}{\|f\|^2} \quad (2.69)$$

力旋量的节距为力矩与力之比。若 $f = 0$, 则称 F 的节距为无穷大。

2. 轴线

$$l = \begin{cases} \left\{ \frac{f \times \tau}{\|f\|^2} + \lambda f : \lambda \in \mathfrak{R} \right\}, & f \neq 0 \\ \{0 + \lambda \tau : \lambda \in \mathfrak{R}\}, & f = 0 \end{cases} \quad (2.70)$$

轴线 l 为经过一点的有向线。当 $f \neq 0$ 时, 此轴是过点 $q = f \times \tau / \|f\|^2$ 沿 f 方向的直线; 当 $f = 0$ 时, 此轴过坐标原点并沿 τ 方向。

3. 大小

$$M = \begin{cases} \|f\|, & f \neq 0 \\ \|\tau\|, & f = 0 \end{cases} \quad (2.71)$$

如果刚体运动含有移动分量时, 旋量的大小是指纯移动力, 否则为纯力矩。

由运动旋量和力旋量的旋量坐标可以看出它们的对偶关系。例如, 零节距的运动旋量与纯转动相对应, 而零节距的力旋量与纯力 (非转动分量) 相对应。

5.3 对偶旋量

运动旋量和力旋量的点积给出了刚体受力而运动所作之瞬时功, 前一小节讨论了在同一坐标系中的计算关系并省略了下标。如果瞬时功 $F \cdot V = 0$, 则称力旋量 F 与运动旋量 V 对偶 (reciprocal)。既然力旋量和运动旋量都可以用旋量表示, 由此可定义对偶旋量。

定义 2.3 对偶旋量

对于旋量 S_1, S_2 , 如果关于 S_1 的运动旋量 V 与关于 S_2 的力旋量 F 对偶, 则称该两旋量对偶。

通常对偶旋量可用旋量间的对偶积 (reciprocal product) 来定义。设旋量 S_i 的轴线为 $l_i = \{q_i + \lambda \omega_i : \lambda \in \mathbb{R}\}$, 节距为 h_i , 大小为 M_i 。对于给定的两个旋量 S_1, S_2 , 直线 l_1, l_2 之间的最小距离 (即为 l_1, l_2 公垂线的距离) 定义为两旋量的距离, 公垂线用 dn 表示, 其中 n 是单位矢量, 且 $d > 0$ 。矢量 ω_1 和 ω_2 间的夹角即为两旋量 S_1, S_2 间的夹角 α (见图 2.15)

$$\alpha = \arctan 2(\omega_1 \times \omega_2 \cdot n, \omega_1 \cdot \omega_2)$$

两旋量间的对偶积定义为

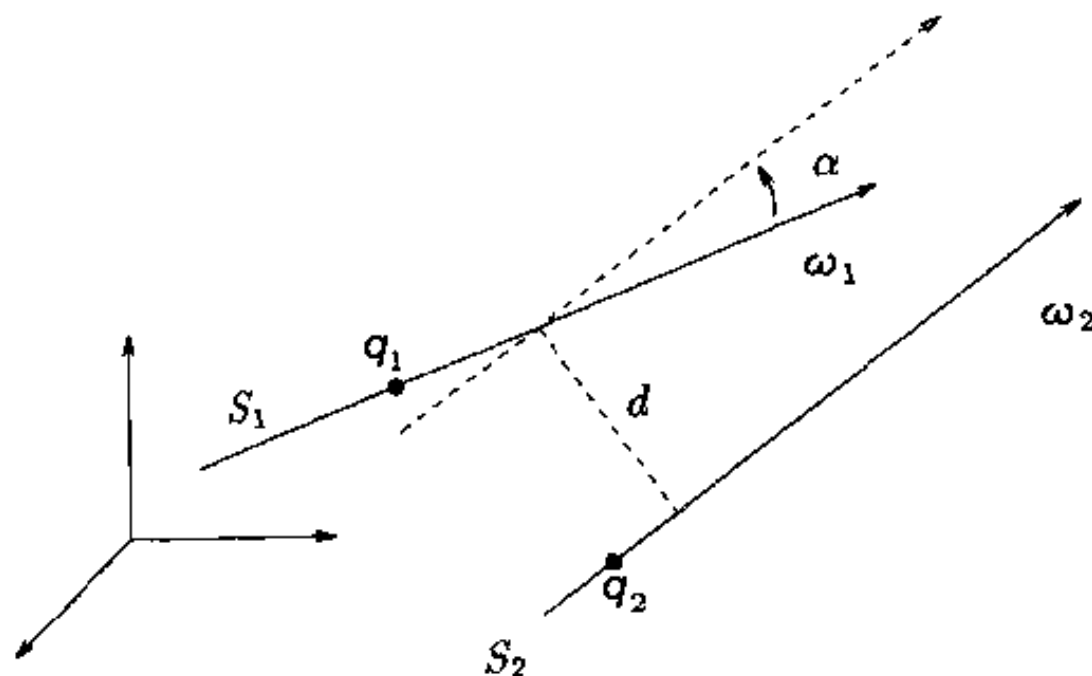


图 2.15 对偶旋量表示

$$S_1 \odot S_2 = M_1 M_2 ((h_1 + h_2) \cos \alpha - d \sin \alpha) \quad (2.72)$$

定理 2.18 对偶旋量的性质

两个旋量 S_1, S_2 为对偶当且仅当

$$S_1 \odot S_2 = 0$$

证明 这里只考虑 h_1 和 h_2 是有限值的情况, 其它情况留作习题。设 V 是关于旋量 S_1 的运动旋量, F 是沿旋量 S_2 的力旋量

$$V = M_1 \begin{bmatrix} q_1 \times \omega_1 + h_1 \omega_1 \\ \omega_1 \end{bmatrix}$$

$$F = M_2 \begin{bmatrix} \omega_2 \\ q_2 \times \omega_2 + h_2 \omega_2 \end{bmatrix}$$

不失一般性, 假定点 q_1 、 q_2 分别位于距离最近的两轴线上, 因此 q_2 可改写为 $q_2 = q_1 + dn$, 其中 n 是垂直于两轴线的单位矢量。 V 与 F 的瞬时功为

$$\begin{aligned} V \cdot F &= M_1 M_2 (\omega_2 \cdot (q_1 \times \omega_1 + h_1 \omega_1) + \omega_1 \cdot (q_2 \times \omega_2 + h_2 \omega_2)) = \\ &= M_1 M_2 (\omega_2 \cdot q_1 \times \omega_1 + h_1 \omega_1 \cdot \omega_2 + \omega_1 \cdot (q_1 + dn) \times \omega_2 + h_2 \omega_1 \cdot \omega_2) = \\ &= M_1 M_2 ((h_1 + h_2) \cos \alpha - d \sin \alpha) \end{aligned}$$

这就是对偶积。因此, 根据定义, 旋量对偶当且仅当其对偶积为零。

如果用运动旋量坐标表示旋量, 那么可以直接用运动旋量的分量来定义对偶积。设 $V_1, V_2 \in \mathfrak{R}^6$ 是两个任意运动旋量, 则 $V_1 V_2$ 的对偶积定义为

$$V_1 \odot V_2 = v_1^T \omega_2 + v_2^T \omega_1$$

如果将旋量与力旋量联系起来, 也成立类似的关系。

对偶旋量在机构运动特性分析中起着重要作用。例如, 在抓取实例中, 可以将施加于物体上的力旋量看作为一组约束旋量, 并问是否存在不破坏约束的瞬时刚体运动 (运动旋量)。如果这样的运动旋量存在, 那么手指就不能约束被抓物体的运动。这种特殊情况将在第五章中作详细讨论, 这里仅给出一些如何利用旋量系的概念进行分析的基本知识。

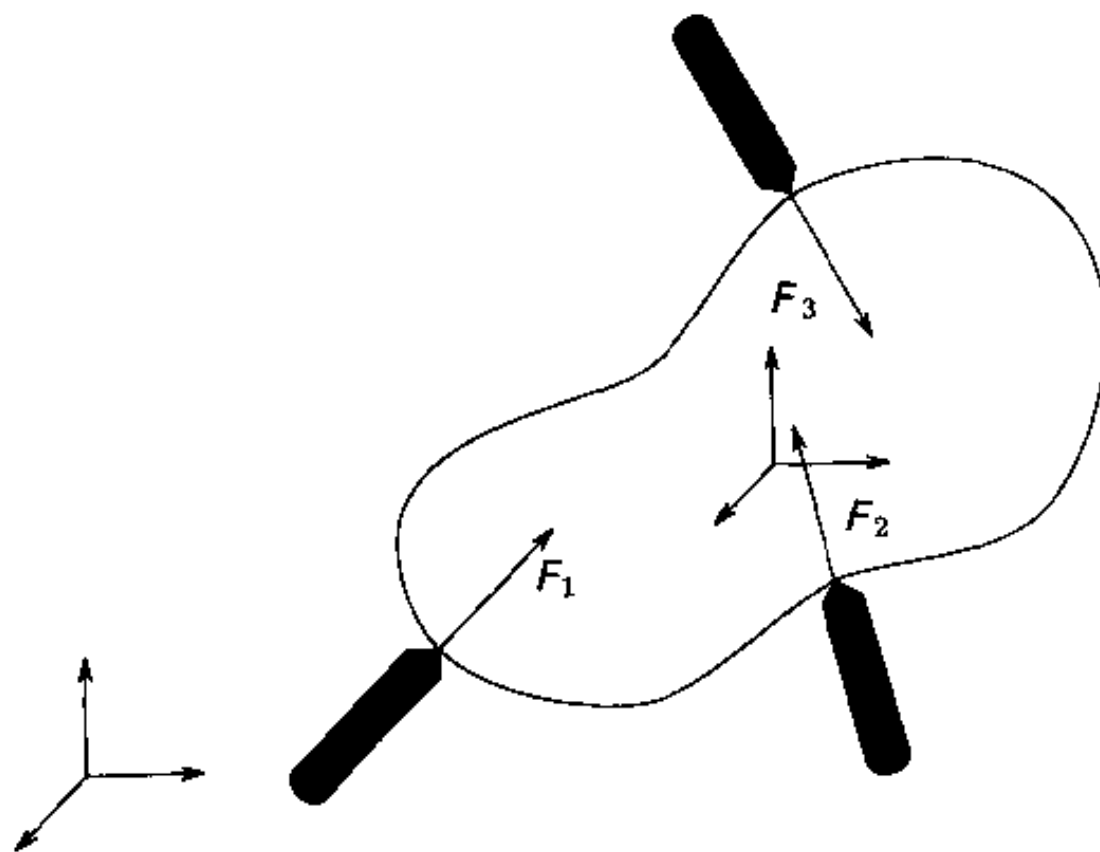


图 2.16 作用于刚体上的纯力系

现考虑图 2.16 所示的抓取情况。假设通过在刚体表面若干点处施加法向力使刚体运动, 希望确定是否存在不能被这些力约束的刚体运动。若用 $\{S_1, \dots, S_k\}$ 表示与力旋量对应的旋量, 假设存在另一个旋量 S_f , 使得 $S_f \odot S_i = 0$ 。那么将 S_f 转化为一个运动旋量, 所有 S_i 转化为一个力旋量, 显然沿 S_f 方向的运动对任何力旋量都不作功。因此这些力旋量不能约束这种运动, 即物体可以沿 S_f 方向自由 (瞬时) 运动。

如果将一组旋量 $\{S_1, \dots, S_k\}$ 转化为运动旋量, 那么这些运动旋量构成了一个线性

实空间,从而可以通过对运动旋量角度量的加、乘进行转化来讨论旋量的倍比和相加。这一组旋量 $\{S_1, \dots, S_k\}$ 称为旋量系,并将旋量与单位运动旋量联系起来定义旋量的加法和倍比。

由对偶积的定义可知:如果 S 与 S_1 和 S_2 对偶,那么 S 也与 S_1 和 S_2 的任意线性组合对偶(在运动旋量坐标系中的线性组合)。利用这种线性特性,可以将与给定旋量系对偶的所有旋量的集合定义为对偶旋量系(reciprocal screw system)。对偶旋量系定义了运动旋量的一个线性子空间。如果将旋量系转化为一组力旋量(或限定方向),那么对偶旋量系描述了在此约束下的可能瞬时运动。反之,如果将旋量系转化为一组运动旋量,那么对偶旋量系为不使物体运动的力旋量的集合。这两种转化都可由运动旋量和力旋量间的对偶积定义直接得出。

旋量系及对偶旋量系除可用于抓取外,还可用来分析机构的可动性(将在下一章详细讨论)。下面的定理是分析此类问题的主要工具之一,其证明可根据运动旋量空间是六维线性空间及旋量与此线性空间的固有关系直接导出。

定理 2.19 对偶旋量系的维数

设旋量系 $\{S_1, \dots, S_k\}$ 的维数为 r (决定于旋量向运动旋量或力旋量的转化),相应
对偶系的维数为 n , 则有

$$r + n = 6$$

将此定理用于图 2.16 中的示例,可以发现不受约束的运动旋量子空间至少有 3 维,若施加的法向力产生的力旋量不独立,或许还会更多。

6 小结

本章涉及的主要概念如下:

1. 刚体的位形可以表示为元素 $g \in SE(3)$ 。元素 $g \in SE(3)$ 可以看作是保持点与点之间的距离和夹角不变的映射 $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, 其齐次坐标形式为

$$g = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R \in SO(3) \\ p \in \mathbb{R}^3 \end{matrix}$$

上述表示同样可用于两坐标系间的刚体变换。

2. 刚体变换可表示为运动旋量的指数。

$$g = \exp(\hat{\xi}\theta) \quad \hat{\xi} = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \hat{\omega} \in so(3) \\ v \in \mathbb{R}^3, \theta \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$\hat{\xi}$ 的运动旋量坐标为 $\xi = (v, \omega) \in \mathbb{R}^6$ 。

3. 与旋量运动有关的运动旋量 $\xi = (v, \omega)$ 有如下特性

$$\begin{aligned} \text{节距: } h &= \frac{\omega^T v}{\|\omega\|^2} \\ \text{轴线: } l &= \begin{cases} \left\{ \frac{\omega \times v}{\|\omega\|^2} + \lambda \omega : \lambda \in \mathbb{R} \right\}, & \omega \neq 0 \\ \{0 + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}, & \omega = 0 \end{cases} \\ \text{大小: } M &= \begin{cases} \|\omega\|, & \omega \neq 0 \\ \|v\|, & \omega = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

反之,若给出旋量,就可以写出相应的运动旋量。两种特殊情况是相对于轴线 $l = \{q + \lambda\omega\}$ 转过角 θ 的纯转动和沿轴线 $l = \{0 + \lambda v\}$ 的纯移动:

$$\xi = \begin{bmatrix} -\omega \times q \\ \omega \end{bmatrix} \theta \quad (\text{纯转动}) \quad \xi = \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} \theta \quad (\text{纯移动})$$

4. 刚体运动 $g(t) \in SE(3)$ 的速度可用以下两种方法描述。空间速度为

$$\hat{V}^s = \dot{g}g^{-1}$$

它是一个运动旋量,它给出了在参考坐标系原点观察所得到的刚体速度。物体速度为

$$\hat{V}^b = g^{-1}\dot{g}$$

它是物体在瞬时动坐标系中的速度。这些速度与伴随变换的关系为

$$V^s = \text{Ad}_g V^b \quad \text{Ad}_g = \begin{bmatrix} R & \hat{p}R \\ 0 & R \end{bmatrix}$$

这是 $\mathfrak{R}^6 \rightarrow \mathfrak{R}^6$ 的映射。两坐标系间的速度变换关系为

$$V_{ac}^s = V_{ab}^s + \text{Ad}_{g_{ab}} V_{bc}^s$$

$$V_{ac}^b = \text{Ad}_{g_{ba}}^{-1} V_{ab}^b + V_{bc}^b$$

其中 V_{ab}^s 、 V_{ab}^b 分别为坐标系 B 相对于坐标系 A 的空间速度和物体速度。

5. 力旋量表示为力、力矩对

$$F = (f, \tau) \in \mathfrak{R}^6$$

如果坐标系 B 附于刚体上,那么可用 $F_b = (f_b, \tau_b)$ 表示作用于坐标系 B 原点且 f_b 和 τ_b 均在坐标系 B 中描述的力旋量。如果 C 是第二个坐标系,那么可将 F_b 写为作用于坐标系 C 的等价力旋量

$$F_c = \text{Ad}_{g_{bc}}^T F_b$$

对于位形为 g_{ab} 的刚体, $F^s := F_a$ 称为空间力旋量, $F^b := F_b$ 称为物体力旋量。

6. 力旋量 $F = (f, \tau)$ 与旋量有如下特性:

$$\text{节距: } h = \frac{f^T \tau}{\|f\|^2}$$

$$\text{轴线: } l = \begin{cases} \left\{ \frac{f \times \tau}{\|f\|^2} + \lambda f : \lambda \in \mathfrak{R} \right\}, & f \neq 0 \\ \{0 + \lambda \tau : \lambda \in \mathfrak{R}\}, & f = 0 \end{cases}$$

$$\text{大小: } M = \begin{cases} \|f\|, & f \neq 0 \\ \|\tau\|, & f = 0 \end{cases}$$

7. 当 $F \cdot V = 0$ 时力旋量 F 与运动旋量 V 对偶。对于旋量 S_1, S_2 , 如果关于 S_1 的运动旋量 V_1 与沿 S_2 的力旋量 F_2 对偶,则称该两旋量对偶。两个旋量的对偶积为

$$S_1 \odot S_2 = V_1 \cdot F_2 = V_1 \odot V_2 = v_1 \cdot \omega_2 + v_2^T \omega_1$$

其中 $V_i = (v_i, \omega_i)$ 表示与旋量 S_i 相关的运动旋量。当两个旋量间的对偶积为零时,它们互为对偶旋量。

8. 旋量系 $\{S_1, \dots, S_k\}$ 描述的是旋量 $\{S_1, \dots, S_k\}$ 的所有线性组合构成的矢量空间。对偶旋量系是与 S_i 对偶的所有旋量的集合。旋量系与其对偶系的维数之和为 6 (在 $SE(3)$ 中)。

本章涉及的所有概念都同样适用于平面刚体运动 (见习题 10 和 11)。

7 文献说明

本章对刚体运动的处理,特别是在运动旋量的几何特性方面,引用了 Paden^[86]的著作。Brockett^[12]介绍了用指数坐标来表示机器人的运动。Brockett 的工作也奠定了下一章内容的基础。有关的处理方法可参阅 Ball^[6]的经典著作以及近期的教材,如 Hunt^[42]、Bottema 和 Roth^[10]、Duffy^[28]、Angeles^[1]、McCarthy^[71]。

8 习题

1. 设 $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ 为三个矢量, $\cdot$ 和 $\times$ 分别表示三维空间的点积和叉积。试证明下列各式:

$$(a) a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$$

$$(b) a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$$

2. 对于由通常的矩阵乘法确定的群乘法,试用齐次坐标表示法证明 $SE(3)$ 满足群规则。

3. 旋转矩阵特性

设 $R \in SO(3)$ 为绕单位矢量 ω 转动 θ 角产生的旋转矩阵,即 R 满足 $R = \exp(\hat{\omega}\theta)$ 。

(a) 证明 $\hat{\omega}$ 的特征值为 0, i 和 $-i$, 其中 $i = \sqrt{-1}$ 。相应的特征矢量是什么?

(b) 证明 R 的特征值为 1, $e^{i\theta}$ 和 $e^{-i\theta}$ 。特征值为 1 的特征矢量是什么?

(c) 设 $R = [r_1 \ r_2 \ r_3]$ 是一个旋转矩阵,试证明 $\det R = r_1^T (r_2 \times r_3)$ 。

4. 反对称矩阵特性

试证明反对称矩阵具有下列特性:

(a) 如果 $R \in SO(3)$, $\omega \in \mathbb{R}^3$, 则有 $R\hat{\omega}R^T = (\hat{R\omega})^\wedge$ 。

(b) 如果 $R \in SO(3)$, $v, w \in \mathbb{R}^3$, 则有 $R(v \times w) = (Rv \times Rw)$ 。

(c) 试证明 $so(3)$ 是一个矢量空间, 确定它的维数并给出它的基。

5. Cayley 参数

$SO(3)$ 的另一种参数化方法是 Cayley 参数化方法, 它不包含超越函数。设 a 是三维矢量, $\hat{a}$ 是其对应的反对称矩阵。

(a) 证明 $R_a = (I - \hat{a})^{-1} (I + \hat{a}) \in SO(3)$ 。

(b) 验证

$$R_a = \frac{1}{1 + \|a\|^2} \begin{bmatrix} 1 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 & 2(a_1a_2 - a_3) & 2(a_1a_3 + a_2) \\ 2(a_1a_2 + a_3) & 1 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 & 2(a_2a_3 - a_1) \\ 2(a_1a_3 - a_2) & 2(a_2a_3 + a_1) & 1 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 \end{bmatrix}$$

(c) 给定一个旋转矩阵 R , 试计算 Cayley 参数 a 。

6. 单位四元数

设有四元数 $Q = (q_0, q)$ 和 $P = (p_0, p)$, 其中 $q_0, p_0 \in \mathbb{R}$ 是其标量部分, q, p 是其矢量部分。

(a) 试证明单位四元数的集合满足群规则。

(b) 设 x 是一个点, X 是标量部分为零、矢量部分为 x 的四元数 (这样的四元数称为纯四元数)。试证明若 Q 是单位四元数, 则积 QXQ^* 是纯四元数, 其矢量部分为

$$(q_0^2 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{q})\mathbf{x} + 2(q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{x}) + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{q})\mathbf{q})$$

并验证其矢量部分对应的点即为 x 经 Q 旋转所得之点。

(c) 证明单位四元数集合是关于 $SO(3)$ 的二到一覆盖 (covering), 即对于任意的 $R \in SO(3)$, 都存在两个确定的表示该转动的单位四元数。

(d) 比较进行下列运算需要的加法和乘法次数。

- i. 构造两个旋转矩阵;
- ii. 构造两个四元数;
- iii. 将一个旋转矩阵作用于一个矢量;
- iv. 将一个四元数作用于一个矢量 (如 b);

减法按加法计, 除法按乘法计。

(e) 证明刚体以单位速度绕单位矢量 $\omega \in \mathbb{R}^3$ 的旋转可以表示为四元数微分方程

$$\dot{Q} \cdot Q^* = (0, \omega/2)$$

其中, $\cdot$ 表示四元数相乘。

7. 刚体在二维空间中的运动自由度为 3 (即两个移动分量, 一个转动分量), 刚体在三维空间中的运动自由度为 6 (即移动和转动分量各为 3 个)。证明刚体在 n 维空间中的运动自由度为 $(n + n^2)/2$, 其中移动自由度和转动自由度各为多少个?

8. 矩阵指数特性

设 A 为 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 矩阵, A 的指数定义为

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$$

(a) 选一矩阵范数并证明上式收敛。

(b) 设 $g \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是可逆矩阵, 证明下式成立:

$$ge^Ag^{-1} = e^{gAg^{-1}}$$

(c) 验证

$$\frac{d}{dt}e^{A\theta} = (A\dot{\theta})e^{A\theta} = e^{A\theta}(A\dot{\theta})$$

9. 射影映射和定理 2.19 的证明

用线性空间中的射影映射来证明定理 2.19。设 $\omega \in so(3)$, 且 $\|\omega\| = 1$ 。

(a) 对于给定矢量 $\omega \in \mathbb{R}^3$, 用 N_ω 表示由 ω 生成的子空间, $N_\omega^\perp$ 表示其正交补。

证明

$$\text{像 } \hat{\omega} = N_\omega^\perp \quad \text{核 } \hat{\omega} = N_\omega$$

(b) 若 $V \subset \mathbb{R}^n$ 是一个线性子空间, P_V 为 $\mathbb{R}^n \rightarrow V$ 的线性射影映射, 对于所有的 $x \in V$, 它满足映射 $(P_V) = V$ 和 $P_V(x) = x$ 。证明

$$P_{N_\omega} = \omega\omega^T \quad \text{和} \quad P_{N_\omega^\perp} = (I - \omega\omega^T)$$

都是射影映射。

(c) 对于 $I - e^{\hat{\omega}\theta}$, 其中 $\omega \in so(3)$, $\theta \in (0, 2\pi)$, 试计算其零子空间, 并证明

$$(\mathbf{I} - e^{\hat{\omega}\theta}) : N_{\omega}^{\perp} \rightarrow N_{\omega}^{\perp}$$

是双射 (bijeptive)。

(d) 若 $A = (\mathbf{I} - e^{\hat{\omega}\theta}) \hat{\omega} + \omega \omega^T \theta$, 其中 $\theta \in (0, 2\pi)$ 。试证明 $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是可逆的。

10. 平面转动

若 $SO(2)$ 是所有行列式值为 +1 的 2×2 正交阵的集合。

(a) 证明 $SO(2)$ 可以等同于二维平面单位圆 S^1 。

(b) 若 $\omega \in \mathbb{R}$ 是一实数, 定义 $\hat{\omega} \in SO(2)$ 的反对称矩阵为

$$\hat{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}$$

试证明

$$e^{\hat{\omega}\theta} = \begin{bmatrix} \cos \omega\theta & -\sin \omega\theta \\ \sin \omega\theta & \cos \omega\theta \end{bmatrix}$$

又指数映射 $\exp : so(2) \rightarrow SO(2)$ 是满射 (surjective) 还是单射 (injective)?

(c) 对于 $R \in SO(2)$, $\hat{\omega} \in so(2)$, 证明有 $R\hat{\omega}R^T = \hat{\omega}$ 。

11. 平面刚体变换

对于由移动 $p \in \mathbb{R}^2$ 和 2×2 旋转矩阵 R 组成的变换 $g = (p, R) \in SE(2)$, 可用齐次坐标将其表示为 3×3 矩阵:

$$g = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

运动旋量 $\hat{\xi} \in se(2)$ 可以用这种形式的 3×3 矩阵表示为

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \quad \omega \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^2$$

$\hat{\xi} \in se(2)$ 的运动旋量坐标具有形式 $\xi = (v, \omega) \in \mathbb{R}^3$, 其中 v 是平面矢量, ω 是标量。

(a) 证明 $se(2)$ 中运动旋量的指数给出了一个在 $SE(2)$ 上的刚体转换。试考虑纯移动情况 $\xi = (v, 0)$ 及一般情况 $\xi = (v, \omega)$, $\omega \neq 0$ 。

(b) 证明绕点 q 的纯转动平面运动旋量和沿 v 方向的纯移动平面运动旋量为

$$\xi = [q_y \quad -q_x \quad 1]^T \quad (\text{纯转动}) \quad \xi = [v_x \quad v_y \quad 0]^T \quad (\text{纯移动})$$

(c) 证明任意平面刚体运动可以描述为关于某点 (称为运动极点) 的纯移动或纯转动。

(d) 证明矩阵 $\hat{V}^s = \dot{g}g^{-1}$ 和 $\hat{V}^b = g^{-1}\dot{g}$ 都是运动旋量, 定义并转换空间速度 $V^s \in \mathbb{R}^3$ 和刚体速度 $V^b \in \mathbb{R}^3$ 。

(e) 伴随变换用于将刚体速度 $V^b \in \mathbb{R}^3$ 映射为空间速度 $V^s \in \mathbb{R}^3$ 。证明平面刚体运动的伴随变换由下式给出

$$\text{Ad}_g = \begin{bmatrix} R & \begin{bmatrix} p_y \\ -p_x \end{bmatrix} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

12. 对于 $\omega \in \mathbb{R}^3$, $\|\omega\| \neq 1$, 试证明

$$e^{\hat{\omega}\theta} = \mathbf{I} + \frac{\hat{\omega}}{\|\omega\|} \sin(\|\omega\|\theta) + \frac{\hat{\omega}^2}{\|\omega\|^2} (1 - \cos(\|\omega\|\theta))$$

13. 设 $\xi_a = (-\omega_a \times q_a + h\omega_a, \omega_a)$ 是与节距为 h 、轴线为 $l = \{q_a + \lambda\omega_a : \lambda \in \mathbb{R}\}$ 的

旋量对应的运动旋量，其中所有量都在 A 坐标系中描述。

(a) 设 B 是位形为 $g_{ab} \in SE(3)$ 的另一个坐标系。证明相对于 B 的运动旋量可表示为

$$\xi_b = \text{Ad}_{g_{ab}}^{-1} \xi_a = \text{Ad}_{g_{ba}} \xi_a$$

(b) 假设使旋量及刚体变换 $g \in SE(3)$ 运动。试证明经变换后的旋量仍可用相对于坐标系 A 的如下运动旋量表示

$$\xi'_a = \text{Ad}_g \xi_a$$

14. 试用齐次坐标表示方法证明下列等价关系成立：

(a) 对于所有的 $g \in SE(3)$ ，有 $(\text{Ad}_g)^{-1} = \text{Ad}_{g^{-1}}$ 。

(b) 对于所有的 $g_1, g_2 \in SE(3)$ ，有 $\text{Ad}_{g_1 g_2} = \text{Ad}_{g_1} \text{Ad}_{g_2}$ 。

15. 证明定理 2.15: $V_{ac}^b = \text{Ad}_{g_{bc}}^{-1} V_{ab}^b + V_{bc,c}^b$

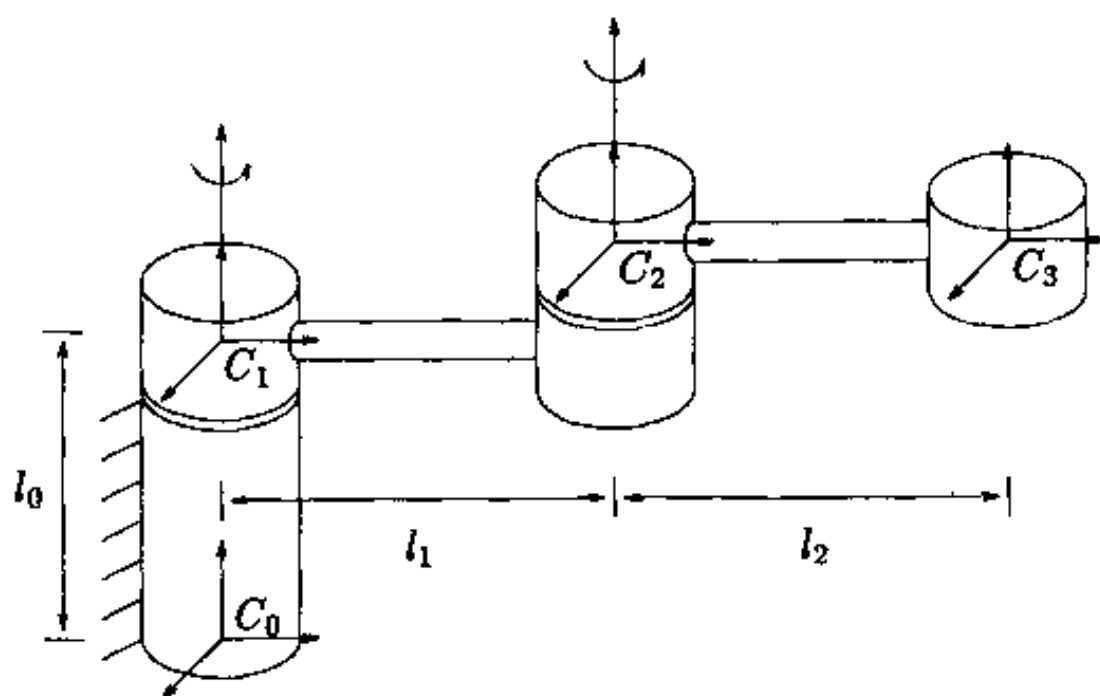


图 2.17 两自由度机器人

16. 图 2.17 所示为一两自由度机器人。设 l_0 、 l_1 、 l_2 为连杆长度， θ_1 、 θ_2 为杆 1 和杆 2 关节转角。

(a) 试用连杆长度及关节转角表示坐标系 C_3 相对于坐标系 C_0 的位姿。

(b) 计算作为关节转角及其变化率函数的 C_3 相对于 C_0 的空间速度。

(c) 计算作为关节转角及其变化率函数的 C_3 相对于 C_0 的物体速度。

(d) 选做：求 C_3 原点的空间速度，用此检查 (b)、(c) 的答案。

17. 坐标系无关性和对偶旋量系

如果一个运算与坐标系的选择无关，则称具有坐标系无关性 (frame invariant)。与坐标系无关的运算可以对任意坐标系进行，从而可简化运算。

(a) 证明旋量的对偶积与坐标系无关。

(b) 证明两运动旋量的内积与坐标系有关。

(c) 计算过点 q 的零节距旋量的对偶旋量系的基，给出组成该基的旋量的几何意义 (提示：可相对于特定坐标系进行计算)。

(d) 计算无穷大节距旋量的对偶旋量系的基，给出组成该基的旋量的几何意义。

(e) 用对偶旋量证明三个平行、共面的零节距旋量是相关的，即说明四个不相关的旋量

系都与此共面旋量中的任一个对偶。

18. 速度的混合表示

通常用 $\dot{\mathbf{p}}$ 表示刚体的线速度，用 $\boldsymbol{\omega}^s$ 表示刚体的角速度。称 $\mathbf{V}_{ab}^h = (\dot{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\omega}^s)$ 为刚体的混合速度 (hybrid velocity)。

(a) 证明混合速度与物体速度有如下关系

$$\mathbf{V}^h = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix} \mathbf{V}^b$$

因此可表示相对于刚体坐标系原点的速度，但其相对于惯性坐标系的方向固定不变

(b) 若有三个运动坐标系 A, B, C ，证明混合速度之间有下列关系：

$$\mathbf{V}_{ac}^h = \text{Ad}_{(-R_{ab}P_{bc})} \mathbf{V}_{ab}^h + \text{Ad}_{R_{ab}} \mathbf{V}_{bc}^h$$

其中 Ad_p 表示与纯移动 $\mathbf{P}$ 对应的伴随映射， Ad_R 表示与纯转动对应的伴随映射。

(c) 证明刚体的混合速度与空间坐标系的位置无关，而与其姿态有关。

(d) 证明刚体的混合速度与物体坐标系的姿态无关，而与其位置有关。

(e) 转换以混合坐标表示的力旋量，计算当其在空间坐标系和/或物体坐标系中发生变化时基本公式的变化。

第三章 机器人运动学

机器人运动学描述了机器人关节与组成机器人的各刚体之间的运动关系。本章以第二章介绍的理论为工具，建立一般 n 自由度开链机器人的运动学描述，并简要给出冗余度机器人和并联机器人的处理方法。

1 概述

大多数机器人都是由一组通过运动副（关节）联接而成的刚性连杆构成。电动机安装在关节处，以控制整个机构实现给定的任务。在机器人的末端安装有工具，通常是某种夹持器，以使其与环境相作用。

虽然任何类型的运动副都可以用来联接机器人连杆，但机器人关节通常在六种称为低副（lower pairs）的运动副中选用。这些特种运动副对应于 $SE(3)$ 的子群，他们是转动副、移动副、螺旋副、圆柱副、球面副和平面副。

转动副、移动副和螺旋副各对应于一个螺旋运动，其中螺旋副对应于有限非零节距旋量。圆柱副具有两个独立的自由度，通常由共轴线转动副与移动副的组合构成。机器人中最常用的运动副是转动副和移动副。

球面副是一种能作任意相对转动的运动副，被动式球关节通常是将球插入球套中来构成，因而又称为球套副。遗憾的是，当需施加力和力矩时，这种球面副不能很好地工作，因此常用轴线汇交于一点的三个转动副（带电动机）来构成主动球面副。这种关节的姿态为

$$\mathbf{R} = e^{\hat{\omega}_1 \theta_1} e^{\hat{\omega}_2 \theta_2} e^{\hat{\omega}_3 \theta_3}$$

其中 $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathfrak{R}^3$ 表示三个转动副轴线的方向，上式类似于姿态的欧拉角参数表示，并同样存在奇异点的局限性。球面副通常用作机器人的腕部，以实现机器人端部夹持器或工具的任意姿态。

平面副允许平面内的任意移动和转动。与螺旋副一样，平面副是最不常用的低副。平面副可以看作是由两个独立的移动副和一个转动副构成。平面副的运动仅限于 $SE(2)$ ，它是 $SE(3)$ 的三维子群。

一般而言，现代机器人和运动机构是由刚性连杆通过不同的低副联接而成，而每个运动副都将相邻连杆之间的运动限制于 $SE(3)$ 的子群中，上一章介绍的有关分析方法仅是此类机构分析的基础。本章和下一章将讨论一组连杆通过一组主动关节顺序联接而成的开链机器人的运动学、动力学及控制，通过对各连杆上力和力矩的控制，使机器人以一定的方式运动。

下面所给公式的核心是指数积公式，它将开链机构的运动方程表示成运动旋量的指数积，它适用于商业上常用的以转动副、移动副或螺旋副作为关节的机器人。由此提供了机器人运动方程的完整几何表示方法，从而大大地简化了机构的分析，并提供了开链机器人的结构化参数表示方法。

本章内容组织如下：第二节建立任意开链机器人运动方程正解（或正问题）的指数积公

式, 重点讨论一般情况下末端执行器在 $SE(3)$ 中的位形。第三节讨论由末端执行器的给定位形确定关节转角的运动学逆问题, 并将其推广应用于首先由 Paden 和 Kahan 提出、与刚体运动的指数表示密切相关的子问题。第四节推导末端执行器与关节间的速度和力关系, 引入机器人的雅可比 (Jacobian) 矩阵。最后, 第五节将本章所得主要结论推广用于冗余度机器人和并联机构。

2 运动学正解

2.1 问题的描述

机器人的运动学正解 (forward kinematics) 是指: 在给定组成运动副的相邻连杆的相对位置情况下, 确定机器人末端执行器 (安装于机器人末端的夹持器或工具) 的位形。本节仅限于讨论各连杆顺序构成单链且相邻连杆间通过转动副或移动副联接的开链机器人。为了叙述明确, 对运动副从 1 到 n 进行编号, 并从机架开始对连杆编号, 使得第 i 个运动副联接连杆 $i-1$ 和 i , 连杆 0 即为机器人的基座, 连杆 n 与末端执行器刚性联接。图 3.1 为对 AdeptOne 机器人 (一种 SCARA 型机器人) 的编号。

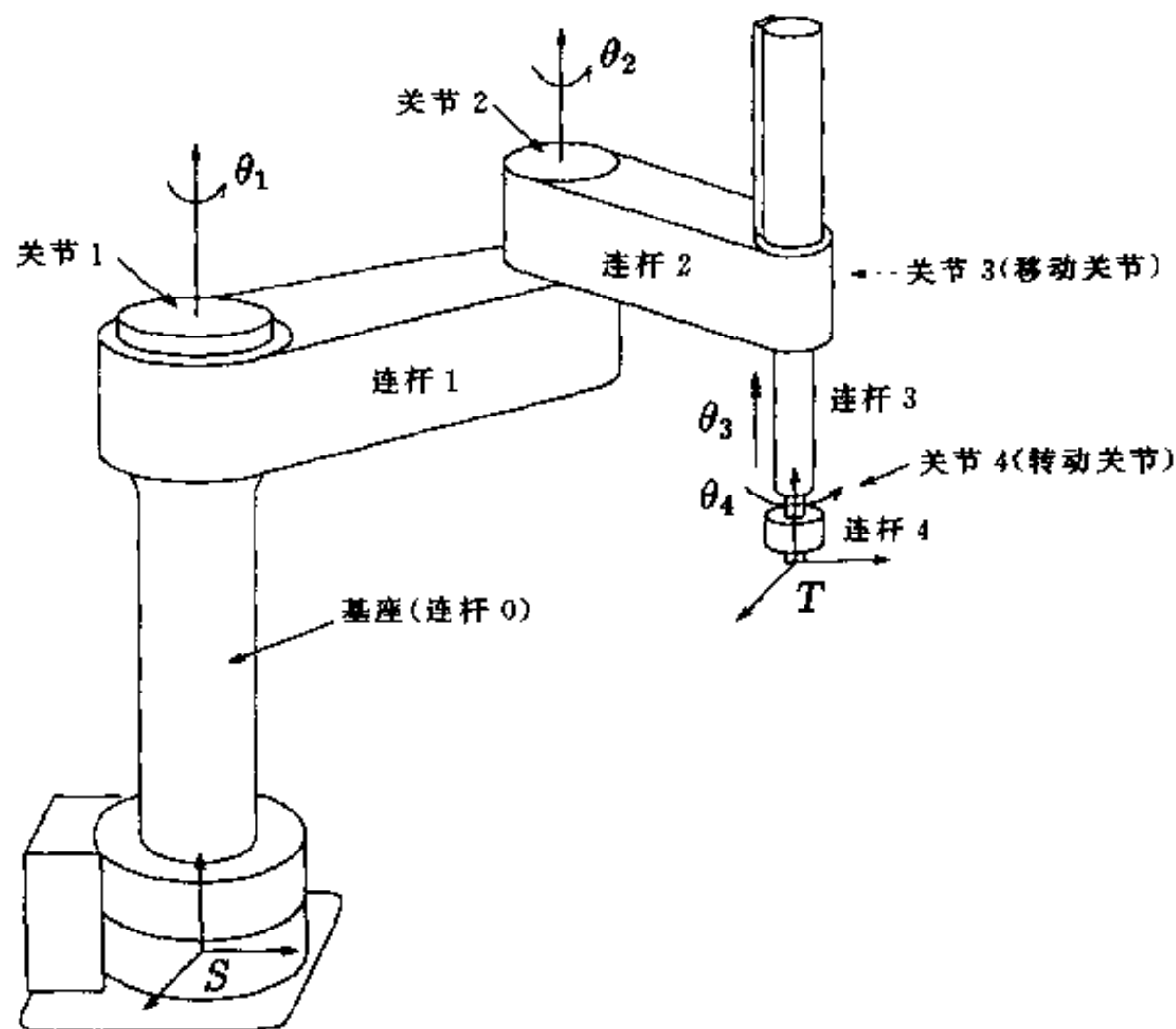


图 3.1 AdeptOne 机器人的编号

机器人的关节空间 (joint space) Q 由机器人关节变量的所有可能值构成, 这也是机器人的位形空间, 这是因为给定了关节转角也就给定了机器人所有连杆的位置。对于转动副, 关节变量用转角 $\theta_i \in [0, 2\pi)$ 给出, 转角 2π 就是转角 0 的位置。关节转角的集合很自然地与平面上的单位圆 (记为 S^1) 联系起来, 因此对于转动副有 $\theta_i \in S^1$ 。所有关节的转角都在右手坐标系中度量, 并且当沿轴线方向观察是顺时针转动时, 则认为绕该有向轴线的转角为正。移动关节用沿有向轴线的线位移 $\theta_i \in \mathcal{R}$ 来表示, 当位移是沿轴线方向时为正。

关节空间 Q 是各独立关节空间的笛卡儿积。开链机器人的自由度数等于该机器人的关节数。例如, 对于图 3.1 所示的四自由度 SCARA 机器人, 有 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) \in S^1 \times S^1 \times \mathbb{R} \times S^1 = Q$ 。对于具有多个转动副的操作器, 用 T^p 表示 p 个环, 定义为 p 个 S^1 的笛卡儿积: $T^p = S^1 \times \cdots \times S^1$ 。具有 p 个转动副和 r 个移动副的操作器的关节空间为 $Q = T^p \times \mathbb{R}^r$, 它具有 $p+r$ 个自由度。实际情况下, Q 也可定义为无约束关节空间的子集, 以计入诸如有限移动和有限转动之类的关约束。

如图 3.1 所示, 在机器人上连接两个坐标系, 其中基础坐标系 S 取在操作器上相对于连杆 0 静止不动的一点处, 通常 S 直接与连杆 0 相联, 当然由后续内容可以看出这并非必要。(用字母 S 代替 B 是为了避免基础坐标系与物体坐标系的混淆, 物体坐标系通常连于活动构件上)。工具坐标系 T 固连于机器人末端执行器上, 当机器人的关节运动时, 工具坐标系 T 就随之运动。

现在可以正式定义运动学正解问题。虽然转角和位移都可能存在 (这与运动副类型有关), 但为简化起见, 将所有关节变量都看作是转角。当给定一组关节转角 $\theta \in Q$, 希望确定工具坐标系 T 相对于基础坐标系 S 的位形。运动学正解可用一个反映此相对关系的映射 $g_s: Q \rightarrow SE(3)$ 来表示。本节的目的就是说明对于给定的开链机器人, 如何具体构造 g_s , 并揭示此映射的特点。

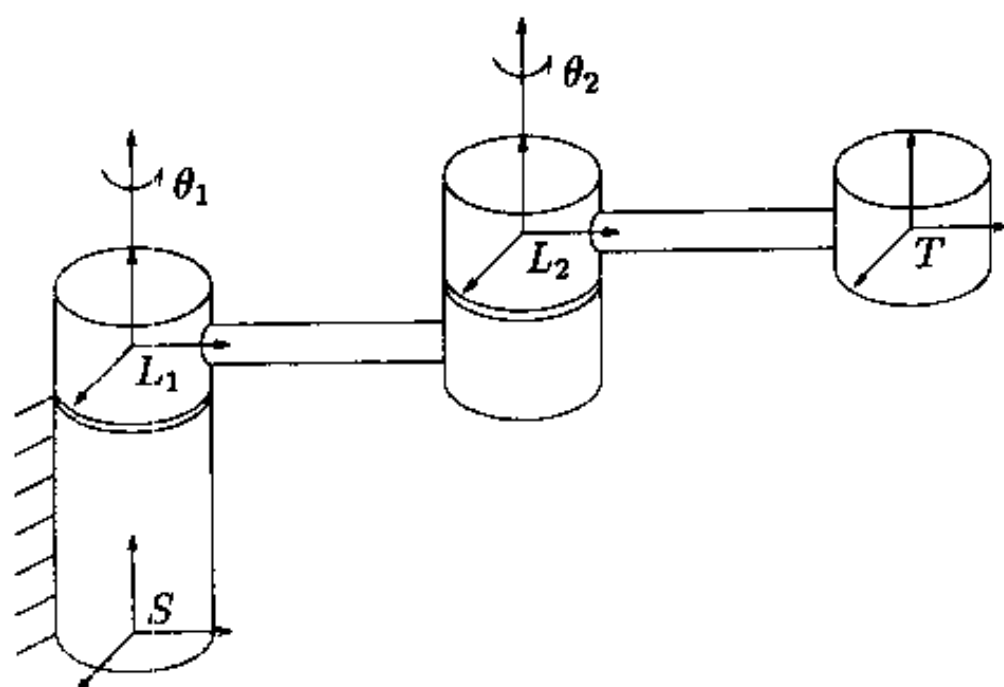


图 3.2 两自由度机器人

从经典理论角度来看, 开链机器人的运动学正解映射可以通过将由各关节引起的刚体运动加以组合来构成。例如考虑图 3.2 所示的二自由度机器人, 为计算工具坐标系 T 相对于基础坐标系 S 的位形, 将相邻坐标系的刚体运动联系起来

$$g_s(\theta_1, \theta_2) = g_{s_1}(\theta_1)g_{l_1 l_2}(\theta_2)g_{l_2 t}$$

其中映射 $g_s: T^2 \rightarrow SE(3)$ 表示机器人的运动学正解, 它给出了以关节转角为函数的末端执行器位形。

上述过程很容易推广到任意开链机构。如果定义 $g_{l_{i-1} l_i}(\theta_i)$ 为相邻连杆坐标系间的变换, 那么总的运动

方程为

$$g_s(\theta) = g_{s_1}(\theta_1)g_{l_1 l_2}(\theta_2) \cdots g_{l_{n-1} l_n}(\theta_n)g_{l_n t} \quad (3.1)$$

式 (3.1) 是用相邻连杆坐标系的相对变换表示的开链操作器运动学正解的一般公式。

2.2 指数积公式

因各关节的运动由位于关节轴线的运动旋量产生, 由此可得运动学的几何描述。如果 ξ 是一个运动旋量, 那么与沿此运动旋量轴线转动和移动的刚体运动可表示为

$$g_{ab}(\theta) = e^{\xi \theta} g_{ab}(0)$$

如果 ξ 对应于一个移动关节 (无限节距), 那么 $\theta \in \mathcal{R}$ 是移动量; 反之, $\theta \in S^1$ 是绕轴线的转动角度。

再次考虑图 3.2 所示的二自由度机器人, 设想将第一个关节固定, 将工具坐标系的位形看作仅为 θ_2 的函数。这是一个绕第二个关节轴线的简单转动 (零节距) 旋量运动, 因此有

$$g_s(\theta_2) = e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} g_s(0)$$

其中 ξ_2 为与第二个关节的旋转相对应的运动旋量。然后固定 θ_2 , 仅转动 θ_1 。经组合, 末端执行器的位形变为

$$g_s(\theta_1, \theta_2) = e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} g_s(\theta_2) = e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} g_s(0) \quad (3.2)$$

其中 ξ_1 是与第一个关节有关的运动旋量。式 (3.2) 是机器人运动学正解的可选形式。注意 ξ_1 和 ξ_2 是当机器人位于位形 $\theta_1 = \theta_2 = 0$ 时各关节旋量运动所产生的定常运动旋量。

式 (3.2) 的简单形式取决于先运动 θ_2 , 再运动 θ_1 。这使我们可以将关节运动表示为绕定轴的运动旋量。为说明此表示与关节的运动顺序无关, 在推导运动学正解公式时先使 θ_1 运动再使 θ_2 运动。此时

$$g_s(\theta_1) = e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} g_s(0)$$

是 θ_2 固定、仅 θ_1 运动而产生的机器人运动。该运动导致了 θ_2 轴线位置的变化, 第二个连杆存在绕一个新轴的转动

$$\xi'_2 = \text{Ad}_{e^{\hat{\xi}_1 \theta_1}} \xi_2$$

利用矩阵指数的性质 (见第二章习题 8), 刚体变换

$$e^{\hat{\xi}'_2 \theta_2} = e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} (e^{\hat{\xi}_2 \theta_2}) e^{-\hat{\xi}_1 \theta_1}$$

描述了相对于新轴的运动。由此得

$$\begin{aligned} g_s(\theta_1, \theta_2) &= e^{\hat{\xi}'_2 \theta_2} e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} g_s(0) \\ &= e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} (e^{\hat{\xi}_2 \theta_2}) e^{-\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} g_s(0) \\ &= e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} g_s(0) \end{aligned}$$

与式 (3.2) 相同。

为获得 n 自由度任意开链机器人的运动学正解映射, 可将此过程加以推广。设 S 是与机器人基座固定的坐标系, T 是与机器人末杆固定的坐标系, 定义机器人的基准参考位形为机器人对应于 $\theta = 0$ 的位形, 并用 $g_s(0)$ 表示机器人位于参考位形时 T 和 S 之间的刚体变换。对于每一个关节, 构造一个运动旋量 ξ_i , 它对应于除第 i 个关节外所有其它关节均固定于 $\theta_j = 0$ 位置时第 i 个关节的旋量运动。对于转动关节, 运动旋量 ξ_i 具有以下形式

$$\xi_i = \begin{bmatrix} -\omega_i \times q_i \\ \omega_i \end{bmatrix}$$

其中 $\omega_i \in \mathcal{R}^3$ 是运动旋量轴线方向上的单位矢量, $q_i \in \mathcal{R}^3$ 为轴线上的任一点[⊖]。对于移动关节

$$\xi_i = \begin{bmatrix} v_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

⊖ 习惯上取 $-\omega \times q$ 而不是 $\omega \times q$, 这是因为前者在空间和平面两种情况下均能得到正确解释 (见第二章习题 11)。

其中 $v_i \in \mathbb{R}^3$ 是指向移动方向的单位矢量。所有矢量和点都是相对于基础坐标系 S 描述的。

将各关节的运动加以组合, 即得运动学正解映射 $g_{st}: Q \rightarrow SE(3)$ 如下

$$g_{st}(\theta) = e^{\xi_1 \theta_1} e^{\xi_2 \theta_2} \cdots e^{\xi_n \theta_n} g_{st}(0) \quad (3.3)$$

ξ_i 必须由基座开始顺序编号, 但是 $g_{st}(\theta)$ 给出的工具坐标系的位形与转动和移动的实际顺序无关。式(3.3)称为机器人运动学正解的指数积公式(product of exponentials formula)。

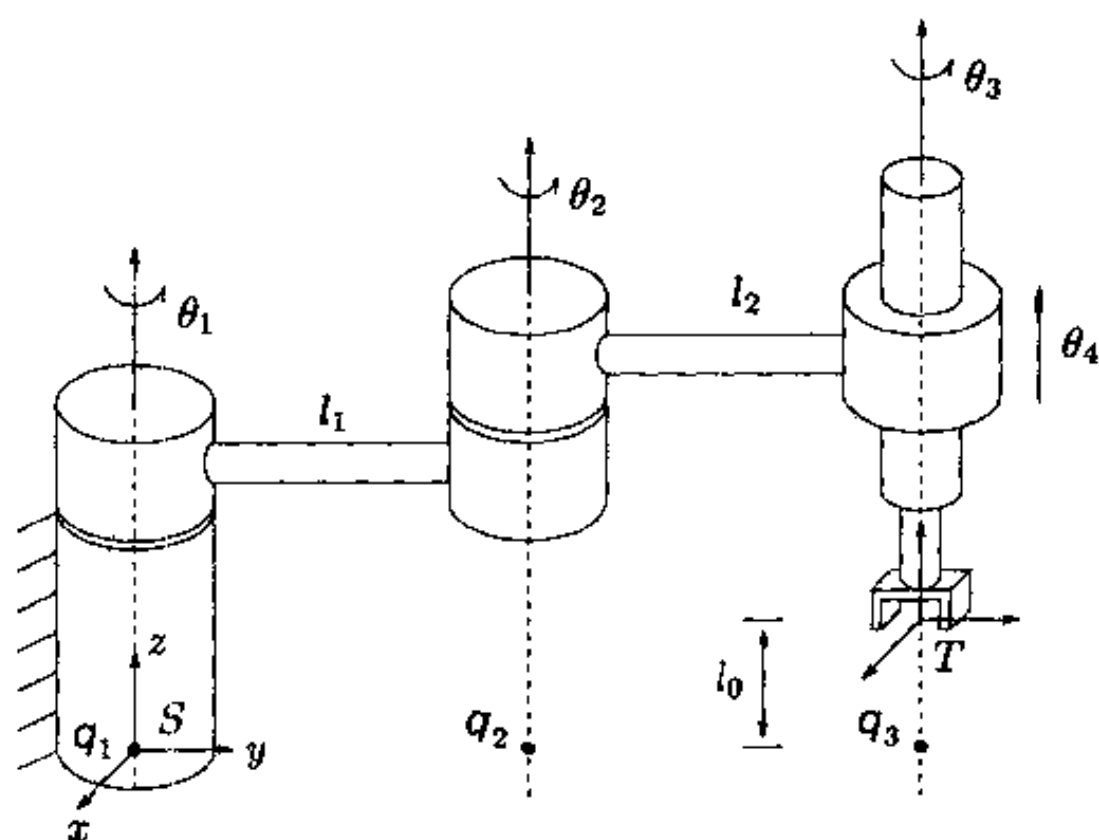


图 3.3 位于参考位形的 SCARA 机器人

例 3.1 SCARA 机器人的运动学正解

考虑图 3.3 所示的 SCARA 机器人, 它由三个转动关节和一个移动关节组成(注意这里的关节顺序与图 3.1 AdeptOne 机器人不同)。取 $\theta = 0$ 对应于图示完全伸展开的位形, 并建立基础坐标系和工具坐标系, 如图所示。

$\theta = 0$ 时基础坐标系与工具坐标系的变换为

$$g_{st}(0) = \begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 + l_2 \\ l_0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

为构造转动关节的运动旋量, 注意到

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

取轴线上的点

$$q_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad q_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad q_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 + l_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由此产生的运动旋量为

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \xi_3 = \begin{bmatrix} l_1 + l_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

取移动关节沿 z 轴方向, 相应的运动旋量为

$$\xi_4 = \begin{bmatrix} v_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

机器人的运动学正解映射具有以下形式

$$g_x(\theta) = e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} e^{\hat{\xi}_3 \theta_3} e^{\hat{\xi}_4 \theta_4} g_x(0) = \begin{bmatrix} R(\theta) & p(\theta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中的各个指数如下

$$\begin{aligned} e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & l_1 \sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & l_1 (1 - \cos \theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ e^{\hat{\xi}_3 \theta_3} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & (l_1 + l_2) \sin \theta_3 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & (l_1 + l_2) (1 - \cos \theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ e^{\hat{\xi}_4 \theta_4} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \theta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

用指数积公式展开各式得

$$\begin{aligned} g_x(\theta) &= \begin{bmatrix} R(\theta) & p(\theta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ R(\theta) &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ p(\theta) &= \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_0 + \theta_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.4)$$

例 3.2 肘机器人的运动学正解

考虑图 3.4 所示的肘机器人。该机构由肩部的两个相交轴、肘和球关节 (可看作是三个

轴线相交的关节)组成。参考位形 ($\theta=0$) 为图示的展开位形。

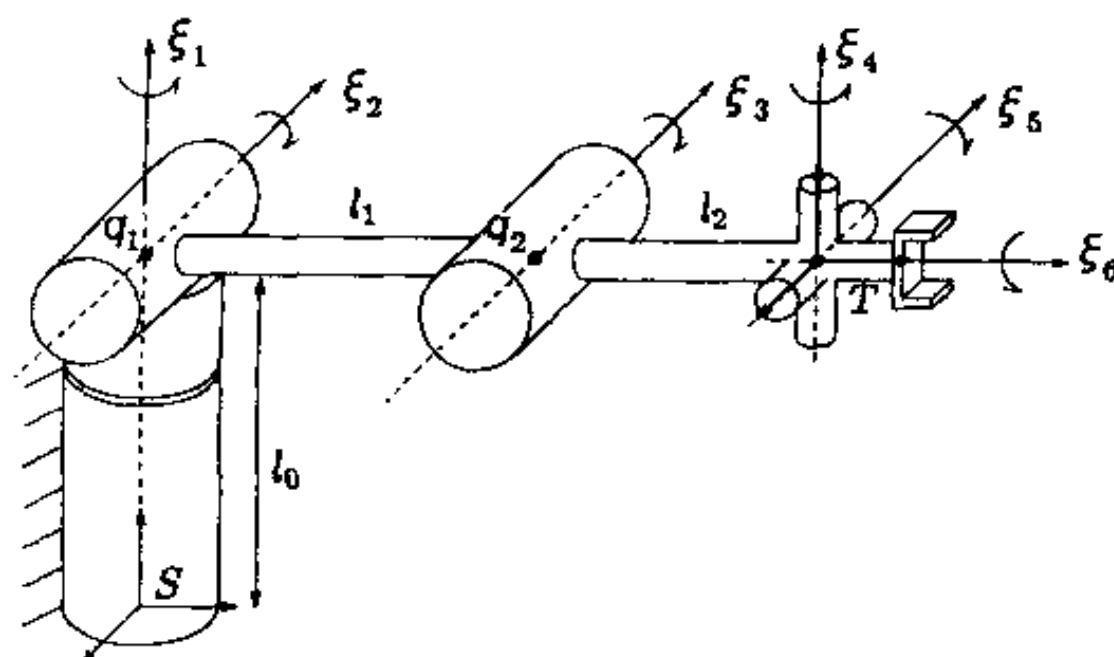


图 3.4 肘机器人

此机构的运动学正解可通过计算各关节运动螺旋的运动而获得。 $\theta=0$ 时工具坐标系与基础坐标系的变换为

$$g_s(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ I \begin{bmatrix} l_1 + l_2 \\ l_0 \end{bmatrix} \\ 0 \quad 1 \end{bmatrix}$$

前两个关节的运动螺旋为

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} -\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} -\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -l_0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

注意到曾将第一个运动螺旋取为点 $q_1 = (0, 0, l_0)$, 同样也可取为坐标原点或该运动螺旋轴上的其它任一点。用类似方法可得其它运动螺旋

$$\xi_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -l_0 \\ l_1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \xi_4 = \begin{bmatrix} l_1 + l_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \xi_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ -l_0 \\ l_1 + l_2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \xi_6 = \begin{bmatrix} -l_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

整个运动学正解方程为

$$g_s(\theta) = e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} \cdots e^{\hat{\xi}_6 \theta_6} g_s(0) = \begin{bmatrix} R(\theta) & p(\theta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} -\sin\theta_1(l_1\cos\theta_2 + l_2\cos(\theta_2 + \theta_3)) \\ \cos\theta_1(l_1\cos\theta_2 + l_2\cos(\theta_2 + \theta_3)) \\ l_0 - l_1\sin\theta_2 - l_2\sin(\theta_2 + \theta_3) \end{bmatrix}$$

若用记号: $c_i = \cos\theta_i$, $s_i = \sin\theta_i$, $c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$, $s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j)$, 则

$$\begin{aligned} r_{11} &= c_6(c_1c_4 - s_1c_{23}s_4) + s_6(s_1s_{23}c_5 + s_1c_{23}c_4s_5 + c_1s_4s_5) \\ r_{12} &= -c_5(s_1c_{23}c_4 + c_1s_4) + s_1s_{23}s_5 \\ r_{13} &= c_6(-c_5s_1s_{23} - (c_{23}c_4s_1 + c_1s_4)s_5) + (c_1c_4 - c_{23}s_1s_4)s_6 \\ r_{21} &= c_6(c_4s_1 - c_1c_{23}s_4) - (c_1c_5s_{23} + (c_1c_{23}c_4 - s_1s_4)s_5)s_6 \\ r_{22} &= c_5(c_1c_{23}c_4 - s_1s_4) - c_1s_{23}s_5 \\ r_{23} &= c_6(c_1c_5s_{23} + (c_1c_{23}c_4 - s_1s_4)s_5) + (c_4s_1 + c_1c_{23}s_4)s_6 \\ r_{31} &= -(c_6s_{23}s_4) - (c_{23}c_5 - c_4s_{23}s_5)s_6 \\ r_{32} &= -(c_4c_5s_{23}) - c_{23}s_5 \\ r_{33} &= c_6(c_{23}c_5 - c_4s_{23}s_4) - s_{23}s_4s_6 \end{aligned}$$

2.3 机器人的运动旋量参数表示

利用指数积公式, 操作器的运动学完全可以用各关节的运动螺旋坐标来表征。现在考虑如何用运动螺旋来表示机器人的运动参数。

基础坐标系和参考位形的选择

在上面的实例中, 机器人的基础坐标系取为位于机器人基座上。基础坐标系也可以有其他的選擇方法, 有时还能简化计算。一种自然的选法就是将基础坐标系取为与参考位形时的工具坐标系重合。这样选择的基础坐标系相对于机器人基座是固定的, 并且当 $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ 时与工具坐标系重合。由于 $g_{\alpha}(0) = \mathbf{I}$, 所以按此选择的基础坐标系可以简化计算。因此

$$g_{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = e^{\hat{\xi}_1\theta_1} \cdots e^{\hat{\xi}_n\theta_n}$$

在描述机器人的运动学时, 参考位形的选择自由度更大。由于参考位形是对应于所有关节变量均为 0 值时的位形, 通过对各关节变量加上或减去一个固定量, 可以将机器人的任一位形定义为参考位形。操作器各关节的运动螺旋坐标取决于参考位形 (以及基础坐标系) 的选择, 因而参考位形的选择通常应使运动分析尽可能简单。正如上面所有的例子那样, 参考位形的选择应使各关节运动螺旋轴线上的点具有简单的形式。

例 3.3 不同基础坐标系时的 SCARA 机器人运动学正解

考虑图 3.5 所示基础坐标系与 $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ 时的工具坐标系重合的 SCARA 机器人。相对于新的基础坐标系的运动旋量为:

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} -\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -l_1 - l_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 - l_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} -\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -l_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

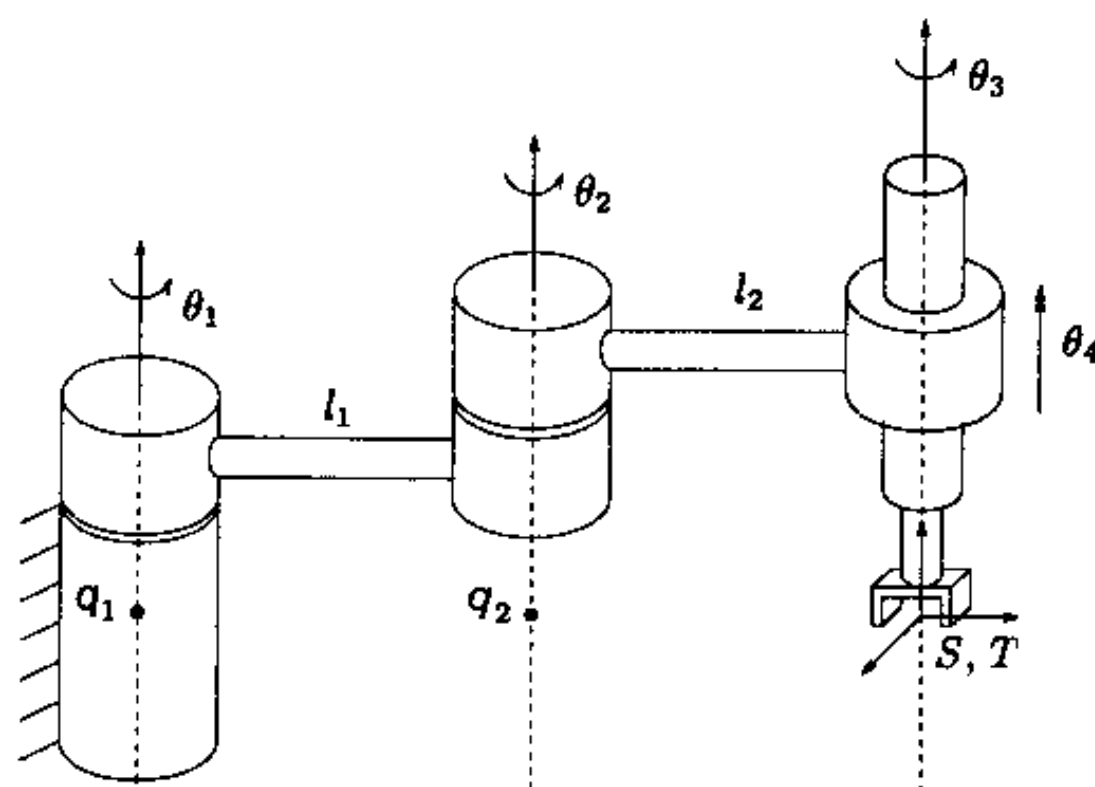


图 3.5 位于参考位形的 SCARA 机器人 [其基础坐标系与工具坐标系重合]

经同样的计算, 可得

$$\xi_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \xi_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

指数积公式可展开为

$$\begin{aligned} g_x(\theta) &= \begin{bmatrix} R(\theta) & p(\theta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ R(\theta) &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ p(\theta) &= \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -l_1 - l_2 + l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \theta_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.5)$$

这里 $g_x(0) = I$, 这是因为 $\theta = 0$ 时基础坐标系与工具坐标系重合。试与例 3.1 推导的运动学映射进行比较。

与 Denavit - Hartenberg 参数的关系

给定基础坐标系 S 和工具坐标系 T 时, 与机器人各关节相对应的运动螺旋坐标提供了机器人运动学的完整参数。另一种机器人标准用参数是 Denavit - Hartenberg 参数^[25]。下面讨论这两种参数的关系和特点。

通过引入一系列的规则来确定固定于机器人各连杆上的坐标系 L_i 的位姿, 然后构造相邻坐标系间的齐次变换 $g_{l_{i-1}l_i}$, 即可获得 Denavit - Hartenberg 参数。通常用 L_0 表示基础坐标系, 机构的运动学方程可以写为

$$g_{st}(\theta) = g_{l_0l_1}(\theta_1)g_{l_1l_2}(\theta_2)\cdots g_{l_{n-1}l_n}(\theta_n)g_{l_nt} \quad (3.6)$$

上式与式 (3.1) 正好一致。其中变换 $g_{l_{i-1}l_i}$ 具有以下形式

$$g_{l_{i-1}l_i} = \begin{bmatrix} \cos\phi_i & -\sin\phi_i\cos\alpha_i & \sin\phi_i\sin\alpha_i & a_i\cos\phi_i \\ \sin\phi_i & \cos\phi_i\cos\alpha_i & -\cos\phi_i\sin\alpha_i & a_i\sin\phi_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中四个标量 α_i 、 a_i 、 d_i 、 ϕ_i 为第 i 个连杆的参数。对于转动关节, ϕ_i 对应于关节变量 θ_i ; 对于移动关节, d_i 对应于关节变量 θ_i 。标准工业机器人的 Denavit - Hartenberg 参数是已知的, 且常用于商业机器人仿真及编程系统。

令人惊奇的是, 描述相邻连杆的相对位移只需要四个参数, 而每个关节的运动螺旋却需要六个独立参数, 这是由于连杆坐标系的巧妙选择而省去了一些特定量。事实上, 这可以根据相邻连杆坐标系的关系得到各参数的物理解释。更具体的讨论见 Spong & Vidyasagar^[111]。

机器人各关节的运动螺旋坐标与 Denavit - Hartenberg 参数之间并不存在一个简单的一对一映射关系, 这是因为各关节的运动螺旋都是相对于唯一的基础坐标系描述的, 从而并不能直接反映各连杆相对于前一连杆的相对运动。为说明这一点, 假设 $\xi_{i-1,i}$ 是第 i 个连杆相对于前一连杆坐标系的运动螺旋, 那么 $g_{l_{i-1}l_i}$ 为

$$g_{l_{i-1}l_i} = e^{\hat{\xi}_{i-1,i}\theta_i}g_{l_{i-1}l_i}(0) \quad (3.7)$$

运动学映射的正解变为

$$g_{st}(\theta) = e^{\hat{\xi}_{01}\theta_1}g_{l_0l_1}(0)e^{\hat{\xi}_{12}\theta_2}g_{l_1l_2}(0)\cdots e^{\hat{\xi}_{n-1,n}\theta_n}g_{l_{n-1}l_n}(0) \quad (3.8)$$

这显然与指数积公式不同, 虽然看上去有些类似。

运动螺旋 ξ_i 与 $g_{l_{i-1}l_i}(0)$ 及 $\xi_{i-1,i}$ 的关系可以用伴随映射确定。首先将式 (3.8) 改写为

$$g_{st}(\theta) = e^{\hat{\xi}_{01}\theta_1}(g_{l_0l_1}(0)e^{\hat{\xi}_{12}\theta_2}g_{l_0l_1}^{-1}(0)) \\ (g_{l_0l_2}(0)e^{\hat{\xi}_{23}\theta_3}g_{l_0l_2}^{-1}(0))\cdots(g_{l_0l_{n-1}}(0)e^{\hat{\xi}_{n-1,n}\theta_n}g_{l_0l_{n-1}}^{-1}(0))g_{l_0t}(0) \quad (3.9)$$

利用以下关系

$$ge^{\hat{\xi}\theta}g^{-1} = e^{(Ad_{g^{-1}})\xi}\theta$$

对式 (3.9) 进行简化, 可得

$$g_{st}(\theta) = e^{\hat{\xi}_{01}\theta_1}e^{(Ad_{g_{l_0l_1}(0)}\hat{\xi}_{12})\theta_2}\cdots e^{(Ad_{g_{l_0l_{n-1}}(0)}\hat{\xi}_{n-1,n})\theta_n}g_{l_0t}(0)$$

由此立即可得

$$\xi_i = Ad_{g_{i-1,i}^{-1}} \xi_{i-1,i} \quad (3.10)$$

上式说明运动螺旋 ξ_i 就是位于参考位形时第 i 个关节相对于基础坐标系的运动螺旋。

当给定机器人的 Denavit - Hartenberg 参数时, 对应的运动螺旋 ξ_i 可以通过式 (3.7) 中的指数坐标对 $g_{i-1,i}$ 进行参数化, 然后运用式 (3.10) 确定。然而几乎在所有的情况下, 通过写出关节轴线的方向 (例如对于转动关节, 在各关节轴线上取一点) 来直接构造关节运动螺旋是很容易的。事实上指数积公式的最有吸引力的特点之一就是它只用两个坐标系, 基础坐标系 S 和工具坐标系 T 。该特点与运动螺旋 ξ_i 的几何特性相结合, 使得指数积公式成为 Denavit - Hartenberg 参数的最佳替代。

2.4 机器人的工作空间

机器人的工作空间定义 (workspace) 为: 不同关节转角所达到的末端执行器的所有位形的集合。若 Q 为机器人的位形空间, $g_s: Q \rightarrow SE(3)$ 为运动学映射的正解, 则工作空间定义为集合

$$W = \{g_s(\theta): \theta \in Q\} \subset SE(3) \quad (3.11)$$

当对机器人所执行的任务进行规划时, 操作器的所有预期运动必须位于工作空间内。上式所表示的工作空间称为机器人的总工作空间 (complete workspace)。

作为 $SE(3)$ 子集的工作空间的特性往往难于理解。为此可以考虑不同关节转角所达到的末端执行器的所有位置的集合 (在 $\mathbb{R}^3$ 中), 该集合称为可达工作空间 (reachable workspace), 定义为

$$W_R = \{p(\theta): \theta \in Q\} \subset \mathbb{R}^3 \quad (3.12)$$

其中 $p(\theta): Q \rightarrow \mathbb{R}^3$ 为运动映射正解 g_s 的位置分量。可达工作空间是某一姿态下末端执行器的位置在 $\mathbb{R}^3$ 中所达到空间的体积。

因为可达工作空间无需考虑末端执行器实现姿态的能力。对于有些操作任务不能用它来度量机器人的工作范围。机器人的灵活工作空间 (dextrous workspace) 是机器人任意姿态下末端执行器所达到位置空间的体积

$$W_D = \{p \in \mathbb{R}^3: \forall R \in SO(3), \exists \theta, g_s(\theta) = (p, R)\} \subset \mathbb{R}^3 \quad (3.13)$$

灵活工作空间在任务规划中是很有用的, 因为当物体位于灵活工作空间内时可以不考虑末端执行器的姿态。

对于一般的机器人, 其灵活工作空间很难计算。工业机器人的共同特点是在其末端安装了球形手腕, 如例 3.2 中的肘机器人, 如前所述球形手腕由轴线汇交于一点的三个正交转动副组成。如果末端执行器的坐标系原点置于手腕轴线的汇交点处, 那么球形手腕可以实现给定的末端执行器位置时的任意姿态。因此对于具有球形手腕的机器人来说, 灵活工作空间等于可达工作空间, 即 $W_D = W_R$ 。而且末端执行器的总工作空间满足 $W = W_R \times SO(3)$ 。该结论仅当末端执行器的坐标系位于球形手腕的中心时才成立, 如果存在偏置, 分析就会复杂得多。

例 3.4 平面三连杆机器人的工作空间

考虑图 3.6a 所示的平面机器人。设 $g = (x, y, \phi)$ 表示末端执行器的位姿。机构的

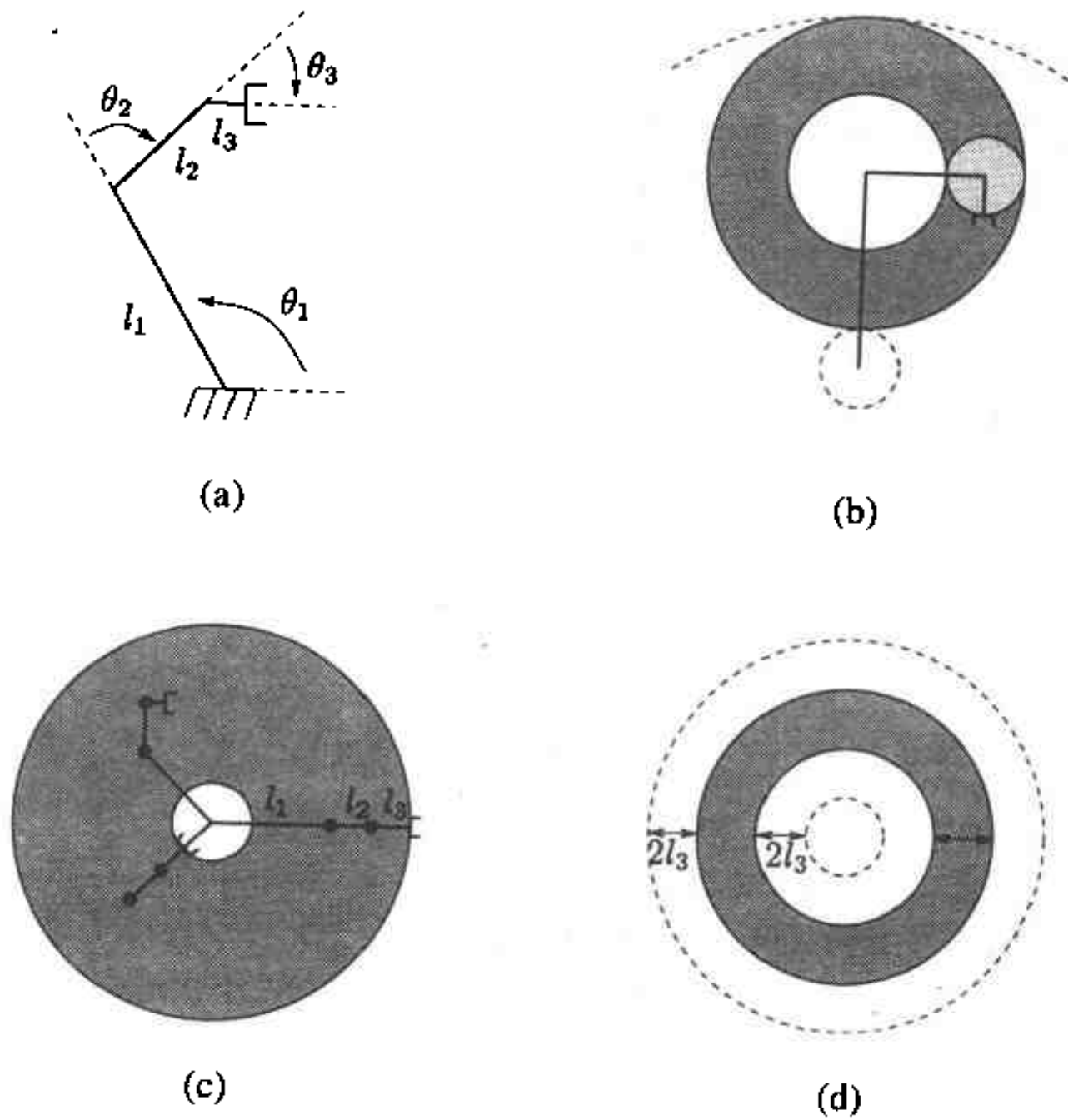


图 3.6 平面三连杆机器人的工作空间计算

(a) 机构图 (b) 工作空间的构成 (c) 可达工作空间 (d) 灵活工作空间

运动学正解可用指数积公式推导，但根据平面几何关系推导将更容易

$$\begin{aligned}
 x &= l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\
 y &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\
 \phi &= \theta_1 + \theta_2 + \theta_3
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

这里取 $l_1 > l_2 > l_3$ ，并设 $l_1 > l_2 + l_3$ 。

计算可达工作空间时可以不考虑末端执行器的姿态。为获得可达工作空间，先令 θ_1, θ_2 固定，此时可达点的集合变为 θ_3 遍历所有角度所形成的以 l_3 为半径的圆（见图 3.6b）。再使 θ_2 遍历所有角度，得到一个中心位于第一连杆的末端、以 $l_2 - l_3$ 为内径、以 $l_1 + l_2 + l_3$ 为外径的圆环。最后使该圆环遍历 θ_1 的所有值即得可达工作空间，其形状如图 3.6c 所示，由此可知 W_R 是一个内径为 $l_1 - l_2 - l_3$ 、外径为 $l_1 + l_2 + l_3$ 的圆环。

该机器人的灵活工作空间是难以理解的。虽然该机器人存在球形手腕的平面等价结构，但其末端执行器坐标系不在手腕的中心，这使得灵活工作空间的大小在内、外圆环边缘上缩小了 $2l_3$ ，如图 3.6d 所示。

3 运动学逆解

现在考虑运动学逆解 (inverse kinematics) 问题: 给定工具坐标系所期望的位形, 找出得到该位形的关节转角。也就是说, 给定运动学正解映射 $g_s: Q \rightarrow SE(3)$ 和一个期望的位形 $g_d \in SE(3)$, 通过求解下式

$$g_s(\theta) = g_d \quad (3.15)$$

获得 $\theta \in Q$ 。该问题可能有多解、唯一解或无解。

3.1 一个平面例子

为说明运动学逆解的一些特点, 首先考虑图 3.7a 所示平面二杆机器人的运动学逆解。运动学正解可以通过平面几何确定

$$\begin{aligned} x &= l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

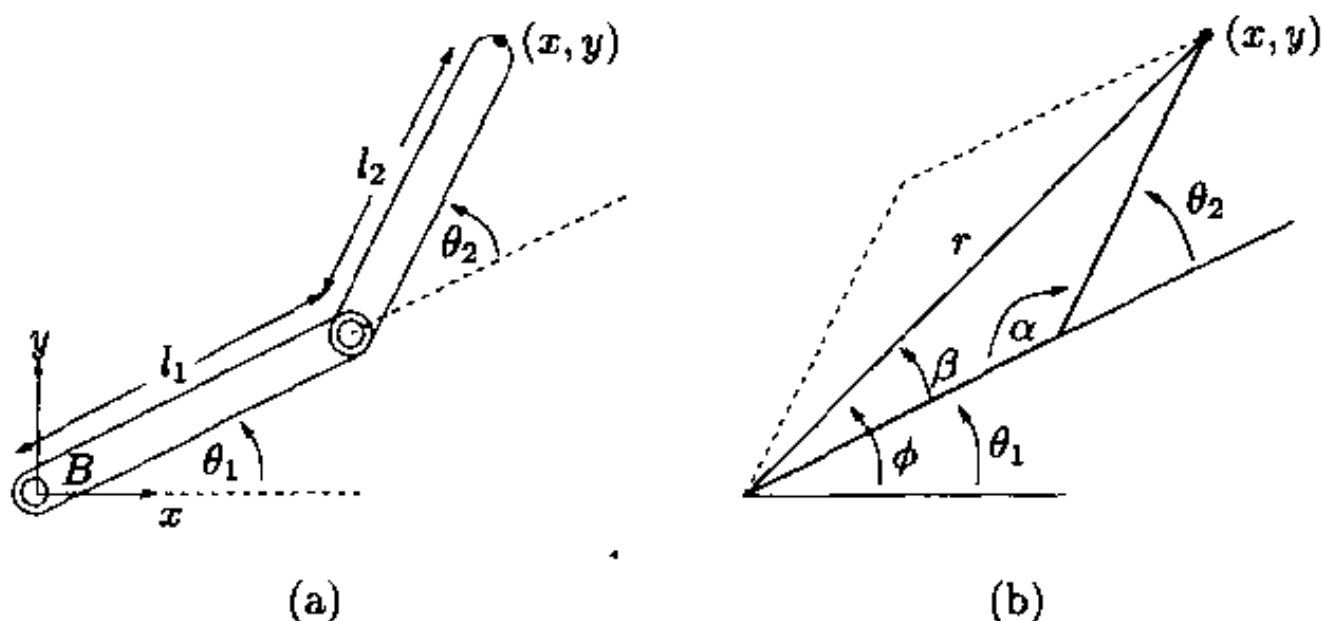


图 3.7 平面二杆机器人的运动学逆解

运动学逆解就是给定 x 和 y , 求解 θ_1 和 θ_2 。此问题的标准解法是使用如图 3.7b 所示的极坐标系 (r, ϕ) 。此时 θ_2 可根据 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和余弦定理确定

$$\theta_2 = \pi \pm \alpha \quad \alpha = \arccos \left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - r^2}{2l_1 l_2} \right) \quad (3.16)$$

如果 $\alpha \neq 0$, 则 θ_2 有两个不同解, 其中图 3.7b 虚线所示为第二个解。通过求解 ϕ 并由此确定 θ_1 即完成全部求解过程。此问题必须针对 θ_2 的每一个可能值进行求解, 由此得

$$\theta_1 = \text{atan2}(y, x) \pm \beta \quad \beta = \arccos \left(\frac{r^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1 r} \right)$$

其中 β 前的符号选择与 α 相同。

该平面例子说明了运动学逆解问题的几个重要特征。在求解运动学逆解时, 首先要将问题细分成几个子问题, 例如先由给定的 r 解出 θ_2 , 然后利用 θ_1 将末端执行器转至适当位置。每个子问题可能无解、有一个解或多个解, 这与末端执行器的给定位置有关。如果该位形超

出机器人的工作空间, 那么肯定无解, 且至少有一个子问题无解 (试想当 $r > l_1 + l_2$ 时上例会怎样)。当给定位形处于工作空间内, 且有多组关节转角对应于末端执行器的同一个位置映射, 此时即出现多解。如果某个子问题有多个解, 那么整个求解过程应考虑到此子问题的每一个解的情况。

通常运动学逆解可以分为两类: 封闭解 (closed-form solutions) 和数值解 (numerical solutions)。封闭解如上例, 它可以快速高效地计算出给定末端执行器位形所对应的关节转角; 数值解依赖于式 (3.15) 的求解方法。大多数工业机器人具有封闭解。这些解可以利用与上例类似的方法获得, 即利用几何或代数的统一性, 求解运动学逆解问题所对应的非线性、耦合的代数方程。求解运动学逆解的典型方法可参考 Craig^[21] 的文献。

3.2 Paden-Kahan 子问题

利用运动学正解映射的指数积公式可以构造运动学逆解问题的几何算法。这种算法首先由 Paden^[86] 提出, 建立于 Kahan^[42] 的著作中。

为求解运动学逆解问题, 必须首先解决一般机器人设计中经常遇到的逆解子问题, 然后设法将整个运动学逆问题分解成若干个解为已知的子问题。这里所述子问题的特点之一是它们具有明确的几何意义和数值稳定性。应注意实际情况下可能出现的子问题类型很多, 有些机器人就不能利用这些典型子问题进行求解。习题中给出了一些其他的子问题情况。

下面所述的每一个子问题, 都给出了相应的几何描述和详细解法。第一次阅读这部分内容时, 可能难于理解各子问题间的关系。建议第一次阅读时先跳过具体解法, 直至看懂本节后续例子中是如何运用这些子问题的。

子问题 1 绕一个轴的旋转

设 ξ 为一个零节距的单位运动螺旋, $p, q \in \mathbb{R}^3$ 是两点。现求满足下式的 θ

$$e^{\hat{\xi}\theta} p = q \quad (3.17)$$

解: 该问题对应于将一点 p 绕给定轴 ξ 旋转至与第二点 q 重合, 如图 3.8a 所示。假设 r 是轴 ξ 上的一点, 定义 $u = (p - r)$ 是 r 与 p 间的矢量, $v = (q - r)$ 是 r 与 q 间的矢量。由式 (3.17) 和 $\exp(\hat{\xi}\theta)r = r$ (因 r 位于轴 ξ 上) 可得

$$e^{\hat{\xi}\theta} u = v \quad (3.18)$$

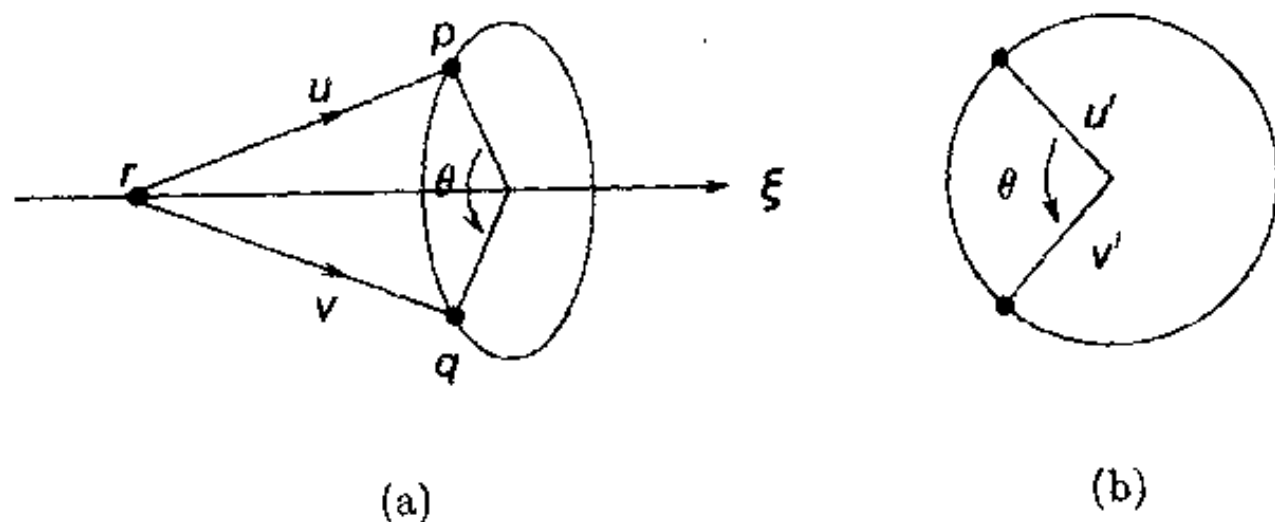


图 3.8 子问题 1

(a) 将点 p 绕轴 ξ 旋转至与点 q 重合 (b) u 和 v 在垂直于运动螺旋轴平面上的投影

因此有 $\exp(\hat{\xi}\theta)u = \exp(\hat{\omega}\theta)u$ 。

为确定该问题何时解，定义 u' 、 v' 为 u 、 v 在垂直于轴 ξ 的平面上的投影。如果 $\omega \in \mathcal{R}^3$ 是 ξ 轴方向的单位矢量，那么

$$u' = u - \omega\omega^T u \quad \text{和} \quad v' = v - \omega\omega^T v$$

该问题有解当且仅当 u 、 v 在 ω 轴上的投影和在与 ω 垂直的平面上的投影具有相同的长度。严格地说，如果将式 (3.18) 向 ω 生成的空间和 ω^T 的零空间投影，即得必要条件

$$\omega^T u = \omega^T v \quad \text{和} \quad \|u'\| = \|v'\| \quad (3.19)$$

如果式 (3.19) 成立，那么仅由图 3.8b 所示的投影矢量 u' 、 v' 就可求得 θ 。若 $u' \neq 0$ ，则利用如下关系就可确定 θ

$$\begin{aligned} u' \times v' &= \omega \sin\theta \|u'\| \|v'\| \\ u' \cdot v' &= \cos\theta \|u'\| \|v'\| \end{aligned} \Rightarrow \theta = \arctan 2(\omega^T(u' \times v'), u'^T v')$$

若 $u' = 0$ ，则有无穷多个解，因此此时 $p = q$ 且两点位于旋转轴上。

子问题 2 绕两个有序轴的旋转

设 ξ_1 和 ξ_2 为两个零节距、轴线相交的单位运动螺旋， $p, q \in \mathcal{R}^3$ 是两点。现求满足下式的 θ_1 和 θ_2 ：

$$e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} p = q \quad (3.20)$$

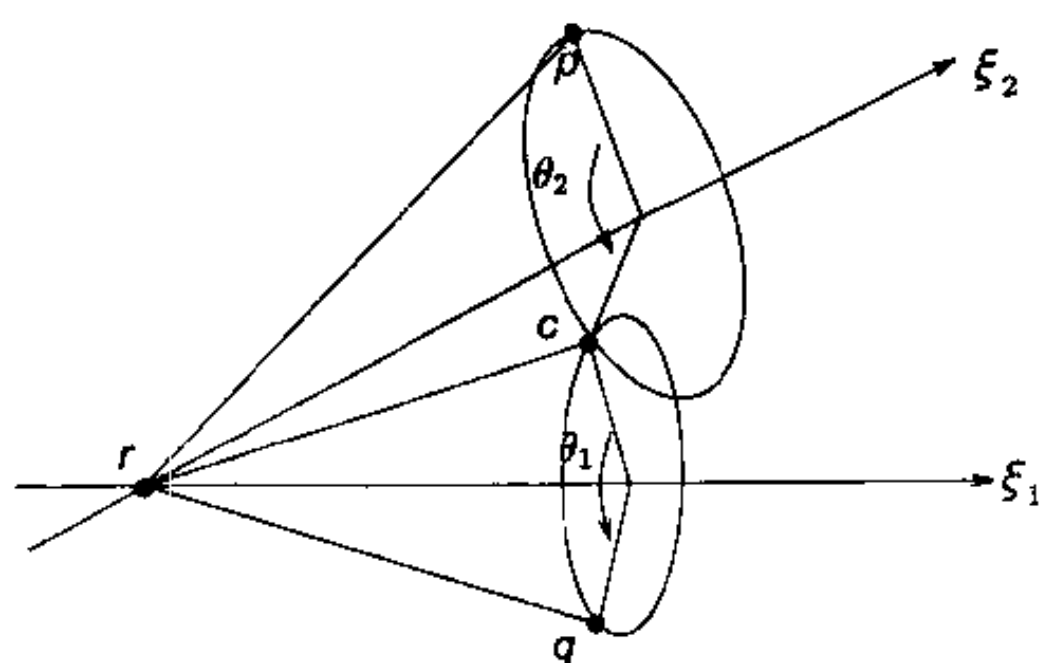


图 3.9 子问题 2

[将点 p 先绕轴 ξ_2 旋转再绕轴 ξ_1 旋转至与点 q 重合]

解：该问题对应于将一点 p 先绕 ξ_2 旋转 θ_2 再绕轴 ξ_1 旋转 θ_1 ， p 的最后位置能与点 q 重合，如图 3.9 所示。如果轴线 ξ_1 和 ξ_2 重合，该问题退化为子问题 1，且满足 $\theta_1 + \theta_2 = \theta$ 的任意 θ_1, θ_2 都是解，其中 θ 是子问题 1 的解。

如果这两个轴线不平行，即 $\omega_1 \times \omega_2 \neq 0$ ，并设 c 是满足下式的点

$$e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} p = c = e^{-\hat{\xi}_1 \theta_1} q \quad (3.21)$$

换句话说， c 表示 p 绕 ξ_2 旋转 θ_2 所得之点。设 r 是两轴线的交点，那么

$$e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} (p - r) = c - r = e^{-\hat{\xi}_1 \theta_1} (q - r) \quad (3.22)$$

与前相同，定义矢量 $u = (p - r)$ ， $v = (q - r)$ ， $z = (c - r)$ 。将其代入式 (3.22) 得

$$e^{\hat{\omega}_2 \theta_2} u = z = e^{-\hat{\omega}_1 \theta_1} v$$

上式表明

$$\omega_2^T u = \omega_2^T z \quad \text{和} \quad \omega_1^T v = \omega_1^T z \quad (3.23)$$

且 $\|u\|^2 = \|z\|^2 = \|v\|^2$ 。因 ω_1 、 ω_2 和 $\omega_1 \times \omega_2$ 是线性独立的，故有

$$z = \alpha \omega_1 + \beta \omega_2 + \gamma (\omega_1 \times \omega_2) \quad (3.24)$$

和

$$\|z\|^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\omega_1^T\omega_2 + \gamma^2\|\omega_1 \times \omega_2\|^2 \quad (3.25)$$

将式 (3.24) 代入式 (3.23) 得含两个未知量的两个方程

$$\begin{aligned} \omega_2^T u &= \alpha\omega_2^T\omega_1 + \beta \\ \omega_1^T v &= \alpha + \beta\omega_1^T\omega_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha &= \frac{(\omega_1^T\omega_2)\omega_2^T u - \omega_1^T v}{(\omega_1^T\omega_2)^2 - 1} \\ \beta &= \frac{(\omega_1^T\omega_2)\omega_1^T v - \omega_2^T u}{(\omega_1^T\omega_2)^2 - 1} \end{aligned}$$

由式 (3.25) 求解 γ^2 , 并利用 $\|z\|^2 = \|u\|^2$ 得

$$\gamma^2 = \frac{\|u\|^2 - \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta\omega_1^T\omega_2}{\|\omega_1 \times \omega_2\|^2}$$

上式可能没有实根, 也可能有 1 个或 2 个实根。在有根的情况下, 由 α 、 β 和 γ 可以求得 z 和 c 。

为求 θ_1 和 θ_2 , 利用子问题 1 解下式

$$e^{\xi_2\theta_2}p = c \quad \text{和} \quad e^{-\xi_1\theta_1}q = c$$

如果 c 有多个解, 对应于每个 c 值都能解出相应的 θ_1 和 θ_2 。当图 3.9 中的圆相交于两个点时存在两个解, 圆相切时只有一解, 圆分离时无解。

子问题 3 旋转至给定距离

设 ξ 为一个零节距的单位运动旋量, $p, q \in \mathbb{R}^3$ 是两点, δ 是一大于零的实数。现求满足下式的 θ

$$\|q - e^{\xi\theta}p\| = \delta \quad (3.26)$$

解: 该问题对应于将一点 p 绕轴 ξ 旋转直至该点与点 q 的距离为 δ , 如图 3.8a 所示。如果点 p 绕轴 ξ 旋转所得之圆与中心位于 q 半径为 δ 的球面有交点, 则有解存在。

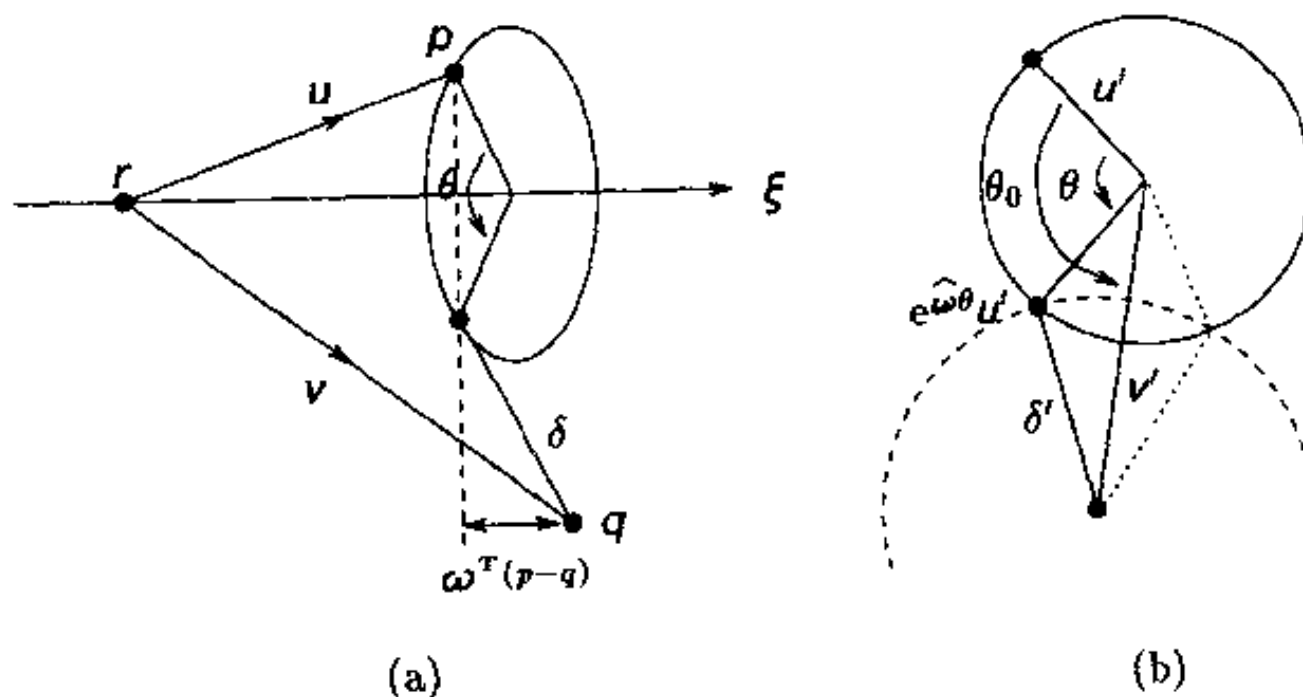


图 3.10 子问题 3

(a) 点 p 绕轴 ξ 旋转直至该点与点 q 的距离为 δ

(b) 在垂直于 ω 平面上的投影, 虚线是另一解

为得到明确的解, 将所有点向垂直于 ω (轴 ξ 的方向) 的平面投影。假设 r 是轴 ξ 上的一点, 并定义 $u = (p - r)$ 和 $v = (q - r)$ 使得下式成立

$$\|v - e^{\hat{\xi}\theta}u\|^2 = \delta^2 \quad (3.27)$$

u 和 v 的投影为

$$u' = u - \omega\omega^T u \quad \text{和} \quad v' = v - \omega\omega^T v$$

同样可以去掉 $p - q$ 在 ω 方向的分量后对 δ 进行投影

$$\delta^2 = \delta^2 - |\omega^T(p - q)|^2$$

因而式 (3.27) 成为 (见图 3.10b)

$$\|v' - e^{\hat{\omega}\theta}u'\|^2 = \delta^2$$

设 θ_0 是矢量 u' 和 v' 的夹角, 则有

$$\theta_0 = \alpha \tan 2(\omega^T(u' \times v'), u'^T v') \quad (3.28)$$

现在可以用余弦定理来求解角 $\phi = \theta_0 - \theta$ 。由轴中心与 $\exp(\hat{\omega}\theta)u'$ 和 v' 构成的三角形满足

$$\|u'\|^2 + \|v'\|^2 - 2\|u'\|\|v'\|\cos\phi = \delta^2$$

因而

$$\theta = \theta_0 \pm \arccos\left(\frac{\|u'\|^2 + \|v'\|^2 - \delta^2}{2\|u'\|\|v'\|}\right) \quad (3.29)$$

式 (3.29) 可能无解, 也可能有 1 个或 2 个解, 这取决于半径为 $\|u'\|$ 的圆与半径为 δ' 的圆的交点数目。

3.3 利用子问题求解运动学逆问题

有了上述子问题的解后, 现在要找出如何将一个完整的运动学逆解问题转换成适当子问题的技巧。

简化的基本技巧是将运动学方程运用于特殊点, 如两个或多个轴的交点。这是一个有效方法, 因为当点 p 位于转动运动旋量 ξ 的轴上时, 有 $\exp(\hat{\xi}\theta)p = p$ 。利用这一点, 可以通过选择适当的点来消去某些关节转角的耦合。例如为求解

$$e^{\hat{\xi}_1\theta_1}e^{\hat{\xi}_2\theta_2}e^{\hat{\xi}_3\theta_3} = g$$

这里 ξ_1 、 ξ_2 和 ξ_3 都是零节矩运动旋量。将上式两端用于轴 ξ_3 上的 p 点, 有

$$e^{\hat{\xi}_1\theta_1}e^{\hat{\xi}_2\theta_2}p = gp$$

上式可以用子问题 2 进行求解 (ξ_1 与 ξ_2 相交的情况)。

另一种化为子问题的通用方法是从等式两边减去同一点, 并对所得结果取范数。因刚体运动保持范数不变, 由此可以消去某些耦合项。例如为求解 ξ_3 和 ξ_1 、 ξ_2 相交于 q 的下式

$$e^{\hat{\xi}_1\theta_1}e^{\hat{\xi}_2\theta_2}e^{\hat{\xi}_3\theta_3} = g$$

将上式两边用于不位于 ξ_3 轴上的点 p , 并减去 q 。对所得结果取范数得

$$\begin{aligned} \delta &:= \|gp - q\| = \|e^{\hat{\xi}_1\theta_1}e^{\hat{\xi}_2\theta_2}e^{\hat{\xi}_3\theta_3}p - q\| \\ &= \|e^{\hat{\xi}_1\theta_1}e^{\hat{\xi}_2\theta_2}(e^{\hat{\xi}_3\theta_3}p - q)\| = \|e^{\hat{\xi}_3\theta_3}p - q\| \end{aligned}$$

这就是子问题 3。

下面说明如何运用 3.2 节中的子问题来求解一般机器人的运动学逆解。习题中给出了一些其他的例子。

例 3.5 肘机器人的运动学逆解

图 3.11 所示肘机器人由一个三自由度机器人和一个球腕组成, 其特殊的结构简化了运动学逆解, 它符合前述的子问题。

需要求解的方程为

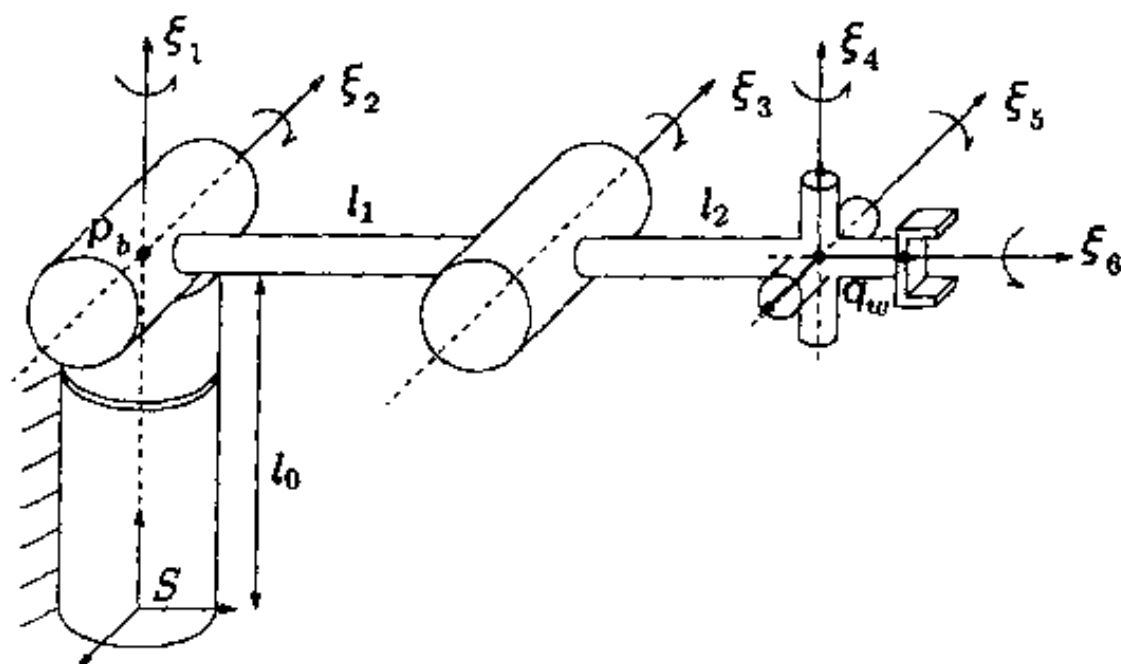


图 3.11 肘机器人

$$g_s(\theta) = e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} \cdots e^{\hat{\xi}_6 \theta_6} g_s(0) = g_d$$

其中 $g_d \in SE(3)$ 是工具坐标系的期望位形。上式右乘 $g_s^{-1}(0)$ 得指数映射

$$e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} \cdots e^{\hat{\xi}_6 \theta_6} = g_d g_s^{-1}(0) =: g_1 \quad (3.30)$$

下面分四步来确定所要求的关节转角。

第一步 (求肘关节转角 θ_3): 将式 (3.30) 两边用于腕关节轴线的交点 $p_w \in \mathbb{R}^3$ 。若 p_w 位于轴 ξ_3 上, $\exp(\hat{\xi}_3 \theta_3) p_w = p_w$, 则

$$e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} e^{\hat{\xi}_3 \theta_3} p_w = g_1 p_w \quad (3.31)$$

从式 (3.31) 两边减去前两个轴的交点 p_b , 如图 3.11 所示

$$e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} e^{\hat{\xi}_3 \theta_3} p_w - p_b = e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} (e^{\hat{\xi}_3 \theta_3} p_w - p_b) = g_1 p_w - p_b \quad (3.32)$$

利用刚体运动两点间距离保持不变的特性, 取式 (3.32) 两边的大小

$$\|e^{\hat{\xi}_3 \theta_3} p_w - p_b\| = \|g_1 p_w - p_b\| \quad (3.33)$$

上式符合子问题 3 的形式, 其中 $p = p_w$, $q = p_b$ 和 $\delta = \|g_1 p_w - p_b\|$ 。运用子问题 3, 可以求 θ_3 。

第二步 (求基座关节转角): 因 θ_3 已知, 式 (3.31) 变为

$$e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} (e^{\hat{\xi}_3 \theta_3} p_w) = g_1 p_w \quad (3.34)$$

运用子问题 2, 其中 $p = \exp(\hat{\xi}_3 \theta_3) p_w$, $q = g_1 p_w$, 可求得 θ_1 和 θ_2 的值。

第三步 (求三个腕关节转角中的两个): 剩下的运动方程可以改写为

$$e^{\hat{\xi}_4 \theta_4} e^{\hat{\xi}_5 \theta_5} e^{\hat{\xi}_6 \theta_6} = e^{-\hat{\xi}_3 \theta_3} e^{-\hat{\xi}_2 \theta_2} e^{-\hat{\xi}_1 \theta_1} g_d g_s^{-1}(0) =: g_2 \quad (3.35)$$

将式 (3.35) 两边用于位于轴 ξ_6 上但不在 ξ_4 、 ξ_5 轴上的一点 p , 得

$$e^{\hat{\xi}_4 \theta_4} e^{\hat{\xi}_5 \theta_5} p = g_2 p \quad (3.36)$$

由子问题 2 可求得 θ_4 和 θ_5 。

第四步 (求其余的腕关节转角): 剩下未求出的仅是 θ_6 。将运动方程重新整理, 并将其两边用于 ξ_6 轴外的一点 p ,

$$e^{\hat{\xi}_6 \theta_6} p = e^{-\hat{\xi}_5 \theta_5} e^{-\hat{\xi}_4 \theta_4} \cdots e^{-\hat{\xi}_1 \theta_1} g_d g_{\pi}^{-1}(0) p =: q \quad (3.37)$$

由子问题 1 即可求得 θ_6 。

至此全部求得了 $\theta_1 \sim \theta_6$ 。由于式 (3.33)、式 (3.34) 和式 (3.36) 有多个解, 最多可能有 8 个解。注意, 在上述过程中首先是解出确定腕关节中心位置的三个转角, 然后再求解腕关节转角。

例 3.6 SCARA 机器人的运动学逆解

考虑图 3.12 所示的四自由度 SCARA 机器人。由例 3.1 推得的运动学正解可知工具位形为

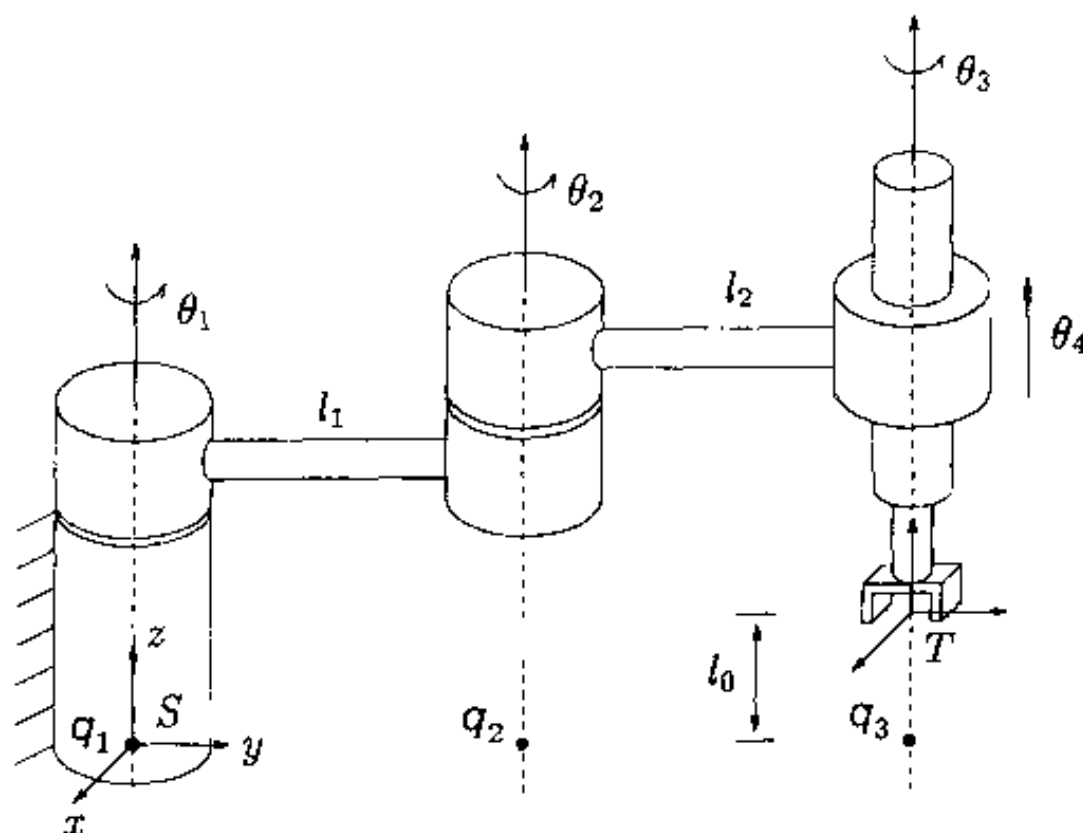


图 3.12 处于参考位形时的 SCARA 机器人

$$g_x(\theta) = e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} \cdots e^{\hat{\xi}_4 \theta_4} g_{\pi}(0) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & x \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =: g_d \quad (3.38)$$

因此, 当给定式 (3.38) 中的 x 、 y 、 z 和 φ 时, 即可求其运动学逆解。首先求 θ_4 , 将式 (3.38) 的两边用于工具坐标系的原点, 得

$$p(\theta) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_0 + \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

其中 $p(\theta)$ 是运动学正解的位置分量, 由式 (3.4) 给出。由 $p(\theta)$ 可得 $\theta_4 = z - l_0$ 。注意, θ_4 的求解并不能利用前面定义的任一子问题。

一旦 θ_4 已知, 对式 (3.38) 重新整理可得

$$e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} e^{\hat{\xi}_3 \theta_3} = g_d g_{\pi}^{-1}(0) e^{-\hat{\xi}_4 \theta_4} =: g_1 \quad (3.39)$$

设 p 是轴 ξ_3 上的一点, q 是轴 ξ_1 上的一点。将式 (3.39) 用于点 p , 并两边减去 q , 然后取范数

$$\begin{aligned}\|e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}\mathbf{p}-\mathbf{q}\| &= \|e^{\xi_1\theta_1}(e^{\xi_2\theta_2}\mathbf{p}-\mathbf{q})\| \\ &= \|e^{\xi_2\theta_2}\mathbf{p}-\mathbf{q}\| = \|g_1\mathbf{p}-\mathbf{q}\| =: \delta\end{aligned}\quad (3.40)$$

利用子问题 3 解出 θ_2 ，再将式 (3.39) 用于轴 ξ_3 上的一点 $\mathbf{p}'$ ，并根据子问题 1 对应的下式

$$e^{\xi_1\theta_1}e^{\xi_2\theta_2}e^{\xi_3\theta_3}\mathbf{p}' = e^{\xi_1\theta_1}(e^{\xi_2\theta_2}\mathbf{p}') = g_1\mathbf{p}'$$

求得 θ_1 。最后，对式 (3.39) 进行整理，将 θ_1 (已知) 和 θ_2 移至等号右边

$$e^{\xi_3\theta_3} = e^{-\xi_2\theta_2}e^{-\xi_1\theta_1}g_d g_{\sigma}^{-1}(\boldsymbol{\theta})e^{-\xi_4\theta_4}\quad (3.41)$$

将式 (3.41) 用于轴 ξ_3 外的一点 $\mathbf{p}$ ，并利用子问题 1 求得最后的一个量 θ_3 ，至此即完成了整个求解。

SCARA 机器人最多可能有两个解，与式 (3.40) 的解相对应。

3.4 运动学逆解问题的一般解法

前面各节给出了几何上和概念上的子问题集，大多数机器人的运动学逆解可以分解为此类子问题。当机器人至少存在若干个相交轴线时，该子问题集和在习题中对其扩充的子问题，对于运动学逆解方程的分解是很有用的。

而关键问题是如何求解一般机器人 (即机器人不存在任何相交轴线) 的运动学逆解问题，这是当前平面和空间机构研究中非常活跃的课题，特别是关于运动学逆解解的个数和如何使计算满足实时性要求的问题。本小节给出关于此方面的一些最新和最一般方法的简单概述^[58,65,96]。我们的研究几乎与 Manocha & Canny^[65] 同步。其方法主要是基于代数几何的经典消元理论，也就是从含有 n 个变量的 n 个多项式中消去 $n-1$ 个变量，得到只含一个变量的一个多项式。这是一个一般过程，它只考虑了机器人很简单的特性 (不象上述基于子问题的解法)。下面以含三个变量的三个非齐次多项式的例子来说明这个有时称之为分解消元的方法。

例 3.7 含三个变量的三个非齐次多项式的分解消元

设 f_1, f_2, f_3 为以 x_1, x_2, x_3 为变量的三个非齐次多项式，其形式如下

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & g_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & g_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & g_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1x_2 \\ x_1x_3 \\ x_2^2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中 $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, g_i$ ($i=1, \dots, 3$) 都是实数。为求解此含有 x_1, x_2, x_3 的三个非齐次多项式，下面用两步消去 x_2, x_3 ，从而得到一个仅含 x_1 的多项式。

第一步：将与 x_1 有关的项作为系数多项式，从而将上式表示成与 x_2, x_3 有关的多项式

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & e_1+c_1x_1 & b_1x_1 & a_1x_1^2+g_1 \\ d_2 & e_2+c_2x_1 & b_2x_1 & a_2x_1^2+g_2 \\ d_3 & e_3+c_3x_1 & b_3x_1 & a_3x_1^2+g_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2^2 \\ x_3 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

第二步：尽可能产生更多的与 f_1, f_2, f_3 无关的多项式，直到以 x_2, x_3 表示的未知单项式个数与方程个数相同。例如，将 f_1, f_2, f_3 乘以 x_2 ，可得与 f_1, f_2, f_3 无关的多项式组

$$\begin{bmatrix} x_2 f_1 \\ x_2 f_2 \\ x_2 f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & e_1 + c_1 x_1 & b_1 x_1 & a_1 x_1^2 + g_1 \\ d_2 & e_2 + c_2 x_1 & b_2 x_1 & a_2 x_1^2 + g_2 \\ d_3 & e_3 + c_3 x_1 & b_3 x_1 & a_3 x_1^2 + g_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2^3 \\ x_2 x_3 \\ x_2^2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

将上式与多项式 f_1, f_2, f_3 加以组合，可得以六个单项式 $x_2^3, x_2^2, x_2 x_3, x_2, x_3, 1$ 表示的六个方程的组合

$$\mathbf{A}(x_1) = \begin{bmatrix} d_1 & e_1 + c_1 x_1 & b_1 x_1 & a_1 x_1^2 + g_1 & 0 & 0 \\ d_2 & e_2 + c_2 x_1 & b_2 x_1 & a_2 x_1^2 + g_2 & 0 & 0 \\ d_3 & e_3 + c_3 x_1 & b_3 x_1 & a_3 x_1^2 + g_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & b_1 x_1 & e_1 + c_1 x_1 & a_1 x_1^2 + g_1 \\ 0 & 0 & d_2 & b_2 x_1 & e_2 + c_2 x_1 & a_2 x_1^2 + g_2 \\ 0 & 0 & d_3 & b_3 x_1 & e_3 + c_3 x_1 & a_3 x_1^2 + g_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2^3 \\ x_2 x_3 \\ x_2^2 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

因上式有一个解，显然矩阵 $\mathbf{A}(x_1)$ 乘以 $x_2^3, x_2^2, x_2 x_3, x_2, x_3, 1$ 后的行列式应为零。因此 $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ 等价于 $\det \mathbf{A}(x_1) = 0$ 。通常，这个关于 x_1 的多项式的方次很高（一般情况下，对于 $a_i, \dots, g_i$ 的所有可能值，其方次为 6），而且解并非一定是实数。但是多项式的方次即为实数解个数的上限，而且一旦求得实数解 x_1 ，就可以把 1 作为最后一项以考虑 $\mathbf{A}(x_1)$ 零空间的元素，从而得到 x_2, x_3 的解。如果矩阵 $\mathbf{A}(x_1)$ 的零空间的维数（对应于多项式 $\det \mathbf{A}(x_1) = 0$ 根的重数）大于 1，那么与 x_1 值对应的 x_2, x_3 存在重解。而解的确切重数是一个难解的问题^[65]，可以说与 x_1 值有关的 x_2, x_3 解的重数的上限就是 $\mathbf{A}(x_1)$ 零空间的维数。

六自由度机器人运动学逆解的一般处理方法

为将上述方法用于处理六连杆机器人的运动学逆解，有必要做一些预备工作。六连杆机器人的运动学关系可由下式给出

$$g_d(\theta) = e^{\hat{e}_1 \theta_1} \cdots e^{\hat{e}_6 \theta_6} g_d(0)$$

运动学逆解问题就是对于给定的 $g_d \in \text{SE}(3)$ 求 $\theta_1, \dots, \theta_6$ 。利用 Denavit-Hartenberg 参数将上式改写为

$$g_d(\theta) = g_{l_0 l_1}(\theta_1) g_{l_1 l_2}(\theta_2) \cdots g_{l_5 l_6}(\theta_6) g_{l_6 l} = g_d$$

选择适当的连杆坐标系后， $g_{l_{i-1} l_i}$ 的形式如下

$$g_{l_{i-1} l_i} = \begin{bmatrix} \cos \phi_i & -\sin \phi_i \cos \alpha_i & \sin \phi_i \sin \alpha_i & a_i \cos \phi_i \\ \sin \phi_i & \cos \phi_i \cos \alpha_i & -\cos \phi_i \sin \alpha_i & a_i \sin \phi_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

给定末端执行器的期望位姿 g_d ，故有

$$g_{l_2 l_3}(\theta_3) g_{l_3 l_4}(\theta_4) g_{l_4 l_5}(\theta_5) = g_{l_1 l_2}^{-1}(\theta_2) g_{l_0 l_1}^{-1}(\theta_1) g_{d l_6 l_5}^{-1} g_{l_5 l_6}^{-1}(\theta_6) \quad (3.43)$$

上面所做的仅是对 $g_{l_5 l_6}(\theta_6)$ 、 $g_{l_0 l_1}(\theta_1)$ 和 $g_{l_1 l_2}(\theta_2)$ 取逆, 并将其移至等号右侧。这种明智的调整以及选择 Denavit-Hartenberg 参数的理由将在下面处理过程的第一步中看出。 $g_{d l_6 l_5}^{-1}$ 可以用符号表示为

$$g_{d l_6 l_5}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|c} l_x & m_x & n_x & q_x \\ l_y & m_y & n_y & q_y \\ l_z & m_z & n_z & q_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (3.44)$$

因此, $l, m, n \in \mathbb{R}^3$ 是 $g_{d l_6 l_5}^{-1}$ 转动部分的列分量, $q \in \mathbb{R}^3$ 是其移动分量。

为了将有关代数几何方法用于包含正弦和余弦的方程, 定义 $c_i := \cos \theta_i$, $s_i := \sin \theta_i$, $i=1, \dots, 6$, 并将式 (3.43) 看作是关于 s_i 和 c_i 的多项式。事实上, 通过直接观察就可看出各指数项是关于 s_i 和 c_i 的一次型 unary (即方次 ≤ 1)。将运动方程改写为式 (3.43) 的部分原因是可以降低多项式中 s_i 和 c_i 的方次, 式 (3.43) 的等号左边和右边是关于 s_i 和 c_i 的三次方。消去除 θ_3 外其他所有变量的详细过程可以概括为下面几步, 每一步的细节和证明涉及的知识很广, 读者可以参阅上面引用的文献。

第一步: 证明式 (3.43) 中的第 3 和第 4 列与 θ_6 无关。这一步由 Denavit-Hartenberg 参数即可得证。实际上由式 (3.42) 对 $g_{l_6 l_5}(\theta_6)$ 取逆可得

$$g_{l_6 l_5}^{-1}(\theta_6) = \left[\begin{array}{ccc|c} c\theta_6 & s\theta_6 & 0 & a_6 \\ -ca_6 s\theta_6 & ca_6 c\theta_6 & sa_6 & -d_6 sa_6 \\ sa_6 s\theta_6 & -sa_6 c\theta_6 & ca_6 & -d_6 ca_6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

因此式 (3.43) 右侧的最后两列与 θ_6 无关。

第二步: 令式 (3.43) 等号左右两侧的第三、第四列分别相等, 由此得关于 θ_i , $i=1, \dots, 5$ 的六个方程

$$\begin{aligned} \text{EQ1: } & c_3 f_1 + s_3 f_2 = c_2 h_1 + s_2 h_2 - a_2 \\ \text{EQ2: } & s_3 f_1 - c_3 f_2 = -\lambda_2 (s_2 h_1 - c_2 h_2) + \mu_2 (h_3 - d_2) \\ \text{EQ3: } & f_3 = \mu_2 (s_2 h_1 - c_2 h_2) + \lambda_2 (h_3 - d_2) \\ \text{EQ4: } & c_3 r_1 + s_3 r_2 = c_2 n_1 + s_2 n_2 \\ \text{EQ5: } & s_3 r_1 - c_3 r_2 = -\lambda_2 (s_2 n_1 - c_2 n_2) + \mu_2 n_3 \\ \text{EQ6: } & r_3 = \mu_3 (s_2 n_1 - c_2 n_2) + \lambda_2 n_3 \end{aligned} \quad (3.45)$$

其中

$$\begin{aligned} f_1 &= c_4 g_1 + s_4 g_2 + a_3 & f_2 &= \mu_3 g_3 - \lambda_3 (s_4 g_1 - c_4 g_2) & f_3 &= \mu_3 (s_4 g_1 - c_4 g_2) + \lambda_3 g_3 + d_3 \\ r_1 &= c_4 m_1 + s_4 m_2 & r_2 &= \mu_3 m_3 - \lambda_3 (s_4 m_1 - c_4 m_2) & r_3 &= \mu_3 (s_4 m_1 - c_4 m_2) + \lambda_3 m_3 \\ g_1 &= c_5 a_5 + a_4 & g_2 &= \mu_4 d_5 - \lambda_4 s_5 a_5 & g_3 &= -s_5 \mu_4 a_5 + \lambda_4 d_5 + d_4 \\ m_1 &= s_5 \mu_5 & m_2 &= c_5 \lambda_4 \mu_5 + \mu_4 \lambda_5 & m_3 &= -c_5 \mu_4 \mu_5 + \lambda_4 \lambda_5 \\ h_1 &= c_1 p + s_1 q - a_1 & h_2 &= \mu_1 (r - d_1) - \lambda_1 (s_1 p - c_1 q) & h_3 &= \mu_1 (s_1 p - c_1 q) + \lambda_1 (r - d_1) \\ n_1 &= c_1 u + s_1 v & n_2 &= \mu_1 w - \lambda_1 (s_1 u - c_1 v) & n_3 &= \mu_1 (s_1 u - c_1 v) + \lambda_1 w \end{aligned}$$

标量 a_i , d_i 是连杆的 Denavit-Hartenberg 参数, $\mu_i = \sin \alpha_i$, $\lambda_i = \cos \alpha_i$ 。期望位形由下列参数确定

$$\begin{aligned} p &= -l_x a_6 - (m_x \mu_6 + n_x \lambda_6) d_6 + q_x & u &= m_x \mu_6 + n_x \lambda_6 \\ q &= -l_y a_6 - (m_y \mu_6 + n_y \lambda_6) d_6 + q_y & v &= m_y \mu_6 + n_y \lambda_6 \\ r &= -l_z a_6 - (m_z \mu_6 + n_z \lambda_6) d_6 + q_z & w &= m_z \mu_6 + n_z \lambda_6 \end{aligned}$$

其中 $l = (l_x, l_y, l_z)$, $m = (m_x, m_y, m_z)$, $n = (n_x, n_y, n_z)$ 和 $q = (q_x, q_y, q_z)$ 由式(3.44)定义。

第三步: 利用 $h, f, n, r \in \mathbb{R}^3$ 分量的定义, 对方程 EQ1-EQ6 进行重新整理, 可得

$$\begin{aligned} p &= \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \mu_2 \\ 0 & \mu_2 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & s_3 & 0 \\ s_3 & -c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f + \begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \\ d_2 \end{bmatrix} \\ l &= \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \mu_2 \\ 0 & \mu_2 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & s_3 & 0 \\ s_3 & -c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} r \end{aligned} \quad (3.46)$$

p 和 l 的左边是 $1, c_2, s_2, c_1, s_1, c_1 c_2, s_1 c_2, s_1 s_2$ 的线性组合, 右边是以 s_3, c_3 为函数的 $1, c_3, s_3, c_4, s_4, c_4 c_5, s_4 c_5, s_4 s_5$ 的线性组合。

第四步: 经过大量的计算, 利用运动学关系, 可知下列各项

$$l \quad p \quad p \cdot p \quad p \cdot l \quad p \times l \quad (p \cdot p)l - 2(p \cdot l)p$$

具有与 p 和 l 相同的函数形式, 这是因为它们取决于 p 和 l 的左、右侧各变量的线性组合, 它们给出了 $3+3+1+1+3+3=14$ 个方程。将这 14 个方程加以组合, 即得如下形式的方程

$$P(s_3, c_3) \begin{bmatrix} s_4 s_5 \\ s_4 c_5 \\ c_4 s_5 \\ c_4 c_5 \\ s_4 \\ c_4 \\ s_5 \\ c_5 \\ 1 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} s_1 s_2 \\ s_1 c_2 \\ c_1 s_2 \\ c_1 c_2 \\ s_1 \\ c_1 \\ s_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

上式 $P(s_3, c_3) \in \mathbb{R}^{14 \times 9}$ 是 s_3, c_3 的函数, $Q \in \mathbb{R}^{14 \times 8}$ 是一个常数矩阵。

第五步: 如果矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{14 \times 8}$ 的秩是 8, 利用式 (3.47) 中 14 个方程中的任意 8 个可以求得下列 8 个变量

$$s_1 s_2 \quad s_1 c_2 \quad c_1 s_2 \quad c_1 c_2 \quad s_1 \quad c_1 \quad s_2 \quad c_2$$

根据这些变量可得

$$s_4 s_5 \quad s_4 c_5 \quad c_4 s_5 \quad c_4 c_5 \quad s_4 \quad c_4 \quad s_5 \quad c_5$$

利用式 (3.47) 中剩余的 6 个方程得如下形式的 6 个方程

$$\Sigma(c_3, s_3) \begin{bmatrix} s_4 s_5 \\ s_4 c_5 \\ c_4 s_5 \\ c_4 c_5 \\ s_4 \\ c_4 \\ s_5 \\ c_5 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.48)$$

其中 $\Sigma(c_3, s_3) \in \mathbb{R}^{6 \times 9}$ 。

如果 Q 的秩是小于 8 的整数 k ，那么只能解出变量 $s_1 s_2, s_1 c_2, c_1 s_2, s_1, c_1, s_2, c_2$ 中的 k 个，将含 $9+8-k$ 个变量的 6 个方程代替式 (3.48)。在此对详细算法不作讨论，读者可参阅 [65]。

第六步：假定 Q 的秩是 8，由此存在式 (3.48)。引入如下代换

$$s_i = \frac{2x_i}{1+x_i^2} \quad c_i = \frac{1-x_i^2}{1+x_i^2}$$

其中 $i=3, 4, 5, x_i = \tan(\theta_i/2)$ 。

将其代入式 (3.48)，并将每一方程乘以 $(1+x_4^2)$ 和 $(1+x_5^2)$ 以消去分母。现将前 4 个方程乘以 $(1+x_3^2)$ 得

$$\Sigma_1(x_3) \begin{bmatrix} x_4^2 x_5^2 \\ x_4^2 x_5 \\ x_4^2 \\ x_4 x_5^2 \\ x_4 x_5 \\ x_5^2 \\ x_5 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.49)$$

式 (3.49) 的前四个方程是分母为 $(1+x_3^2)$ 的关于 x_3 的二次方程，而后两个方程是分母为 $(1+x_3^2)$ 的关于 x_3 的有理函数。但 Σ 的任一 6×6 子阵的行列式都是关于 x_3 的多项式 (该结论需要证明)。

第七步：现在可以用分解消元法消去前面例子中的 x_4, x_5 ，将式 (3.49) 中的 6 个方程乘以 x_4 ，然后将其与原方程加以组合，得如下形式的 12 个方程

$$\bar{\Sigma} := \begin{bmatrix} \Sigma_1(x_3) & 0 \\ 0 & \Sigma_1(x_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4^3 x_5^2 \\ x_4^3 x_5 \\ x_4^3 \\ x_4^2 x_5^2 \\ x_4^2 x_5 \\ x_4^2 \\ x_4 x_5^2 \\ x_4 x_5 \\ x_4 \\ x_5^2 \\ x_5 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.50)$$

其中矩阵 $\Sigma_1(x_3) \in \mathbb{R}^{6 \times 9}$ ，零矩阵的维数是 6×3 ，因而式 (3.50) 左侧的整个矩阵属于 $\mathbb{R}^{12 \times 12}$ 。

第八步：多项式方程 $\det \bar{\Sigma} = 0$ 是一个关于 x_3 的 16 次多项式。一旦求出 x_3 ，就可按例 3.4 由 $\bar{\Sigma}$ 的零空间解出 x_4, x_5 ，然后由式 (3.47) 求得 θ_1, θ_2 。这样即可获得除 θ_6 以外的所有转角的解。为此回到如下形式的运动学方程

$$g_s(\theta) = e^{\hat{e}_1 \theta_1} \cdots e^{\hat{e}_6 \theta_6} g_s(0) = g_d$$

其中除 θ_6 以外的所有变量都是已知的。任取一点 p ，可将上式写为

$$e^{\hat{e}_6 \theta_6} p = e^{-\hat{e}_5 \theta_5} \cdots e^{-\hat{e}_1 \theta_1} g_d g_s^{-1} p =: q$$

至此可以用前面的子问题 1 来求解 θ_6 。

运动学逆解的个数

上面的一系列步骤形成了一个关于 x_3 也就是 θ_3 的 16 次多项式。该多项式可能有 16 个实根，也可能没有。对于肘机器人，可以看出可行解最多为 8 个。可以证明如果肘机器人腕部的三个关节轴线不汇交于一点，该机器人运动学逆解的个数可能达到 16 个。实际上，16 是六自由度任意空间开链机构逆解个数的上限。该数字是一个闭上限，也就是说，它是可以达到的（如见 [66]），而且比基于 Bezout 理论的消元法所得结果高。事实上 16 这个上限是 Lee & Liang^[58] 独创性的一个贡献，是他们首先注意到了上述方法，并打消了长期以来的错误猜测。他们所做的工作不只是将运动学方程写成式 (3.43)。

上述算法尚有一些不足之处，Manoncha & Canny^[65] 已给予指出。虽然在概念上还存在一些问题，但主要不足是对病态矩阵行列式的数值计算。对于概念方面的问题，例如当矩阵 Q 的秩小于 8 时，就会产生一个矛盾方程组，此时可以对上述处理过程的第五步进行改进：从 14 个方程中选择少于 8 个的独立方程，尽可能多地消去 θ_1, θ_2 的正弦项和余弦项。在前面提到的论文中，给出了将分解消元方法转化为广义特征值问题的一般计算技术，并将其用于运动学逆解问题的处理，以改进数值计算条件和计算速度。这些计算的详细过程，对于机器人在复杂环境中避免障碍时的运动学逆解实时计算是极其重要的。

4 机器人的雅可比矩阵

除了各关节转角与末端执行器位形的关系之外，还要经常用到各关节与末端执行器之间的速度关系。本节将推导出此速度关系，并讨论其结构和特性，进而研究末端执行器的力螺旋与关节力矩的关系。

通常用雅可比矩阵来描述机器人运动学正解映射的微分。当运动学正解用映射 $g: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^p$ 来表示时，雅可比矩阵即为线性映射 $\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta): \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^p$ 。但是如果将运动学正解更全面地表示为 $g: \mathfrak{R}^n \rightarrow SE(3)$ ，那么雅可比矩阵就不容易获得，这是因为 g 是一个矩阵函数，因而 $\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta)$ 就不是一个自然量。当然可以为 $SE(3)$ 选择适当的坐标系，但这种描述仅在局部情况下成立，更严重的是， $SE(3)$ 局部参数的选择将破坏刚体运动本身所固有的几何学结构。

为了解决这个问题，我们采用第二章中的方法，用运动螺旋来描写运动学正解映射的雅可比矩阵。由此看出利用指数积公式将可获得机器人雅可比矩阵的自然而清晰的描述，并能突出机构的几何特征，同时又避免了局部参数表示的不足。

4.1 末端执行器的速度

设 $g_s: Q \rightarrow SE(3)$ 是机器人的运动学正解映射，如果各关节沿路径 $\theta(t) \in Q$ 运动，那么末端执行器也就沿路径 $g_s(\theta(t)) \in SE(3)$ 运动，此时，末端执行器的空间瞬时速度可用下列运动螺旋表示

$$\hat{V}_s = \dot{g}_s(\theta) g_s^{-1}(\theta)$$

结合运动链特点，有

$$\hat{V}_s = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g_s}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i \right) g_s^{-1}(\theta) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g_s}{\partial \theta_i} g_s^{-1}(\theta) \right) \dot{\theta}_i \quad (3.51)$$

由此可见，末端执行器的速度与各关节的速度成线性关系。利用运动螺旋坐标，式 (3.51) 可以写为

$$\hat{V}_s = J_s^s(\theta) \dot{\theta}$$

其中

$$J_s^s(\theta) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial g_s}{\partial \theta_1} g_s^{-1} \right)^V & \cdots & \left(\frac{\partial g_s}{\partial \theta_n} g_s^{-1} \right)^V \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

称矩阵 $J_s^s(\theta) \in \mathfrak{R}^{6 \times n}$ 为机器人的空间雅可比矩阵 (spatial manipulator Jacobian)，对于任一位形 θ ，它将关节速度矢量映射为对应的末端执行器速度。

如果用指数积公式来表示运动学正解，就能得到 J_s^s 的具体表达式。设

$$g_s(\theta) = e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} \cdots e^{\hat{\xi}_n \theta_n} g_s(0)$$

表示映射 $g_s: Q \rightarrow SE(3)$ ，其中 $\hat{\xi}_i \in se(3)$ 为单位运动螺旋。那么

$$\left(\frac{\partial g_s}{\partial \theta_i} \right) g_s^{-1} = e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} \cdots e^{\hat{\xi}_{i-1} \theta_{i-1}} \frac{\partial}{\partial \theta_i} (e^{\hat{\xi}_i \theta_i}) e^{\hat{\xi}_{i+1} \theta_{i+1}} \cdots e^{\hat{\xi}_n \theta_n} g_s(0) g_s^{-1}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} \cdots e^{\hat{\xi}_{i-1} \theta_{i-1}} (\hat{\xi}_i) e^{\hat{\xi}_i \theta_i} \cdots e^{\hat{\xi}_n \theta_n} g_{st}(0) g_{st}^{-1} \\
&= e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} \cdots e^{\hat{\xi}_{i-1} \theta_{i-1}} (\hat{\xi}_i) e^{-\hat{\xi}_i \theta_i} e^{\hat{\xi}_i \theta_i} \cdots e^{\hat{\xi}_1 \theta_1}
\end{aligned}$$

然后转化为运动螺旋坐标

$$\left(\frac{\partial g_{st}}{\partial \theta_i} g_{st}^{-1} \right)^V = \text{Ad}_{(e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} \cdots e^{\hat{\xi}_{i-1} \theta_{i-1}})} \hat{\xi}_i \quad (3.53)$$

则机器人空间雅可比矩阵变为

$$\begin{aligned}
J_{st}^s(\theta) &= [\xi'_1 \quad \xi'_2 \quad \cdots \quad \xi'_n] \\
\xi'_i &= \text{Ad}_{(e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} \cdots e^{\hat{\xi}_{i-1} \theta_{i-1}})} \xi_i
\end{aligned} \quad (3.54)$$

$J_{st}^s(\theta): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^6$ 是一个依赖于位形的矩阵, 它将关节速度映射为末端执行器的速度。

式 (3.54) 表明机器人雅可比矩阵的结构很特殊, 借助于 ξ' 的定义, 雅可比矩阵的第 i 列仅依赖于 $\theta_1, \dots, \theta_{i-1}$ 。换言之, 第 i 个关节速度对末端执行器速度的作用与运动链中第 i 个关节之后的位形无关。进一步说, 雅可比矩阵的第 i 列

$$\xi'_i = \text{Ad}_{(e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} \cdots e^{\hat{\xi}_{i-1} \theta_{i-1}})} \xi_i$$

对应于经刚体变换 $\exp(\hat{\xi}_1 \theta_1) \cdots \exp(\hat{\xi}_{i-1} \theta_{i-1})$ 的第 i 个关节的运动螺旋 ξ_i 。它是一个将第 i 个关节坐标系由参考位形变换到机器人当前位形的刚体变换。因而, 空间雅可比矩阵的第 i 列就是变换到机器人当前位形的第 i 个关节的运动螺旋。这个很有用的结构特性意味着“通过观察”就可以计算 $J_{st}^s(\theta)$, 在后续实例中可以简单地领悟到这一点。

也可以定义机器人的物体雅可比矩阵 (body manipulator Jacobian) J_{st}^b , 它满足如下关系

$$\hat{V}_{st}^b = J_{st}^b(\theta) \dot{\theta}$$

经类似的计算可得

$$\begin{aligned}
J_{st}^b(\theta) &= [\xi_1^T \cdots \xi_n^T] \\
\xi_i^T &= \text{Ad}_{(e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} \cdots e^{\hat{\xi}_n \theta_n})}^{-1} \xi_i^T
\end{aligned} \quad (3.55)$$

J_{st}^b 的各列对应于当前位形在工具坐标系中表示的关节运动螺旋。注意 $g_{st}(0)$ 是很明确的, 通过选择 S 使 $g_{st}(0) = I$ 可以简化 J_{st}^b 的计算。空间雅可比矩阵与物体雅可比矩阵之间的关系可以用一个伴随变换来描述

$$J_{st}^s(\theta) = \text{Ad}_{g_{st}(\theta)} J_{st}^b(\theta) \quad (3.56)$$

操作器的空间雅可比矩阵和物体雅可比矩阵可用于计算末端执行器上一点的瞬时速度。设 q^b 为在物体 (工具) 坐标系中表示的末端执行器的一点, 该点在物体坐标系中表示的速度为

$$v_q^b = \hat{V}_{st}^b q^b = (J_{st}^b(\theta) \dot{\theta})^\wedge q^b$$

同理, 如果相对于空间 (基础) 坐标系来描述该点, 那么

$$v_q^s = \hat{V}_{st}^s q^s = (J_{st}^s(\theta) \dot{\theta})^\wedge q^s$$

如果考虑工具坐标系原点的速度, 那么 $q^b = 0$, 但是 $q^s = g_{st}(\theta) q^b = p(\theta)$, 这是运动学正解映射的位置分量。因而, 采用显式的齐次坐标后,

$$v_q^s = \begin{bmatrix} \dot{p}(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} = R_{st} \hat{V}_{st}^b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \hat{V}_{st}^s \begin{bmatrix} p(\theta) \\ 1 \end{bmatrix}$$

就是工具坐标系原点速度的等价表示。

关节速度与末端执行器之间的速度关系可用于控制机器人的末端执行器由一个位形到另一个位形, 而无需进行运动学逆解的计算。如果 J_{σ} 是可逆的, 那么有

$$\dot{\theta}(t) = (J_{\sigma}^s(\theta))^{-1} \dot{V}_{\sigma}^s(t) \quad (3.57)$$

如果已知 $\dot{V}_{\sigma}^s(t)$, 式 (3.57) 是一个关于 θ 的常微分方程。为实现末端执行器在两个位形 g_1 和 g_2 之间的运动, 可以选择满足 $g(0) = g_1$ 和 $g(T) = g_2$ 的任意工作空间路径 $g(t)$, 计算空间速度 $\hat{V} = \dot{g}g^{-1}$, 并在区间 $[0, T]$ 上对式 (3.57) 求积分。

例 3.8 SCARA 机器人的雅可比矩阵

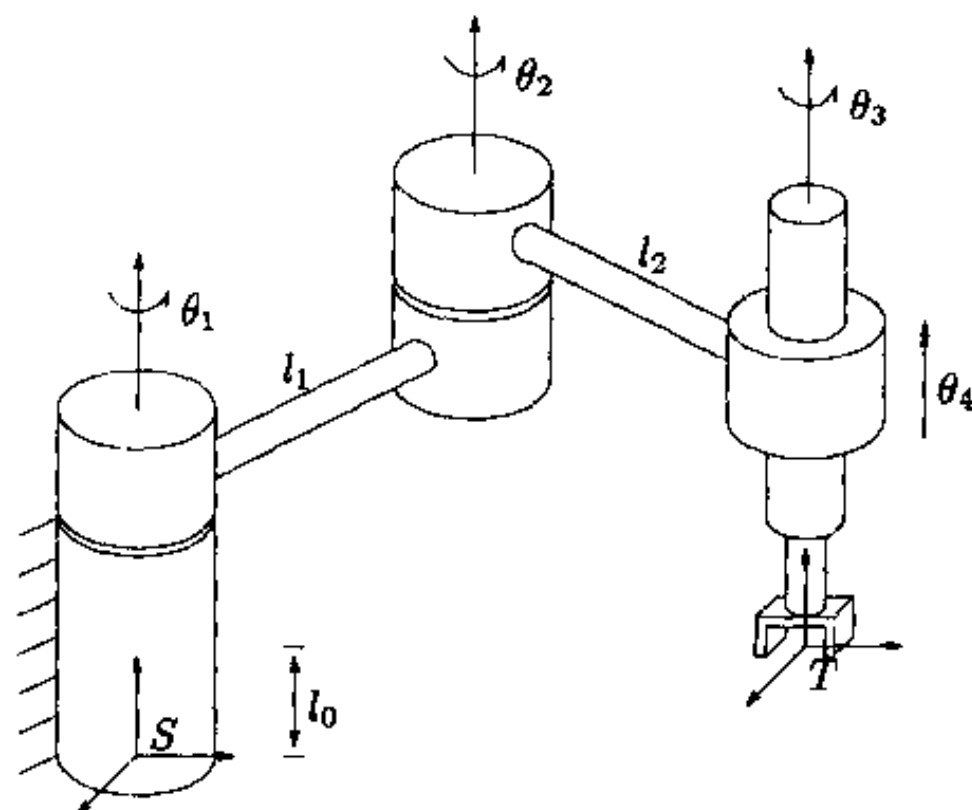


图 3.13 处于非参考位形的 SCARA 机器人

考虑图 3.13 所示的处于任意位形 $\theta \in Q$ 的 SCARA 机器人。其空间雅可比矩阵可以通过当前位形各关节的运动螺旋求得。对于 SCARA 机器人, 运动螺旋的方向都是固定的, 只有各运动螺旋的轴线所经过的点是关于 θ 的函数。通过观察可知

$$\begin{aligned} q'_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & q'_2 &= \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 \\ l_1 \cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ q'_3 &= \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

是轴线上的点。计算有关的运动螺旋

可得

$$J_{\sigma}^s = \begin{bmatrix} 0 & l_1 \cos \theta_1 & l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & l_1 \sin \theta_1 & l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

作为检查, 可用 $(J_{\sigma}^s \dot{\theta})^{\wedge} p(\theta)$ 来计算末端执行器的线速度, 并证实其与 $\dot{p}(\theta)$ 一致。

例 3.9 Stanford 臂的雅可比矩阵

如图 3.14 所示, Stanford 臂是一个六自由度机器人, 它包括位于基座处的两个转动关节, 一个移动关节和一个球腕, 类似于肘机器人的肘用移动关节代替后的结构。

通过关节运动螺旋 (为关节转角函数) 位置和方向的确定, 可计算 Stanford 臂的空间雅可比矩阵。例如, 前两个关节轴线经过点 $q_1 = q_2 = (0, 0, l_0)$, 并沿 $\omega_1 = (0, 0, 1)$ 和 $\omega_2 = (-\cos \theta_1, -\sin \theta_1, 0)$ 方向, 相应的关节运动螺旋为

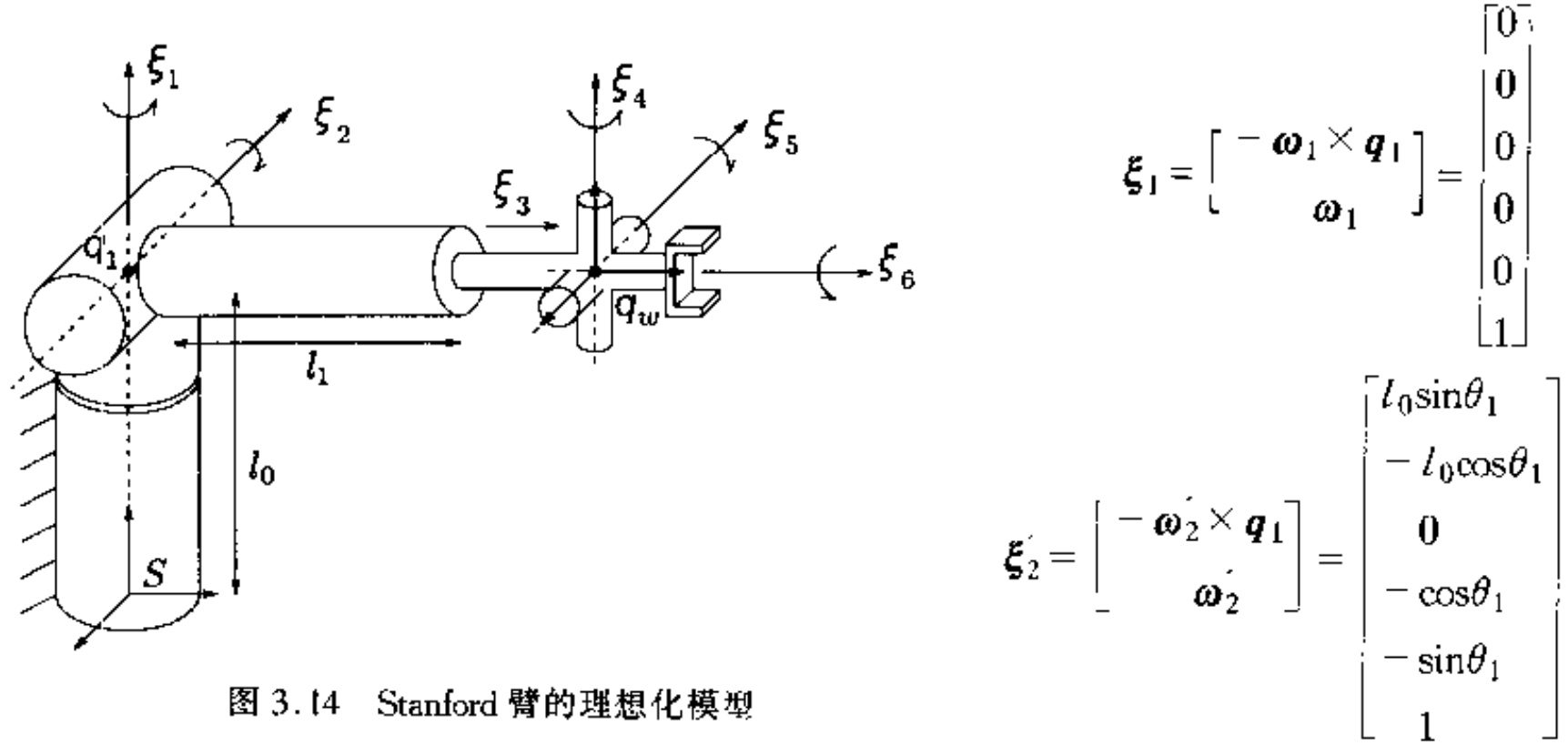


图 3.14 Stanford 臂的理想化模型

第三个关节是移动副，因此仅需考虑其方向。由于前两个关节的运动引起第三个关节移动方向的变化，故有

$$\xi_3 = \begin{bmatrix} e^{\dot{z}\theta_1} e^{-\dot{x}\theta_2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ -\sin \theta_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

最后计算对应于腕部的运动旋量。腕位于如下点处：

$$q_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_0 \end{bmatrix} + e^{\dot{z}\theta_1} e^{-\dot{x}\theta_2} \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 + \theta_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(l_1 + \theta_3) \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ (l_1 + \theta_3) \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ l_0 - (l_1 + \theta_3) \sin \theta_2 \end{bmatrix}$$

腕关节轴线方向取决于 θ_1 、 θ_2 以及腕关节前面的运动副轴线方向，由下式给出

$$\omega_4 = e^{\dot{z}\theta_1} e^{-\dot{x}\theta_2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 s_2 \\ c_1 s_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\omega_5 = e^{\dot{z}\theta_1} e^{-\dot{x}\theta_2} e^{\dot{z}\theta_4} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 c_4 + s_1 c_2 s_4 \\ s_1 c_4 - c_1 c_2 s_4 \\ s_2 s_4 \end{bmatrix}$$

$$\omega_6 = e^{\dot{z}\theta_1} e^{-\dot{x}\theta_2} e^{\dot{z}\theta_4} e^{-\dot{x}\theta_5} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_5 (s_1 c_2 c_4 + c_1 s_4) + s_1 s_2 s_5 \\ c_5 (c_1 c_2 c_4 - s_1 s_4) - c_1 s_2 s_5 \\ -s_2 c_4 c_5 - c_2 s_5 \end{bmatrix}$$

将这些方向矢量与 q_w 的计算相结合，即得完整的机器人雅可比阵

$$J_w^s = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_2 \times q_1 & v_3 & -\omega_4 \times q_w & -\omega_5 \times q_w & -\omega_6 \times q_w \\ \omega_1 & \omega_2 & 0 & \omega_4 & \omega_5 & \omega_6 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

其中的各个量在前面已确定。

这样,在不对运动学正解映射求微分的情况下就能计算出完整的机器人雅可比矩阵。

最后需说明的是,机器人的雅可比矩阵不同于映射 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ 的雅可比矩阵。如在例 3.8 (SCARA 机器人) 中,可以将末端执行器的位形定义为 $x = (p(\theta), \phi(\theta))$, 其中 $p(\theta)$ 是工具坐标系的 xyz 坐标位置, $\phi(\theta) = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ 是工具坐标系关于 z 轴的旋转角。这样,其运动关系可用映射 $x = f(\theta)$ 来表示,并根据运动链特点有

$$\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial \theta} \dot{\theta}$$

其中矩阵 $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ 是映射 $f: Q \rightarrow \mathbb{R}^4$ 的雅可比矩阵,但它不是操作器的雅可比矩阵(刚体雅可比矩阵或空间雅可比矩阵)。尤其是 $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ 的列不能解释为对应关节的瞬时运动螺旋轴。

与上述相类似,对于一个通用机器人,可以选择 $SE(3)$ 的局部参数,并将运动学关系表示为 $f: Q \rightarrow \mathbb{R}^6$ 。再一次说明,映射 $f: Q \rightarrow \mathbb{R}^6$ 的雅可比矩阵并没有直接的几何意义上的解释,虽然它与机器人的雅可比阵大小相同。而且,对于一个能实现末端执行器全方位旋转的机器人而言,用一个六维矢量来表示 $SE(3)$ 会带来奇异性问题,这种奇异性问题完全是由于参数化方法所引起的。由于奇异性的存在,在机器人实现某一位形或某一速度的能力方面,会得出不正确的结论。如采用本章所定义的机器人雅可比阵,就可以避免这些问题。

4.2 末端执行器的作用力

机器人雅可比阵可用来描述作用在末端执行器上的力螺旋与各关节力矩之间的关系,这是如何通过力的控制实现机器人与周围环境相互作用的基本关系。第二章中所讨论的力螺旋与运动螺旋的对偶关系可以推广用于机器人的运动学分析。

为了推导力螺旋与力矩之间的关系,先计算力螺旋使末端执行器实现一定位移所作之功。若用 $g_q(\theta(t))$ 表示末端执行器的运动,则在时间间隔 $[t_1, t_2]$ 内力螺旋 F_t (在物体坐标系中表示) 所作之功为

$$W = \int_{t_1}^{t_2} V_q^b \cdot F_t dt$$

其中 V_q^b 是末端执行器的物体速度。该功应与关节所作之功相等(假设无摩擦),因此

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\theta} \cdot \tau dt = W = \int_{t_1}^{t_2} V_q^b \cdot F_t dt$$

由于上述关系对任意时间间隔都成立,所以被积函数也应相等。利用操作器的雅可比矩阵来表示 V_q^b 与 $\dot{\theta}$ 之间的关系,得

$$\dot{\theta}^T \tau = \dot{\theta}^T (J_q^b)^T F_t$$

因 $\dot{\theta}$ 是独立的,即

$$\tau = (J_q^b)^T F_t \quad (3.59)$$

上式通过力矩与作用在末端执行器上的物体力螺旋等价的方式建立了末端执行器力螺旋与关节力矩之间的关系。

采用同样的分析可建立作用在末端执行器上的空间力螺旋 F_s 与相应的关节力矩之间的关系

$$\tau = (J_s^s)^T F_s \quad (3.60)$$

上式的具体推导过程留作习题。

如果雅可比矩阵是方阵且满秩, 则可将雅可比矩阵的转置矩阵理解为末端执行器上的力到关节力矩的映射。然而, 在其他所有情况下, 这种理解肯定是错误的。关于奇异性的讨论将在下一节进行, 这里仅考虑 J_s 是非方阵情况。

式 (3.59) 和式 (3.60) 建立了作用于末端执行器上的力与关节力矩之间应满足的力关系。由这些公式可以提出以下两个独立的问题。

- 1) 如果已知作用于末端执行器上的力, 那么能克服此力作功所需的关节力矩应为多少?
- 2) 如果已知关节力矩, 那么在末端执行器上能获得多大的力螺旋 (假设此力螺旋与某个外力相平衡)?

由式 (3.59) 可以解决任何情况下的第一个问题。然而, 在操作过程中, 更感兴趣的是第二个问题的解决, 也即确定需要施加多大的关节力矩才能在末端执行器上获得所希望的力螺旋?

如果关节数目大于工作空间的维数, 则认为这种机器人是运动冗余的 (kinematically redundant)。在这种情况下, 由式 (3.59) 可以求得产生一定末端执行器作用力所需的关节力矩矢量。然而, 由于关节数目比所需的最少关节数还要多, 所以存在内部运动 (internal motions), 这样在保持末端执行器位置不变的情况下, 机器人可以运动。这种冗余度机器人的详细讨论见第 5 节。

另一方面, 如果关节数目少于工作空间的维数, 那么对于任意的末端执行器力螺旋, 就可能不存在满足式 (3.59) 的关节力矩, 从而就不能对末端执行器施加某些力螺旋。然而, 这些力螺旋却是由机器人来平衡的。这是由于假设机器人的可能运动完全由关节转角 θ 表示的结果。如果一个力螺旋没有产生对应的关节力矩, 则该力螺旋一定是被机构所产生的结构力平衡了, 当 F 位于 J_s^T 的零空间时, 即出现这样情况。此时, 力平衡方程满足 $\tau = 0$, 约束反力完全由机器人的机械结构提供。

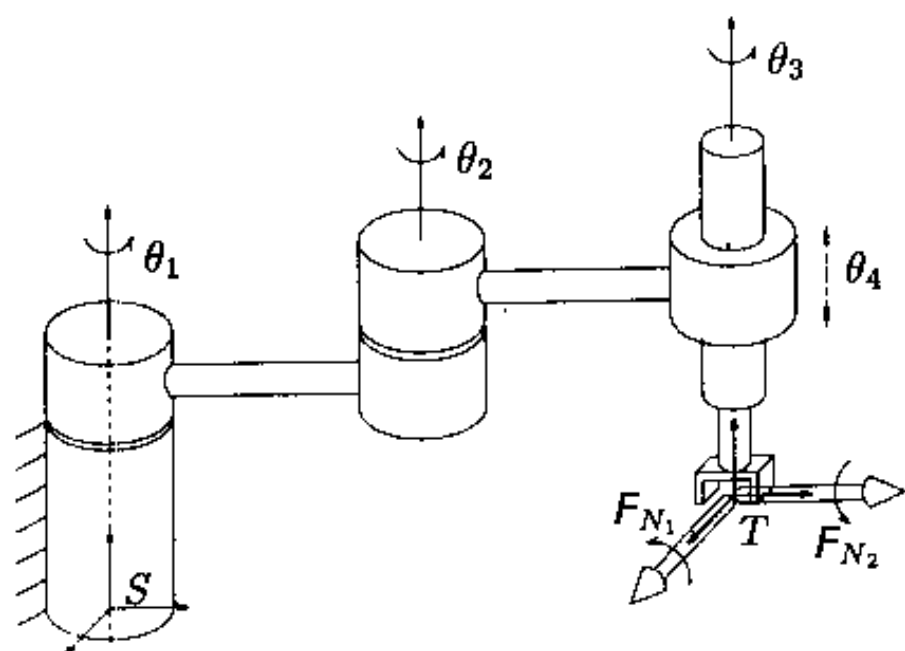
例 3.10 SCARA 机器人的末端执行器作用力

再次考虑例 3.8 中的 SCARA 机器人。机器人的空间雅可比矩阵的转置为

$$(J_s^T)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ l_1 c_1 & l_1 s_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ l_1 c_1 + l_2 c_2 & l_1 s_1 + l_2 s_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

该矩阵的零空间由下列矢量张成

$$F_{N_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad F_{N_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



因此, 机器人不能施加关于其 x 轴和 y 轴方向的工作空间力矩。例如按图 3.15 所示转动机器人就不产生关节力矩, 并不使机器人运动。

图 3.15 不产生关节力矩的末端执行器力螺旋

4.3 奇异性

对于给定的某一位形，机器人的雅可比矩阵描述了末端执行器的瞬时速度与各关节速度之间的关系

$$\mathbf{V}_{bt}^s = \mathbf{J}_{bt}^s(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\theta}}$$

机器人的奇异位形 (singular configuration) 是机器人雅可比矩阵降秩时所处的位形。对于 SE (3) 中的六自由度操作器，奇异位形处的雅可比矩阵是不可逆的，因而机器人就不能获得某些方向上的瞬时运动。在奇异位形附近，为获得末端执行器某些方向上的速度，所需的关节速度将会非常大。

如果机器人的自由度数少于 6，则奇异位形就是末端执行器自由度数减少的位形。这一点可以通过机器人雅可比阵降秩的特点来反映，即 $\mathbf{J}_{bt}^s(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$ 中的两列或更多列线性相关。由于大多数操作器的自由度数是根据完成某些工作的需要而确定的，因此应尽可能避免奇异位形。

奇异性 (singularities) 也影响着操作器施加在末端执行器上的力的大小。在奇异位形处，某些末端执行器力螺旋将位于雅可比转置矩阵的零空间内。在不施加任何关节力矩的情况下，这些力螺旋就能得到平衡，这是因为机构内部产生了相反的力螺旋。另一方面，在奇异方向上是不可能施加末端执行器力螺旋的。这样的力螺旋能被奇异方向上的任何力螺旋所平衡，因此它也能被零力螺旋所平衡。如果无其他外力存在，则就不能产生力。

为了避免这些问题，有必要确定机器人的奇异位形。下面将六自由度机器人的奇异位形归纳为几种常见类型，并通过对系统几何特性的分析来确定这些奇异位形。以下实例都可扩展到更为一般的开链机器人。对于下列每一种几何条件，都将给出奇异性证明的思路。为说明奇异性分析方法的不同，以下各实例使用了不同的证明方法。

例 3.11 共轴线的两个转动关节

对于六自由度机器人，如果存在两个转动关节，其运动螺旋

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{q}_1 \\ \boldsymbol{\omega}_1 \end{bmatrix} \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{q}_2 \\ \boldsymbol{\omega}_2 \end{bmatrix}$$

满足如下条件

- 1) 关节轴线平行: $\boldsymbol{\omega}_1 = \pm \boldsymbol{\omega}_2$
- 2) 关节轴线共线: $\boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) = 0, i = 1, 2$

则该六自由度操作器的雅可比矩阵是奇异的。

证明: 在分析矩阵的奇异性时，允许左乘或右乘一定大小的非奇异矩阵。左乘非奇异矩阵相当于是把一行加到另一行或调换某两行，而右乘相当于对矩阵的列进行类似的处理。

不失一般性，假设雅可比矩阵中线性相关的列为 $\mathbf{J}$ 的前两列，雅可比矩阵的形式为

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{q}_1 & -\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{q}_2 & \cdots \\ \boldsymbol{\omega}_1 & \boldsymbol{\omega}_2 & \cdots \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$$

必要时还可假定 $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_2$ 以消去第二列，此时将第二列减去第一列，得

$$\mathbf{J} \sim \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{q}_1 & -\boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) & \cdots \\ \boldsymbol{\omega}_1 & 0 & \cdots \end{bmatrix}$$

其中, 符号 $\sim$ 表示两矩阵之间的等价。利用条件 2, 得矩阵的第二列为 0, 因此 $J(\theta)$ 奇异。

上述奇异性在球腕结构 (相当于轴线相互正交并汇交于一点的三个转动关节) 中很常见。通过旋转球腕中的第二个转动关节, 就可以使第一个转动关节和第三个转动关节的轴线重合, 并使机器人的雅可比矩阵奇异。在此位形情况下, 相对于由第一关节和第二关节轴线所确定平面的法线作旋转运动是不可能的。

例 3.12 轴线平行且共面的三个转动关节

对于六自由度机器人, 如果存在满足以下条件的三个转动副

- 1) 关节轴线平行: $\omega_i = \pm \omega_j (i, j = 1, 2, 3)$
- 2) 关节轴线共面: 存在一个平面, 其单位法矢量 n 满足 $n^T \omega_i = 0$ 和 $n^T (q_i - q_j) = 0, \quad i, j = 1, 2, 3$

则该六自由度机器人的雅可比矩阵是奇异的。

证明: 用于分析奇异性的另一种变换是改变表示运动螺旋 (构成雅可比矩阵的列) 的参考坐标系。通过左乘伴随矩阵来改变坐标系 (对应于基的改变) 会影响运动螺旋 (因而也影响了雅可比矩阵), 但是由于伴随变换是可逆变换 ($\text{Ad}_g^{-1} = \text{Ad}_g^{-1}$), 因此这样做并不影响原矩阵的奇异性。

经初等列置换后, 假设 $J(\theta)$ 的形式为

$$J(\theta) = \begin{bmatrix} -\omega_1 \times q_1 & -\omega_2 \times q_2 & -\omega_3 \times q_3 & \cdots \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \cdots \end{bmatrix}$$

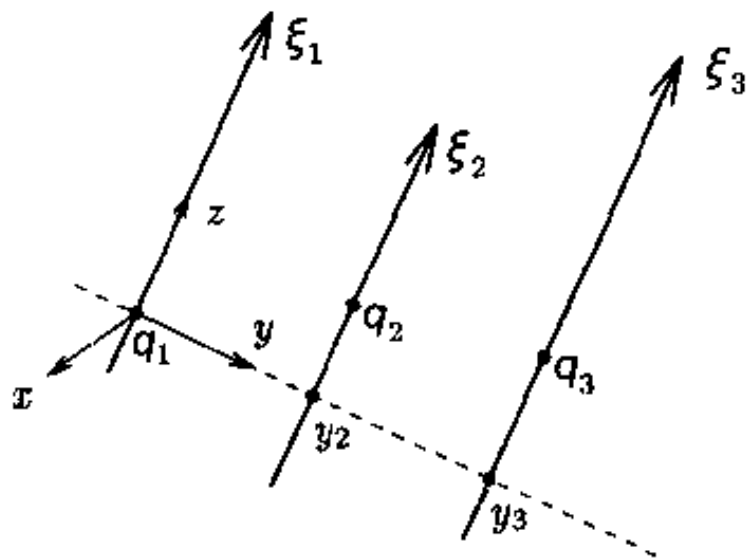


图 3.16 三个共面、平行的转动关节运动螺旋

在 q_1 点建立一个参考坐标系, 其 z 轴指向 ω_1 方向 (见图 3.16), 并且取其 yz 平面与关节轴线所在平面重合。这样, 每个关节轴线与 y 轴都有一个交点, 分别记为 $y_1 (=0)$, y_2 , y_3 。相对于这一新坐标系的雅可比矩阵具有如下形式

$$\text{Ad}_g J(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & \pm y_2 & \pm y_3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & \pm 1 & \pm 1 & \cdots \end{bmatrix}$$

其前三列是线性相关的。

肘机器人在其参考坐标系中即存在这种奇异性 (见图 3.11)。

例 3.13 轴线汇交于一点的四个转动关节

对于六自由度机器人, 如果存在轴线汇交于一点 q 的四个转动关节

$$\omega_i \times (q_i - q) = 0, \quad i = 1, \cdots, 4$$

则该六自由度机器人的雅可比矩阵是奇异的。

证明: 该实例通常将坐标系的原点取为四个转动关节轴线的汇交点。可用对偶旋量系来表征奇异性。由第二章的 5.3 节可知: 当力螺旋与运动螺旋的内积为零时 (表明力螺旋沿运

动螺旋方向不作功), 力螺旋与运动螺旋对偶。由于所讨论的是六维空间, 如果能说明对偶系的维数是足够大的 (本例是三维), 那么就能分析运动螺旋系的奇异性。而当运动螺旋很多, 从而对偶系的维数很小时, 这种处理方法是很有效的。

对于本实例, 利用以下事实: 每个转动运动螺旋与作用其轴线上一点、沿任意方向的纯力对偶。只要考虑经过原点的运动螺旋和力螺旋就能说明这一点:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{V}^T \mathbf{F} = 0$$

这一情况的推广留给读者证明。

下面利用这一事实来构造汇交于一点的四个运动螺旋的对偶系。由于经过此汇交点的任一纯力都对应于一个对偶力螺旋, 故对偶系的维数为 3, 因而这四个运动螺旋是奇异的。

对于反式肘机器人 (见习题 4), 当末端关节轴线与肩关节轴线相交从而增加一个第四轴线时, 即产生上述奇异性。

除以上给出的几种和习题中所涉及的以外奇异位形还有很多种类型。然而, 这里所讨论的奇异位形不仅经常出现, 而且也易于通过机器人几何特征的检查加以确定。对于某一机器人, 在同一个位形下, 有可能呈现出不同类型的奇异性。在这种情况下, 根据奇异性类型和数目的不同, 机器人可能丧失在几个不同方向上运动的能力。例如图 3.4 所示的肘机器人, 如果其臂部保持垂直, 则此时就呈现出前面所讨论的三种奇异性。但是, 由于其中的两种奇异性约束了同一方向上的运动, 所以机器人仍有四个自由度 (而不是三个)。

除了机器人雅可比阵的奇异性外, 由于关节变量的变化范围限定于一个闭区间内, 由此机器人也会丧失一些自由度。例如, 当一个或多个关节处于其运动极限位置时, 就丧失了一些运动自由度。因此经过关节极限位置的运动是不允许的, 从而末端执行器的运动也受到了限制。

4.4 可操作性

如前所述, 当机器人处于奇异位形时, 为实现某些方向的运动就需要较大的关节速度和关节力。在奇异位形附近, 某些方向上的运动也是很困难的。所谓机器人的可操作性 (manipulability), 是指机器人在其工作空间内沿所有方向自由运动的能力。

可操作性可以从两个基本方面来度量:

- 1) 到达某一确定位置或一系列位置的能力。
- 2) 在某一给定位形处, 改变位置或姿态的能力。

第一种可操作性度量指标直接与机器人的工作空间有关。根据工作任务的不同, 可以用总工作空间、可达工作空间或灵活工作空间来表征一个机器人的可操作性。第二种度量指标侧重于反映机器人在某一给定位形附近的操作能力, 也就是说, 它是一个局部特性。

为研究局部操作能力, 可以分析反映无穷小关节运动与无穷小工作空间运动之间关系的机器人雅可比矩阵。本节用 $\mathbf{J}$ 表示机器人的雅可比矩阵 $\mathbf{J}_q$ 。无论是空间雅可比矩阵还是物体雅可比矩阵这里都可以用, 但由于末端执行器的物体速度与基础坐标系的选择无关, 所以还是用物体雅可比矩阵为好。

在有关文献中, 提出了多种不同的局部操作能力度量指标, 并用于不同的情况。下面给出一种更为通用的度量指标。许多度量指标都依赖于 $\mathbf{J}$ 的奇异值。对于矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, 其

奇异值 (singular values) 等于 $A^T A$ 的特征值的平方根。若用 $\sigma(A)$ 表示 A 的奇异值的集合, 用 $\lambda(A)$ 表示 A 的特征值的集合。由于矩阵的最大奇异值等于矩阵的 2-范数:

$$\sigma_{\max}(A) = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \|A\|_2$$

如果矩阵是奇异的, 则矩阵的奇异值至少有一个为零。

例 3.14 J 的最小奇异值

$$\mu_1(\theta) = \sigma_{\min}(J(\theta))$$

雅可比矩阵的最小奇异值对应于单位关节速度矢量所产生的最小工作空间速度。相应的特征矢量给出了末端执行器运动受到最大限制的方向 (运动螺旋)。在奇异位形处, J 的最小奇异值为零。

例 3.15 J 的条件数的倒数

$$\mu_2(\theta) = \frac{\sigma_{\min}(J(\theta))}{\sigma_{\max}(J(\theta))}$$

矩阵 A 的条件数定义为 A 的最大奇异值与 A 的最小奇异值之比。对于雅可比矩阵, 条件数的倒数可以反映末端执行器的速度大小 V 对关节速度矢量 $\dot{\theta}$ 方向的敏感度。它提供了一个度量 J 的最小奇异值的规范化尺度。在奇异位形处, 条件数的倒数为零。

例 3.16 J 的行列式

$$\mu_3(\theta) = \det J(\theta)$$

雅可比矩阵的行列式反映了由单位关节速度矢量所产生的速度椭球 (在工作空间中) 的体积大小。注意到 $\mu_3(\theta)$ 并不包含 J 条件数的信息是很重要的。尤其, 由于 $\det J(\theta)$ 是 $J(\theta)$ 奇异值的积, 即使 $\sigma_{\min}(J(\theta))$ 很小, 如果 $\sigma_{\max}(J(\theta))$ 很大, $\det J(\theta)$ 也会很大。

利用上述操作能力的度量指标, 可以定义机器人的灵活工作空间。对于上述任一度量指标, 定义集合 W'_D 为

$$W'_D = \{g_x(\theta) : \theta \in Q, \mu_i(\theta) \neq 0\} \subset SE(3) \quad (3.61)$$

其中 W'_D 是机器人能在任意方向上作无穷小运动时的末端执行器位形集合。注意 W'_D 是 $SE(3)$ 的子集, 这与前面的定义 (式 3.13) 不同, 前面定义的工作空间是由机器人能获得任意姿态的 $\mathfrak{R}^3$ 的子集所组成。

另外一些操作能力的度量指标在习题中给出。

5 冗余度机器人和并联机器人

本节将对在机器人操作中经常遇到的一些其他运动机构作简要讨论, 并且仅限于两种特殊类型的结构——冗余度机器人和并联机器人, 以说明如何将本章的一些结论推广应用于此类机构。

5.1 冗余度机器人

为完成给定的任务, 机器人必须有足够的自由度。前面的分析主要是针对机器人的自由度数正好等于任务所要求的自由度数。运动冗余机器人具有比完成一系列任务所要求的最少自由度数还要多的自由度。

对于同一个末端执行器位形, 冗余度机器人存在无穷多个与其对应的关节位形。冗余度机器人所提供的额外自由度可用于回避障碍和运动奇异位形, 或是优化机器人的运动。另外, 如果关节运动存在限制, 冗余度机器人可用于增大其工作空间。

冗余度机器人 (redundant manipulator) 运动学正解问题的推导与第二节的推导类似。利用指数积公式有

$$g_{st}(\theta) = e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} \cdots e^{\hat{\xi}_n \theta_n} g_{st}(0)$$

其中 $n > p$, p 为工作空间的维数 (对于平面机器人 $p=3$, 对于空间机器人 $p=6$)。冗余度机器人的雅可比矩阵为

$$J_s^s(\theta) = [\xi'_1 \quad \xi'_2 \quad \cdots \quad \xi'_n]$$

其中 ξ'_i 是当前位形下对应于第 i 个关节轴线的运动螺旋。 $J_s^s \in \mathbb{R}^{p \times n}$ 的列数多于行数。

冗余度机器人的运动学逆解问题是不确定的。对于一个给定的末端执行器位形, 可能存在无穷多个对应的机器人位形。事实上, 如果使末端执行器的位形固定, 那么机器人仍能沿着满足下列条件的任意轨迹自由运动

$$g_{st}(\theta(t)) = g_d \quad (3.62)$$

其中 $g_d \in SE(3)$ 是末端执行器所要求的位形。满足上式的所有 θ 的集合称为位形 g_d 的自运动流形 self-motion manifold。对式 (3.62) 微分, 得

$$J_s^s(\theta(t)) \dot{\theta} = (\dot{g}_{st} g_{st}^{-1})^V = 0$$

因而, 所允许的运动必须存在位于机器人雅可比矩阵零空间的关节速度, 沿着自运动流形的运动称为内部运动。

更为一般的情况是给定末端机器人的路径 $g(t)$, 希望能找到一个相应的关节运动轨迹 $\theta(t)$ 。由于对应于某一末端机器人路径, 可能存在无穷多个关节运动轨迹, 这样就要用附加的判据来从中选取。一般的方法是选择能实现所希望工作空间速度的最小关节速度, 即取

$$\dot{\theta} = J_s^+(\theta) V_{st}$$

其中 $J^+ = J^T (JJ^T)^{-1}$ 是 J 的 Moore-Penrose 广义逆, 其特性以及其他运动冗余解的算法将在第七章讨论。

机器人雅可比矩阵可用来描述冗余度机器人的关节力矩与末端执行器力螺旋之间的关系。由于即使在末端执行器固定时, 机器人的连杆仍能自由运动, 所以为深入理解关节力与末端执行器力螺旋的关系, 有必要研究机器人的动力学。尤其是由于内部运动的存在, 再加上各连杆之间的惯性耦合, 所以即使不施加关节力矩, 也会在末端执行器上产生作用力。关于约束系统动力学的详细研究将在第六章中讨论。由第六章的结论可以看出: 当机器人处于静平衡状态时, 前述关系

$$\tau = J_s^T F \quad (3.63)$$

仍然成立。当系统静止时, 该关系给出了产生某一给定末端执行器力螺旋所需的关节力矩。

例 3.17 平面机器人的自运动流形

考虑图 3.17a 所示的平面操作器。假设末端执行器的位置固定不动, 系统遵循下列运动约束:

$$\begin{aligned} l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) &= x \\ l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) &= y \end{aligned}$$

共两个方程三个变量，因而存在多个解。机器人的自运动流形如图 3.17b 所示。

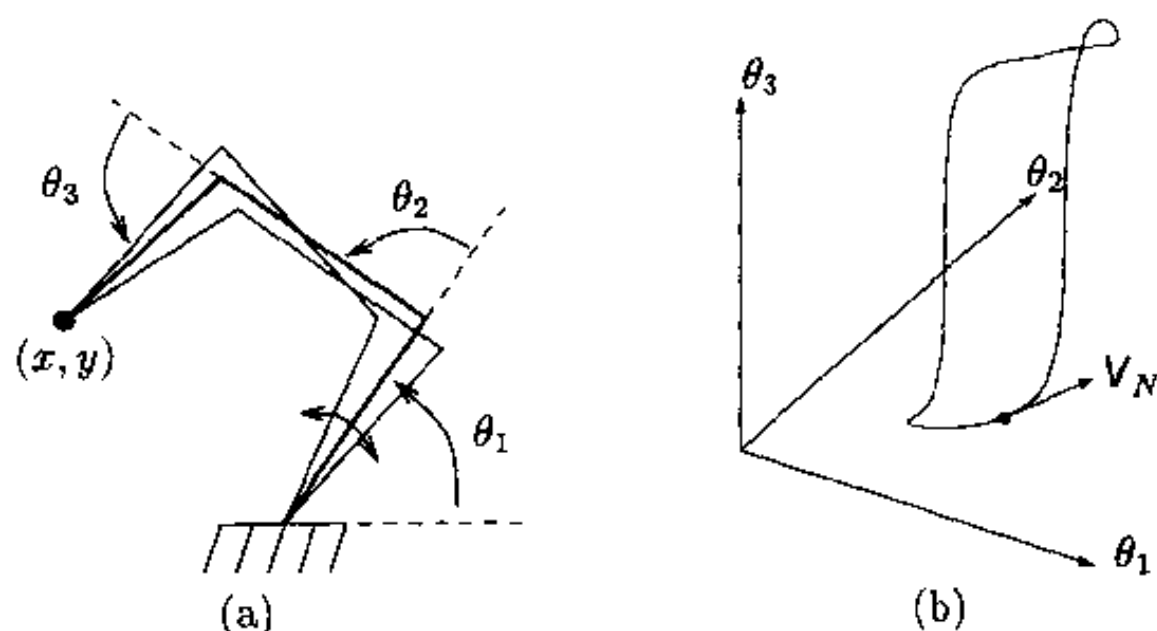


图 3.17 冗余度平面机器人的自运动流形

映射 $p: \theta \rightarrow (x, y)$ 的雅可比矩阵为

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_3 s_{123} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_3 c_{123} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

式中 $s_{ijk} = \sin(\theta_i + \theta_j + \theta_k)$, c_{ijk} 与此类似。雅可比矩阵的零空间由下列矢量张成

$$V_N = \begin{bmatrix} l_2 l_3 \sin \theta_3 \\ -l_2 l_3 \sin \theta_3 - l_1 l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \\ l_1 l_2 \sin \theta_2 + l_1 l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \end{bmatrix}$$

任意速度 $\dot{\theta} = a V_N$ 均相切于自运动机器人，并保持末端执行器的位置不变。图 3.17b 中的箭头即表示这样的速度。

5.2 并联机器人

并联机器人 (parallel manipulator) 是一种在末端执行器与机器人基座之间有两个或多个分支运动链联接的机器人，图 3.18 即为并联机器人的一个实例。相对于开链机器人而言，并联机器人具有刚性大和便于布置驱动装置等优点。例如对于图 3.18 所示的机器人，仅通过控制每一个分支运动链中的第一个连杆就能实现对该机器人的完全驱动，因此无须在机器人的末端连杆上安装电动机。并联机器人也称为闭链机器人 (closed-chain manipulator)，这是因为它们含有一个或多个封闭运动链。

并联机构的结构方程

并联机器人的运动学正解问题可以通过令每个分支运动链所确定的末端执行器的位置相等来描述。假设机器人的第一个分支运动链 (包括末端执行器) 有 n_1 个关节，第二个分支运动链 (包括末端执行器) 有 n_2 个关节，则运动学正解可用指数坐标表示为

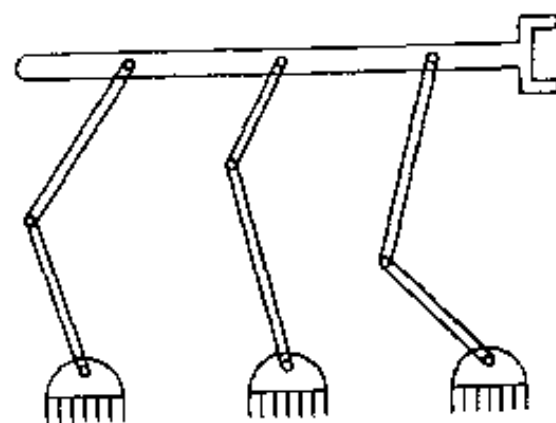


图 3.18 一个末端执行器上联接有三个分支运动链的并联机器人

$$g_x = e^{\hat{\xi}_{11}\theta_{11}} \cdots e^{\hat{\xi}_{1n_1}\theta_{1n_1}} g_x(0) = e^{\hat{\xi}_{21}\theta_{21}} \cdots e^{\hat{\xi}_{2n_2}\theta_{2n_2}} g_x(0) \quad (3.65)$$

式中所有参数都是相对于基础和工具坐标系描述的。式(3.65)称为机器人的结构方程(structure equation), 或称回路方程(loop equation), 它建立了机器人关节转角之间的约束。正是由于这些约束的存在, 从而仅需确定关节变量的子集就能控制末端执行器的位置, 而其余关节变量的取值必须满足式(3.65)。

由于关节变量受到式(3.65)的限制, 并联机器人的关节空间就不是简单地象开链机构那样为各关节空间的笛卡儿积。相反, 它是满足式(3.65)的子集 $Q' \subset Q$ 。 Q' 维数的确定, 以及并联机器人自由度的确定, 需要对机构中的关节数和构件数作仔细分析。

设 N 为机构中的活动构件数, g 为关节数, f_i 为第 i 个关节的自由度数, 则机构的自由度就是所有活动构件的总自由度减去联接各构件的关节所产生的约束数。如果所有关节产生的约束都是独立的, 那么机构的自由度为

$$F = 6N - \sum_{i=1}^g (6 - f_i) = 6(N - g) + \sum_{i=1}^g f_i \quad (3.66)$$

式(3.66)称为 Gruebler 公式。Gruebler 公式只适用于各关节所产生的约束是完全独立的情况。对于平面运动, Gruebler 公式中的 6 用 3 代替。

虽然并联机器人的运动学正解难以利用机构的封闭特性来求解, 但其运动学逆解和开链机构一样并不难。也就是说, 并联机器人的运动学逆解问题可以通过对联接基座和末端执行器的各开链机构运动学逆解的处理来解决, 利用第三节介绍的方法就可做到。

速度关系和受力关系

通过对结构方程(3.65)微分, 即得并联机器人的末端执行器速度与各关节速度之间的关系, 并由此得每一分支运动链的雅可比矩阵

$$V_x = J_1 \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{11} \\ \vdots \\ \dot{\theta}_{1n_1} \end{bmatrix} = J_2 \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{21} \\ \vdots \\ \dot{\theta}_{2n_2} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

其中

$$J_1 = [\xi_{11} \quad \xi'_{12} \quad \cdots \quad \xi'_{1n_1}] \quad J_2 = [\xi_{21} \quad \xi'_{22} \quad \cdots \quad \xi'_{2n_2}]$$

由于机构中含有闭式运动链, 所以并不是所有的关节速度都能单独确定。

将每一分支运动链的雅可比矩阵加以组合, 即得机器人雅可比矩阵的更为简便形式

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \dot{\theta} = \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} V_x \quad (3.68)$$

上式与第五章的多指抓取运动学公式非常类似。实际上, 如果将每一个分支运动链看作为通过一个移动关节或一个转动关节抓取末端执行器的手指, 那么并联操作器就完全类似于多指手抓取一个物体的情况。

并联机器人的关节力矩与末端执行器作用力之间的关系远比开链操作器复杂。其基本区别在于两个或多个分支运动链之间存在相互制约, 并能施加不对末端执行器产生纯力螺旋的力。不对末端执行器产生纯力螺旋的关节力矩集合称为内力。关于内力的讨论将在第五章进行。

奇异性

并联机器人奇异位形的确定要比串联机构复杂得多。现考虑含 k 个分支运动链的一般并联机构，并用 Θ_i 表示第 i 个分支运动链的关节变量。结构方程的雅可比矩阵具有如下形式

$$V_x = J_1(\Theta_1)\dot{\Theta}_1 = \cdots = J_k(\Theta_k)\dot{\Theta}_k \quad (3.69)$$

如果存在满足式 (3.69) 的 $\dot{\Theta}_i$ ，则称末端执行器速度在位形 $\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_k)$ 是许可的。许可速度 (admissible velocities) 的集合构成了一个线性空间，因为它是 $J_i(\theta) (i=1, \dots, k)$ 的值域空间 (range space) 的交集。因此可以将结构方程在位形 Θ 的秩 ρ ，定义为许可速度空间的维数，即

$$\rho = \dim \bigcap_{i=1}^k R(J_i(\theta)) \quad (3.70)$$

其中 $R(A)$ 表示矩阵 A 的值域空间。

对于并联机构，如果在某一位形其结构方程降秩，则在该位形机器人是运动奇异的 (kinematically singular)。在这种情况下，执行件就会失去在某个方向上瞬时运动的能力。这一点类似于串联机构奇异位形的描述。然而在该位形，尚不能确定机构中哪些关节是主动的，哪些关节是被动的。如果并联机构的关节都是主动的，则仅存在所能发生的运动奇异性。但是在大多数情况下，并联机器人中仅有部分关节是主动的，这样就会导致额外的奇异性。称之为驱动奇异性 (actuator singularity)，在 5.4 节中研究 Stewart 平台时将给出这样的一个实例。

5.3 四连杆机构

为解释上面所介绍的概念，下面讨论图 3.19 所示的四连杆机构。该机构有三个通过转动关节相互联接的刚体。与基座相联的构件称为输入构件 (input link) 和输出构件 (output link)，联接输入构件和输出构件的刚体称为连杆 (coupler)。虽然只有三个运动构件，但仍称其为四杆机构，因为习惯上常将基座看作是第四个构件。

在机构综合领域，常要研究四杆机构。例如，需设计一个机构，其输入构件与输出构件之间满足给定的函数关系，从而获得一种机械计算机。另一种情况是希望能设计一个机

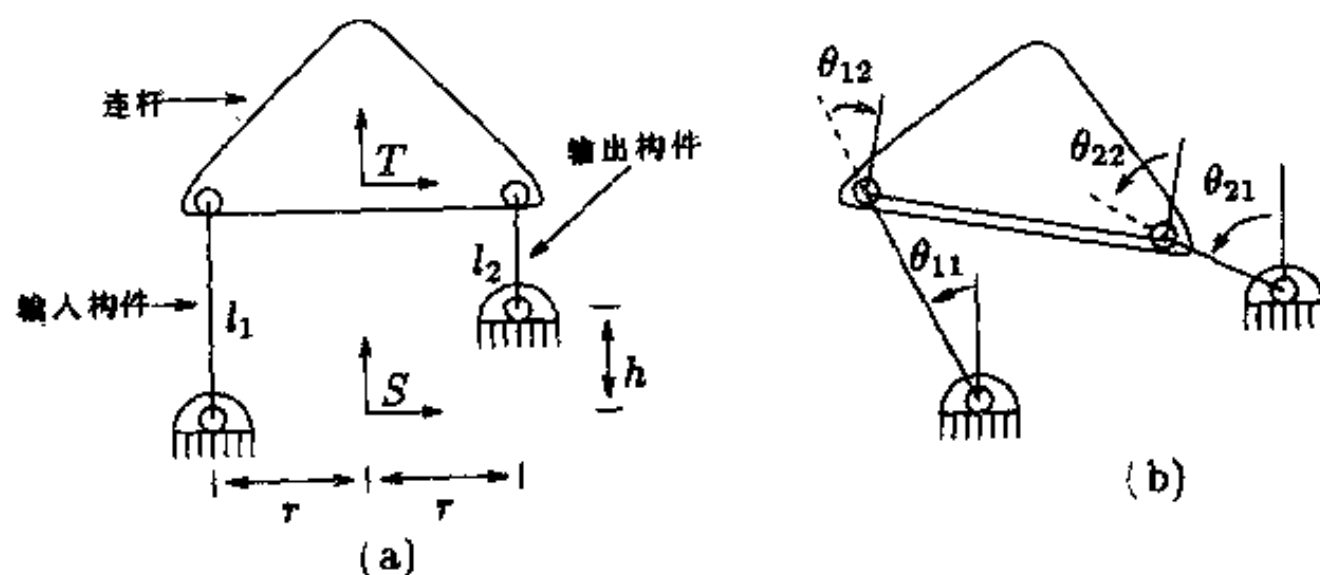


图 3.19 四连杆机构

构, 其连杆上的一点能经过一指定的路径或经过一系列的给定点。除此之外, 还有许多其他需要解决的问题, 如机构运动参数的选择——构件长度、连杆形状、各关节位置, 这样才能实现给定的任务要求。本节对综合问题不作讨论, 而主要研究给定机构的运动分析问题。

四杆机构的自由度可由 Gruebler 公式求得

$$N = 3 \text{ 个活动构件}$$

$$g = 4 \text{ 个关节}$$

$$f_i = 1 \text{ 个自由度}$$

$$\Rightarrow F = 3(3 - 4) + 4 = 1$$

只有一个自由度的事实可以帮助理解输入构件和输出构件。注意这里是用平面 Gruebler 公式来计算机构的可动性的。若直接用空间 Gruebler 公式来计算该机构的可动性, 即 $F = 6(3 - 4) + 4 = -2$ (!), 显然此结果是错误的, 对该问题的正确处理留作习题。

为写出结构方程, 必须首先使基础坐标系的方向与工具坐标系一致 (如图所示), 并选取一个参考位形 (对应于 $\theta = 0$, 见图 3.19a)。注意如果把每一个分支运动链看作是独立的二杆机器人, 则该参考位形与一般情况不同。然而, 选择这样的参考位形便于满足运动约束, 从而可按图 3.19b 所示定义各关节转角。一般位形的结构方程为

$$g_x = e^{\hat{\xi}_{11}\theta_{11}} e^{\hat{\xi}_{12}\theta_{12}} g_x(0) = e^{\hat{\xi}_{21}\theta_{21}} e^{\hat{\xi}_{22}\theta_{22}} g_x(0)$$

注意上式为含有四个变量的三个约束方程, 因而余下意料中的一个自由度。

利用第二章习题推导的平面运动螺旋公式, 可以计算上述机构的运动螺旋。经过点 $q = (q_x, q_y)$ 的转动关节可用一平面运动螺旋表示为

$$\xi = \begin{bmatrix} q_y \\ -q_x \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^3$$

由此得

$$\xi_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 1 \end{bmatrix} \quad \xi_{12} = \begin{bmatrix} l_1 \\ r \\ 1 \end{bmatrix} \quad \xi_{21} = \begin{bmatrix} h \\ -r \\ 1 \end{bmatrix} \quad \xi_{22} = \begin{bmatrix} h + l_2 \\ -r \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$g_x(0) = \begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} 0 \\ h + l_2 \end{bmatrix} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将指数积公式展开得

$$\begin{aligned} -r - l_1 \sin \theta_{11} - r \cos(\theta_{11} + \theta_{12}) &= x = r - l_1 \sin \theta_{21} - r \cos(\theta_{21} + \theta_{22}) \\ l_1 \cos \theta_{11} + r \sin(\theta_{11} + \theta_{12}) &= y = h + l_1 \cos \theta_{21} + r \sin(\theta_{21} + \theta_{22}) \\ \theta_{11} + \theta_{12} &= \phi = \theta_{21} + \theta_{22} \end{aligned}$$

其中 ϕ 是工具坐标系相对于水平线的倾角。由上述公式的结构可以看出, 运动学正解问题的求解是很复杂的, 虽然在许多情况下可以获得封闭解。

结构方程的雅可比矩阵具有如下形式

$$V_x^s = [\xi_{11} \quad \xi'_{12}] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{11} \\ \dot{\theta}_{12} \end{bmatrix} = [\xi_{21} \quad \xi'_{22}] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{22} \end{bmatrix}$$

为计算雅可比矩阵中的各列, 相对于机器人的当前位形写出运动螺旋, 因此

$$\mathbf{V}_s^s = \begin{bmatrix} 0 & l_1 \cos \theta_{11} \\ r & r + l_1 \sin \theta_{11} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{11} \\ \dot{\theta}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h & h + l_2 \cos \theta_{21} \\ -r & -r + l_1 \sin \theta_{21} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{22} \end{bmatrix}$$

上式给出了系统的速度约束。由于每一分支运动链的雅可比矩阵仅有两列，故许可速度空间的维数至多为 2。为进一步检查其可动性，对雅可比矩阵重新调整以分离主动关节和被动关节。

假设取 $\theta = \theta_{11}$ 为主动关节， $\alpha = (\theta_{12}, \theta_{21}, \theta_{22})$ 为被动关节，则结构方程的雅可比矩阵可调整写为

$$\xi_{11} \dot{\theta} = [-\xi'_{12} \quad \xi_{21} \quad \xi'_{22}] \dot{\alpha} \quad (3.71)$$

(只有在含两个串联运动链或一个运动回路的特殊情况下，才能作上述调整)。由上述方程的形式可以看出，如果给定了主动关节的速度 $\dot{\theta}$ ，则当式 (3.71) 的右侧非奇异时，就能解出被动关节的速度。

式 (3.71) 的右侧对应于由三个轴线平行的转动关节所产生的运动螺旋。由运动螺旋奇异性的研究可知，如果三个轴线共面且平行，则运动螺旋是线性相关的。在平面情况下，这意味着如果被动关节共线，则式 (3.71) 的右侧矩阵降秩，机构就可能不能运动。然而，该条件是不充分的，因为即使 $\{\xi'_{12}, \xi_{21}, \xi'_{22}\}$ 是奇异的，也可能出现 ξ_{11} 位于 $\{\xi'_{12}, \xi_{21}, \xi'_{22}\}$ 的范围。这两种不同的位形见图 3.20。应注意输入构件和输出构件的更换，将改变机构的奇异位形。例如，图 3.20a 所示为取左侧连杆为输入构件时的奇异位形 (因为这样的选择将使三个被动关节共线)。

从运动学角度来看，图 3.20b 所示的位形是一个不确定位形。对于这种位形，机构实际上存在沿两个不同方向瞬时运动的可能。检查其结构方程，可以看出

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r & r - l_1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{11} \\ \dot{\theta}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -r & -r + l_1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{22} \end{bmatrix}$$

因此

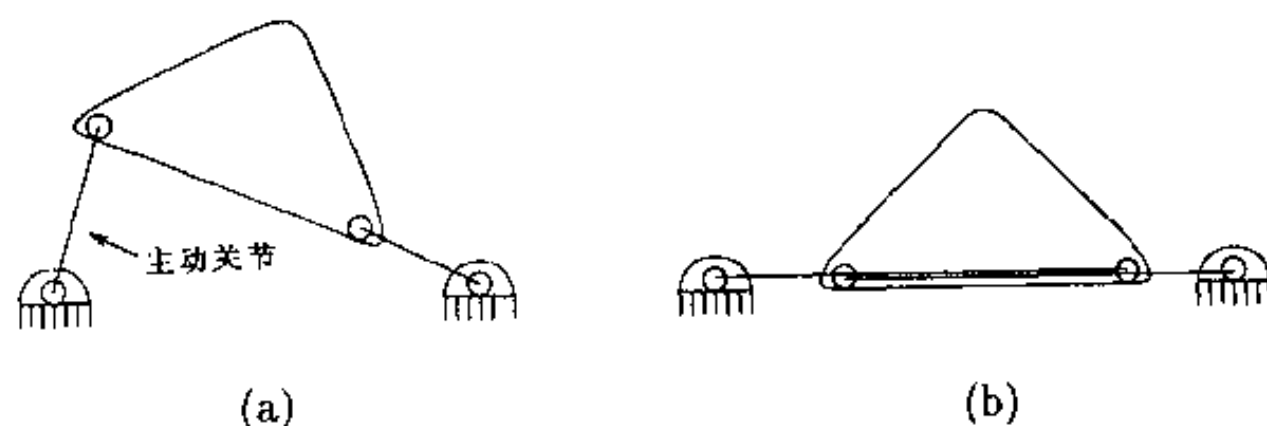


图 3.20 四杆机构的可能奇异位形

(a) 奇异位形 (b) 不确定位形

$$\dot{\theta}_{N_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \dot{\theta}_{N_2} = \begin{bmatrix} r-l_1 \\ -r \\ r-l_1 \\ -r \end{bmatrix}$$

表示两个独立的瞬时许可速度。只有当机构完全成直线时才存在这样两个相互独立的速度，因此不确定位形在实际情况下很少遇到。

5.4 Stewart 平台

另一个并联机构的例子是 Stewart 平台，如图 3.21 所示。该机构由上、下两个平台组成，相互间通过一组移动关节和球关节加以联接可以实现各个方向的转动，其中只有移动关节是主动关节。

Stewart 平台通常是用在飞机的飞行模拟器中，使其沿着系统动力学模拟的方向运动。虽然 Stewart 平台的概念已十分古老（在 20 世纪 50 年代由 Stewart 首先对其进行研究^[112]），但是一般 Stewart 平台的运动学问题直到现在才得以完全解决。

为了建立 Stewart 平台的结构方程，必须首先建立球关节模型。对于前面所讨论的机器人，是将球关节看作为轴线汇交于一点的三个转动关节。由于大多数主动球腕都是这样的结构，所以这样的处理在理论上是可行的。但是，当球腕中任意两个轴线平行时（在选择适当的

关节转角时常会出现这样的情况），就存在奇异位形。在 Stewart 平台中，球关节完全是被动的，因而不可能成为奇异位形。这说明球关节与球腕之间存在着微小的差异。

由球关节产生的刚体运动为

$$g(R) = \begin{bmatrix} R & (I-R)q \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R \in SO(3)$$

其中 R 是自由参数， q 是腕中心的位置。同理，球关节的速度为

$$V^s = \begin{bmatrix} -\omega \times q \\ \omega \end{bmatrix} \quad \omega \in \mathfrak{R}^3$$

其中 ω 是速度自由参数。为使上式便于使用，将其改写为

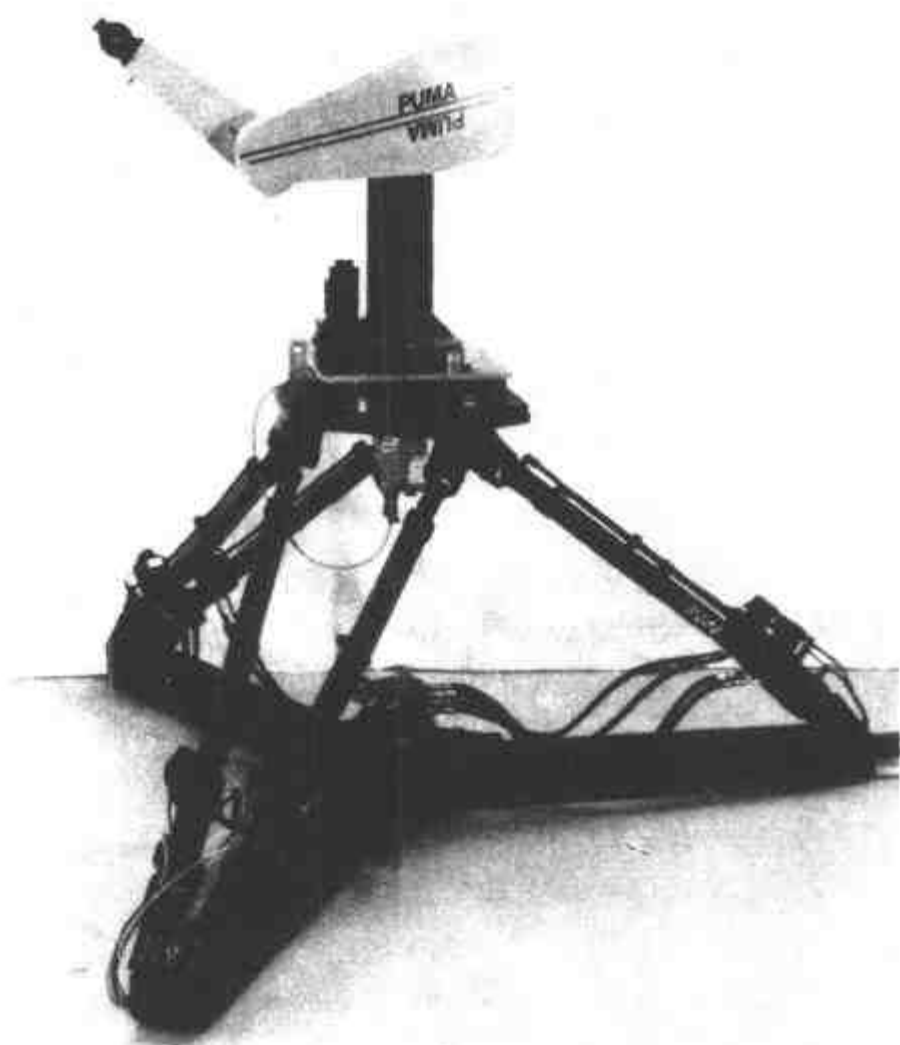


图 3.21 安装有 PUMA 机器人的 Stewart 平台

$$V^s = \begin{bmatrix} -e_1 \times q & -e_2 \times q & -e_3 \times q \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$$

其中 e_i 是 $\mathcal{R}^3$ 中的第 i 个单位矢量。注意确定 V^s 的矩阵的各列都是线性无关的。

现在可以写出 Stewart 平台的结构方程。设 $g_{s_i}(\mathbf{R}_{s_i})$ 表示与基座相联的第 i 个球关节的姿态, $g_{t_i}(\mathbf{R}_{t_i})$ 表示与工具相联的第 i 个球关节的姿态, 则 Stewart 平台的结构方程为

$$\begin{aligned} g_x &= g_{s_1}(\mathbf{R}_{s_1}) e^{\xi_1 \theta_1} g_{t_1}(\mathbf{R}_{t_1}) g_x(0) = \\ &\cdots = g_{s_6}(\mathbf{R}_{s_6}) e^{\xi_6 \theta_6} g_{t_6}(\mathbf{R}_{t_6}) g_x(0) \end{aligned} \quad (3.72)$$

其中 ξ_i 和 θ_i 表示第 i 个移动关节的运动。

由于约束方程的形式复杂且约束数多, 所以 Stewart 平台的运动学正解是非常困难的问题。理论上讲, 当给定连杆的长度时, 可以通过结构方程的求解获得球关节的姿态, 进而确定工具坐标系的位形。由于移动关节绕其自身轴线的转动, 使得每一连杆存在额外的自由度, 由此进一步增加了运动学正解问题的复杂性。

Stewart 平台的运动学逆解问题非常简单。当给定平台的位形时, 可求得球关节中心的位置, 并能进一步求得两对应球关节中心之间的距离。设 q_{s_i} 是基座上第 i 个球关节中心相对于基础坐标系的位置, q_{t_i} 是工具上第 i 个球关节中心相对于工具坐标系的位置, 则移动关节的移动量可表示为

$$\theta_i = \| q_{s_i} - g_x q_{t_i} \|$$

采用类似于第三节求解子问题的方法也可推出上述结果, 但此处的求解具有明确的几何特征。

现在可以通过结构方程的雅可比矩阵的计算来研究 Stewart 平台的可动性。取式 (3.72) 的雅可比矩阵得

$$\begin{aligned} V_x^s &= \begin{bmatrix} \xi_{s_1,1} & \xi_{s_1,2} & \xi_{s_1,3} & \xi'_1 & \xi'_{t_1,1} & \xi'_{t_1,2} & \xi'_{t_1,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{s_1} \\ \dot{\theta}_1 \\ \omega_{t_1} \end{bmatrix} = \cdots = \\ &\begin{bmatrix} \xi_{s_6,1} & \xi_{s_6,2} & \xi_{s_6,3} & \xi'_6 & \xi'_{t_6,1} & \xi'_{t_6,2} & \xi'_{t_6,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{s_6} \\ \dot{\theta}_6 \\ \omega_{t_6} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.73)$$

由此可知, 只要 $\theta_i \neq 0$ (见习题 22), 雅可比矩阵就不奇异。因此, 所有工具速度都是许可速度。

然而, 当工具坐标系与基础坐标系共面时, 会出现一个有趣的问题。此时, 主动关节仅能在平面内产生力, 故而机构不能承受 (或施加) 非平面力或力矩。由于通过各关节的运动可以实现工具坐标系的任意运动, 所以机构在运动学上并非奇异。然而, 主动关节并不能产生实现任意运动所需要的力螺旋。这就是前面所提及的第二种奇异性实例, 称这种奇异性为驱动奇异性, 这是因为它对应于主动关节不能在工具坐标系中产生任意的力螺旋。这种奇异性类似于抓取过程中不满足力封闭条件的情况。

当主动关节经过点 q_i 时, 所产生的所有零节距 (纯力) 力螺旋的集合确定了施加于工具坐标系的力螺旋系, 通过对该力螺旋系的分析, 可得 Stewart 平台奇异性的几何解释。由于移动关节产生零节距力螺旋, 所以可用前面所推导的有关零节距旋量奇异性的实例来确定 Stewart 平台的奇异性。在这里, 当基础坐标系与工具坐标系共面时, 由于存在四个 (实际上是六个) 共面的零节距旋量, 故可得一个奇异位形。而一旦有两个移动关节共线时, 就会产生独立的奇异位形。

例 3.18 平面 Stewart 平台的奇异性

考虑图 3.22 所示的平面 Stewart 平台, 其中三个主动移动关节用于控制平台的位置和姿态, 每一连杆末端的转动关节是被动关节。从运动学角度来看, 该机构具有 Stewart 平台的某些特性。

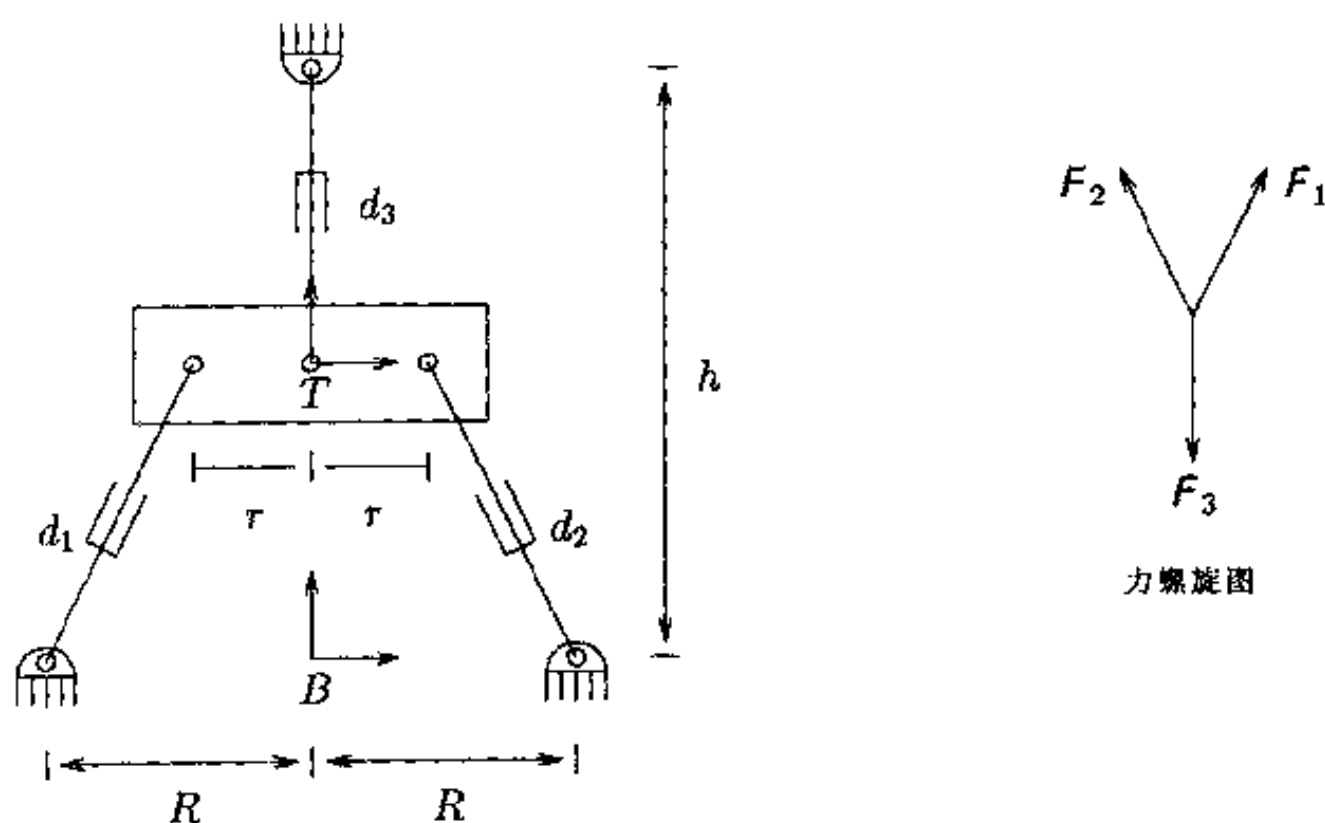


图 3.22 平面 Stewart 平台

下面主要讨论该机构的奇异性。对于这种 Stewart 平台, 当可达速度空间的维数 (一般是三维) 降秩时, 不存在运动奇异性。由于主动关节都是移动, 由移动关节产生的力螺旋对应于零节距旋量。在平面情况下, 可以看出汇交于一点的三个零节距旋量是奇异的, 这就是如图 3.22 所示机构所处的位形 (见右侧的力螺旋图)。因此, 在这种位形下, 机构不可能产生绕公共汇交点的纯力矩。如果在汇交点处建立一个坐标系, 并且相对于该坐标系来描述力螺旋, 就可以很明显地看出这一点。在该坐标系中, 有

$$F = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

其中 v_i 是第 i 个移动关节轴线方向, f_i 是第 i 个驱动器所施加的力。由于

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \notin \text{range} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以不能产生绕汇交点的纯力矩。

6 小结

本章涉及的主要概念如下:

1. 机器人的运动学正解可用映射 $g_s: Q \rightarrow SE(3)$ 加以描述, 该映射将末端执行器的位形表示为机器人关节变量的函数。对于由转动关节和移动关节所组成的开链机器人, 运动学关系可用指数积公式表示为

$$g_s(\theta) = e^{\xi_1 \theta_1} e^{\xi_2 \theta_2} \cdots e^{\xi_n \theta_n} g_s(0)$$

其中 ξ_i 是参考位形 ($\theta = 0$) 时第 i 个关节轴线所对应的运动螺旋。

2. 机器人的总工作空间是不同关节转角所达到的末端执行器的所有位形的集合。可达工作空间是某一姿态下末端执行器所能达到的位置空间。灵活工作空间是任意姿态下末端执行器所能实现的位置空间。

3. 机器人的运动学逆解描述了末端执行器位形与实现该位形的关节转角之间的关系。对于多数机器人, 可利用以下几个子问题来确定其运动学逆解:

子问题 1: $e^{\xi \theta} p = q$ 从一点旋转到另一点

子问题 2: $e^{\xi_1 \theta_1} e^{\xi_2 \theta_2} p = q$ 绕两相交运动螺旋的转动

子问题 3: $\|q - e^{\xi \theta} p\| = \delta$ 将一点旋转至与另一点的距离为给定值

为得到整个解, 将机器人的运动学关系用于一系列点, 由此将整个问题分解为一系列的子问题。

4. 机器人雅可比矩阵描述了关节速度 $\dot{\theta}$ 与末端执行器速度 V_s 以及关节力矩 τ 与末端执行器力螺旋 F 之间的关系

$$V_s = J_s(\theta) \dot{\theta} \quad \tau = (J_s^T)^T F_s \quad (\text{空间})$$

$$V_o = J_o(\theta) \dot{\theta} \quad \tau = (J_o^T)^T F_o \quad (\text{物体})$$

如果操作器运动学关系用指数积公式表示, 则机器人雅可比矩阵具有如下形式

$$J_s(\theta) = [\xi_1 \quad \xi'_2 \quad \cdots \quad \xi'_n] \quad \xi'_i = \text{Ad}_{(e^{\xi_1 \theta_1} \cdots e^{\xi_{i-1} \theta_{i-1}})} \xi_i$$

$$J_o(\theta) = [\xi_1^+ \quad \cdots \quad \xi_{n-1}^+ \quad \xi_n^+] \quad \xi_i^+ = \text{Ad}_{(e^{\xi_1 \theta_1} \cdots e^{\xi_n \theta_n} g_s(0))}^{-1} \xi_i$$

5. 如果操作器的雅可比矩阵在某一位形降秩, 则此位形是奇异位形。一般六自由度机器人存在奇异位形的情况有

(a) 两转动关节共线。

(b) 三个转动关节轴线平行且共面。

(c) 四个转动关节轴线汇交于一点。

机器人的操作能力提供了一种接近奇异位形的度量指标。

6. 如果机器人的自由度超过所需要的最少自由度数, 则此机器人是运动冗余的。自运动流形描述了获得所需末端执行器位形的关节运动值的集合。内部运动就是沿自运动流形的运动, 它满足

$$J_s(\theta) \dot{\theta} = 0$$

7. 并联机器人具有多个联接基座与末端执行器的运动链。对于具有两个运动链的情况, 运动关系满足如下结构方程

$$g_{st} = e^{\xi_{11}\theta_{11}} \cdots e^{\xi_{1n_1}\theta_{1n_1}} g_{st}(0) = e^{\xi_{21}\theta_{21}} \cdots e^{\xi_{2n_2}\theta_{2n_2}} g_{st}(0)$$

其中 ξ_{ij} 是第 i 个运动链中第 j 关节的运动螺旋。结构方程的雅可比矩阵为

$$V_{st}^s = J_1^s(\Theta_1)\dot{\Theta}_1 = J_2^s(\Theta_2)\dot{\Theta}_2$$

其中 $\Theta_i = (\theta_{i1}, \cdots, \theta_{in_i})$ 。当许可力空间的维数降秩时, 即产生运动奇异。而当由主动关节所产生的末端执行器作用力的集合降秩时, 则产生其他类型的奇异。

7 文献说明

机器人运动学方面的著作非常多, 其中包括大量的有关机器人分析、设计以及控制方面的教科书。本章有关专题的概述, 可参考 Craig 编著的教科书^[21], 也可参阅 [35, 36, 80, 91, 122]。指数积公式首先由 Brockett 提出^[12], 本章是采用 Paden^[86]一文的表示形式。本章所给出的理论研究工具以及所选取的最新研究主题可参考由 Brockett 编辑的论文集^[13]。

在六自由度机器人运动学逆解的解系研究方面, Rastegar, Roth 和 Scheinman 通过非结构性证明建立了 32 组解系^[101], 后由 Duffy 和 Crane 加以结构化^[29], 并由 Primrose 将其减少到 16 组^[95]。然而, 只有 Lee 和 liang^[58]才对一般机器人的运动学逆解给出了结构化的处理方法。该方法后又由 Roth 和 Raghavan^[97]以及 Manocha 和 Canny^[65]加以深化, 本章所采用的就是他们的研究成果。Manseur 和 Doty^[66]给出了有 16 组运动学逆解的机器人实例。

本章对并联机构的处理方法并不具有一般性。关于四杆机构和其他并联机构的一般分析方法, 可参考 Hunt^[42]。而四杆机构综合的详细论述, 以及分析和图解方法, 除可参考其他有关机构运动学与设计的教科书外, 还可参阅 Erdman 和 Sandor 的著作^[30]。

8 习题

1. 画出第一章介绍的各种机器人的运动螺旋轴线。
2. 试说明机器人运动学正解映射与转动、移动的先后顺序无关。
3. 对于图 3.23 所示的四种三自由度机器人:
 - (a) 确定运动学正解映射。
 - (b) 利用 Paden-Kahan 子问题求解运动学逆解。
 - (c) 推导空间和物体雅可比矩阵。
4. 对于图 3.24 所示的各机器人:
 - (a) 确定运动学正解映射。
 - (b) 利用 Paden-Kahan 子问题求解运动学逆解。
 - (c) 推导空间和物体雅可比矩阵。
 - (d) 给出奇异位形的几何描述。
 - (e) 建立并绘出可达工作空间和灵活工作空间, 并计算工作空间不同区域内运动学逆解的解数。

(注意其中有些问题已在本章的例子中解决了)。

5. 子问题 2': 绕两个不相交轴的旋转

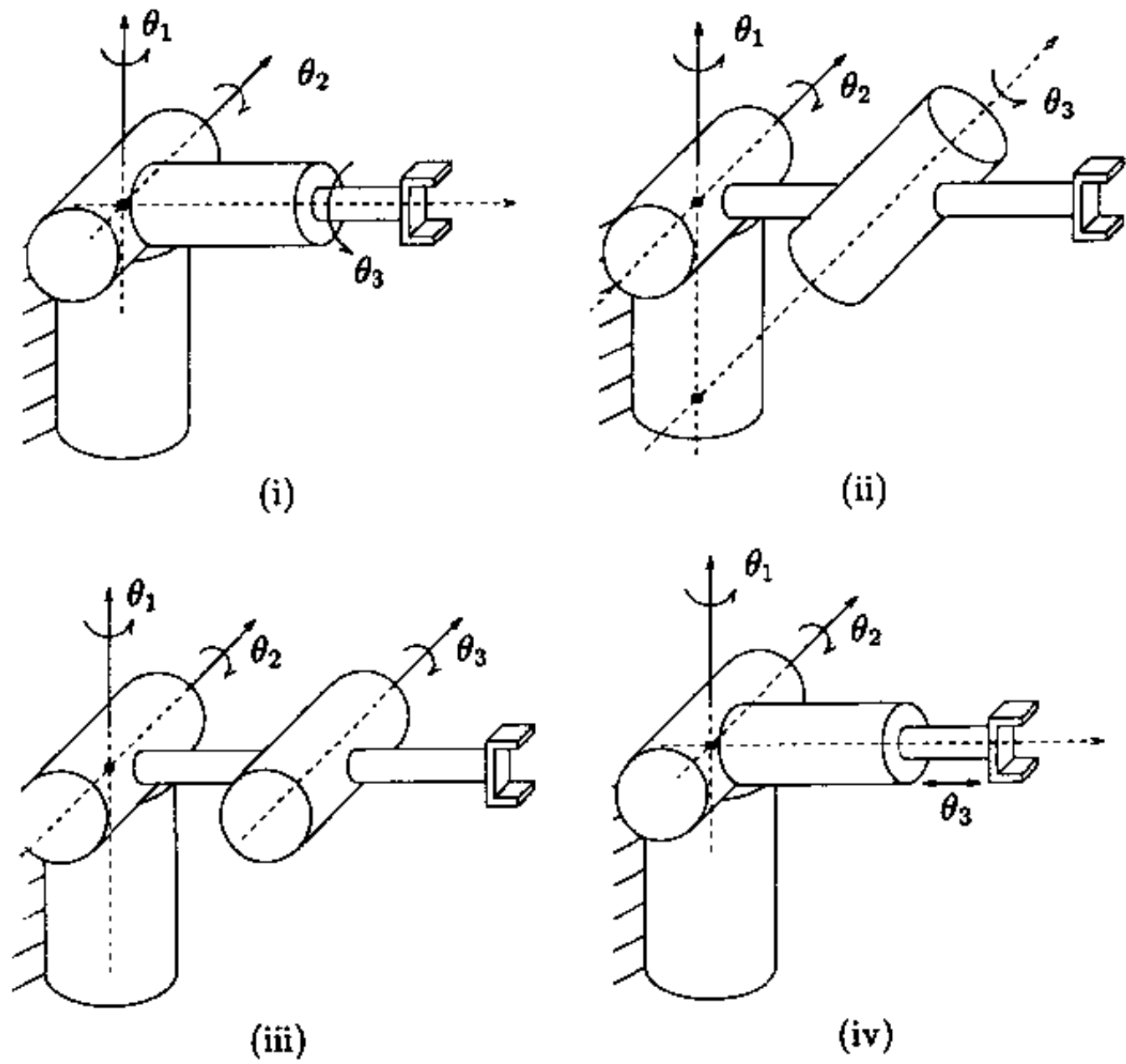


图 3.23 几种简单的三自由度机器人

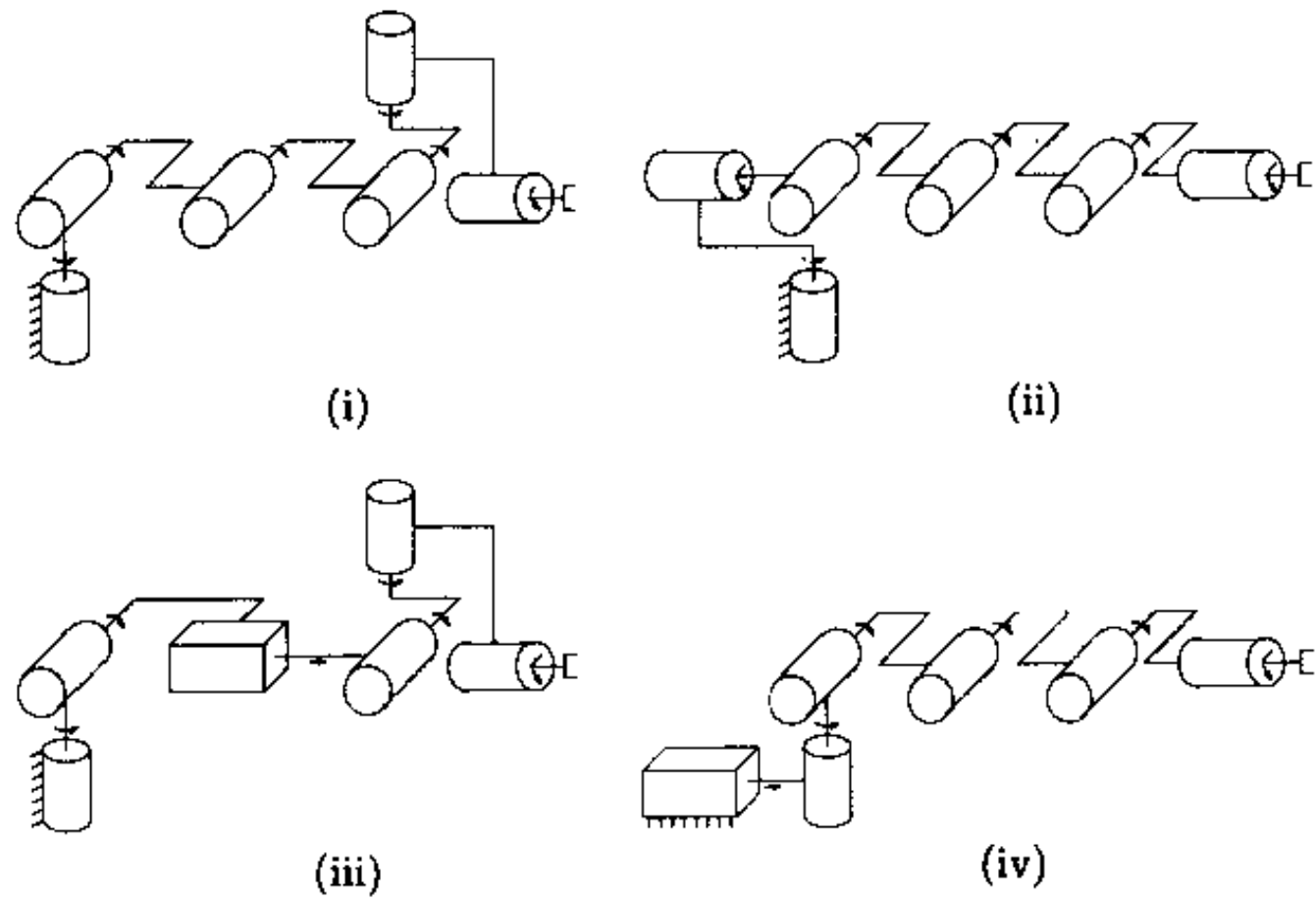


图 3.24 机器人模型

[转动关节用圆柱体表示；移动关节用长方体表示]

(I) 肘机器人 (II) 反向肘机器人 (III) Stanford 机器人 (IV) Rhino 机器人

当两轴线 ξ_1 和 ξ_2 不相交时, 解子问题 2。

试用该子问题求解例 3.5 肘机器人当前两个关节轴线不相交于一点时的运动学逆解。

6. 子问题 4 (图 3.25): 绕两轴线旋转至给定距离

设 ξ_1, ξ_2 是两个相交的零节距单位运动螺旋, p, q_1 和 q_2 为 $\mathbb{R}^3$ 中的三个点 (见图 3.25), 试求满足

$$\|e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} p - q_1\| = \delta_1$$

$$\text{和 } \|e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} p - q_2\| = \delta_2$$

的 θ_1 和 θ_2

(提示: 求满足 $q = e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} e^{\hat{\xi}_2 \theta_2} p$ 的点 q , q 是球心分别位于 q_1, q_2, r , 半径分别为 $\delta_1, \delta_2, \|p - r\|$ 的三个球面的交点)。

7. 子问题 5: 平移至某一给定距离

设 ξ 是无限节距单位运动螺旋, $p, q \in \mathbb{R}^3$ 是两个点, δ 是大于零的实数。试求满足下式的 θ

$$\|q - e^{\hat{\xi} \theta} p\| = \delta$$

试用该子问题求解例 3.6 SCARA 机器人中移动关节的位移量。

8. 试证明机器人的空间速度与工具坐标系的位置无关 (只要是工具坐标系与末端执行器一起运动)。

9. 矩阵的奇异值

设 $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ 表示一个线性映射, 并假设 A 的秩为 r , 则 $r \leq \min(n, p)$ 。试证明存在矩阵 $U \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $\Sigma \in \mathbb{R}^{p \times n}$, 满足

$$A = U \Sigma V^T \quad (3.74)$$

其中:

(a) V 的各列正交, 即 $V^T V = I$, 而且它可分解为

$$V = [v_1 \cdots v_r \ v_{r+1} \cdots v_n] = [V_1 \ V_2]$$

因此 $A^T: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的值域空间 (记为 $R(A^T)$) 由 V_1 的各列张成, 而 A 的零空间 (记为 $\eta(A)$) 由 V_2 的各列张成。

(b) U 的各列是正交的, 即 $U^T U = I$, 它可分解为

$$U = [u_1 \cdots u_r \ u_{r+1} \cdots u_p] = [U_1 \ U_2]$$

因此 $R(A)$ 由 U_1 的各列张成, $\eta(A^T)$ 由 U_2 的各列张成。

(c) Σ 是一个 $p \times n$ 的矩阵, 其形式为

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

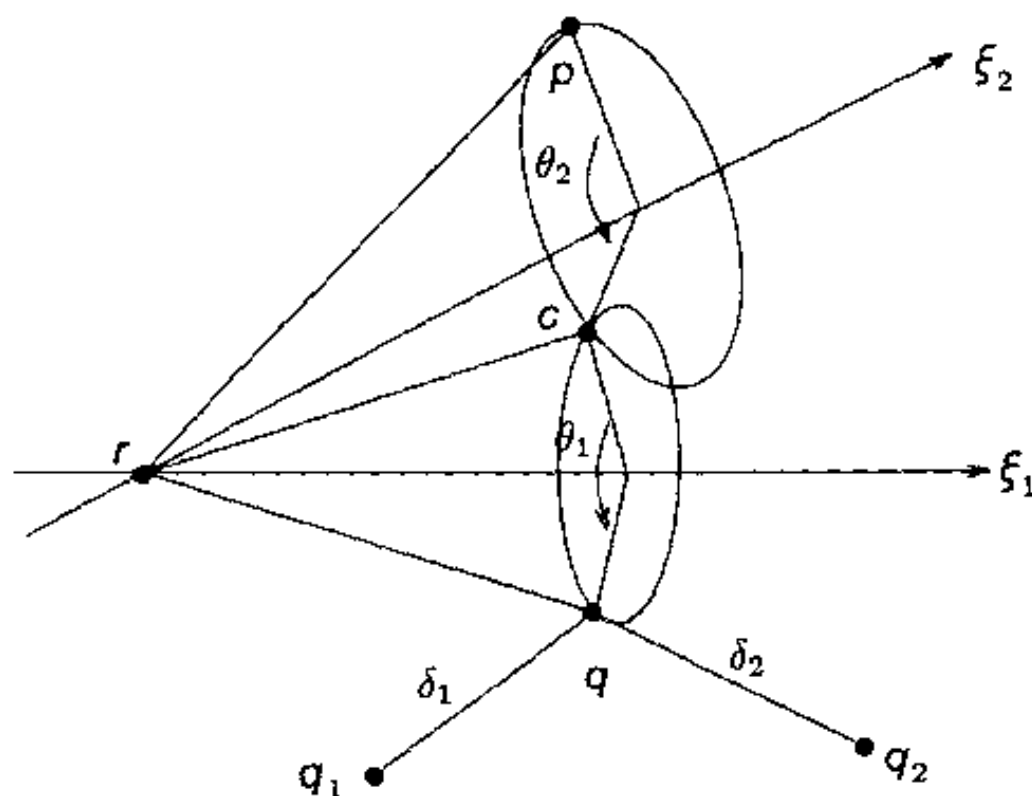


图 3.25 子问题 4

[将点 p 先绕 ξ_1 轴旋转, 再绕 ξ_2 轴旋转, 使得 p 点的最后位置至 q_1 的距离为 δ_1 , 至 q_2 的距离为 δ_2]

其中

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times r}, \quad \sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$$

σ_i 称为 A 的奇异值, $\Sigma \in \mathbb{R}^{p \times n}$ 称为 A 的 n 维 V 基和 p 维 U 基表示。

10. 设 $J(\theta): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^6$ 是机器人的雅可比矩阵。试证明操作能力的度量指标 $\mu_3(\theta)$ 等于 $J(\theta)$ 奇异值之积, 即

$$\mu_3(\theta) = \prod_{i=1}^6 \sigma_i(\theta)$$

因此, $\mu_3(\theta)$ 等于零当且仅当雅可比矩阵是奇异的。

11. 设 $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ 的秩为 r , 并有式 (3.74) 的奇异值分解, B_1 表示 n 维单位球, 即

$$B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1\}$$

试利用习题 9 中 U, V 的描述, 确定在 B_1 的 A 下的映射。并在 $r < \min(n, p)$ 时, 讨论 $p \geq n$ 与 $p \leq n$ 两种情况的不同。

12. 设 $J(\theta): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ 是机器人的雅可比矩阵 ($p=3$ 或 6)。假设所要完成的任务可模拟为任务空间中主轴长度为 $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ 的椭球, 而 $E_\beta \subset \mathbb{R}^p$ 表示放大 β 倍的椭球, 即

$$E_\beta = \{y: \left(\frac{y_1}{\alpha_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{y_p}{\alpha_p}\right)^2 \leq \beta\}$$

定义考虑任务要求时 $J(\theta)$ 的操作能力指标为

$$\mu_t(\theta) := \max\{\beta: J(\theta)(B_1) \subset E_\beta\}$$

试用 $J(\theta)$ 的奇异值和主轴长度 $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ 来表示 $\mu_t(\theta)$ 。

13. 各向同性点

如果机器人工作空间中一点的雅可比矩阵条件数为 1, 则称该点为各向同性点 (isotropic points)。

(a) 推导两杆平面机器人各向同性点的条件, 并在平面上画出它们的位置。

(b) 求无腕部肘机器人的各向同性点。

(c) 讨论在与环境产生力作用的任务中, 为什么各向同性点是很有用的。

14. 欧拉角可用于指数积公式中表示旋转运动。如果将 (α, β, γ) 看作是机器人的关节转角, 在仅考虑运动学正解映射的转动部分情况下, 就可通过计算“运动学正解”的雅可比矩阵来确定欧拉角参数表示时的奇异性。试运用此观点确定下列欧拉角的奇异性:

(a) ZYZ 欧拉角

(b) ZYX 欧拉角

(c) XYZ 欧拉角

15. 运动奇异性: 四个共面的转动关节

对于运动螺旋为 $\xi_i = (q_i \times \omega_i, \omega_i)$, $i=1, \dots, 4$ 的四个转动关节, 若存在满足下列条件的单位法矢量为 n 的平面:

(a) 各关节轴线方向均与 n 正交: $n^T \omega_i = 0, i=1, \dots, 4$;

(b) 由 q_i 到 q_j 的矢量均与 n 正交: $n^T (q_i - q_j) = 0, i=1, \dots, 4$ 。

则该四个转动关节的轴线是共面的。

试说明当六自由度机器人中四个转动关节的轴线共面时, 则该六自由度机器人处于奇异位形, 并给出呈现这种奇异位形的机器人实例。

16. 运动奇异性: 六个转动关节相交于一直线

对于运动螺旋为 $\xi_i = (q_i \times \omega_i, \omega_i)$, $i = 1, \dots, 6$ 的六个转动关节, 若存在系数 γ_i , $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, 6$, 满足

$$q_i + \gamma_i \omega_i = p + \beta_i n$$

则该六个转动关节的轴线相交于直线 $(p \times n, n)$ 。

试说明当六自由度机器人中六个转动关节轴线相交于一直线时, 则该机器人处于奇异位形。

17. 运动奇异性: 移动关节垂直于两个平行且共面的转动关节

若移动关节运动螺旋为 $\xi_3 = (v_3, 0)$, 转动关节运动螺旋为 $\xi_i = (q_i \times \omega_i, \omega_i)$, $i = 1, 2$ 。若

(a) $v_3^T \omega_i = 0$, $i = 1, 2$

(b) $v_3^T (q_1 - q_2) = 0$

(c) $\omega_1 = \pm \omega_2$

则移动关节垂直于两平行转动关节所在的平面。

试说明在这种情况下, 六自由度操作器处于奇异位形, 并给出存在这种奇异位形的一个实例。

18. 通常, 机器人的雅可比矩阵取决于基础坐标系和工具坐标系的选择。试确定 4.4 节所介绍的哪一种操作能力度量指标与基础坐标系、工具坐标系的选择无关。

19. 试说明如果机器人处于奇异位形, 则存在无需施加任何关节力矩即能达到平衡的末端执行器力螺旋 F 。该力螺旋与构成雅可比矩阵各列的运动螺旋的关系如何?

20. 考虑图 3.26 所示的曲柄滑块机构;

(a) 计算该机构的自由度, 并解释为什么不能用空间形式的 Gruebler 公式;

(b) 建立机构的结构方程;

(c) 推导结构方程的雅可比矩阵, 给出每一关节瞬时运动螺旋的表达式;

(d) 如果 d 是主动关节变量, 试确定机构的奇异位形;

(e) 如果将 θ_1 作为主动关节变量, 试确定机构的奇异位形。 l_1, l_2, l_3 满足什么条件时存在奇异位形?

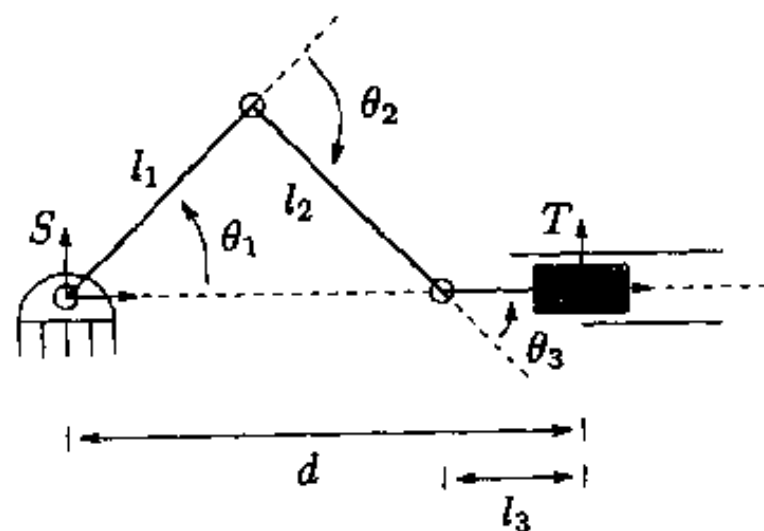


图 3.26 曲柄滑块机构

21. 图 3.27 所示的平面并联机器人称为“可变结构桁架”, 三个主动移动关节用于控制平台的位置和姿态。每一连杆末端的转动关节是被动的。假设驱动器行程不受限制。

(a) 用 Gruebler 公式计算该机构的自由度;

(b) 写出该机构的结构方程, 应确切明了地定义所取的零位形;

(c) 已知 $g_x = ([x, y], R_\phi)$, 试建立反映 d_1, d_2 和 d_3 之间关系的表达式;

(d) 确定结构方程的空间雅可比矩阵, 并给出具体的表达式。应利用部分连杆相交于一

点的特点来简化计算。

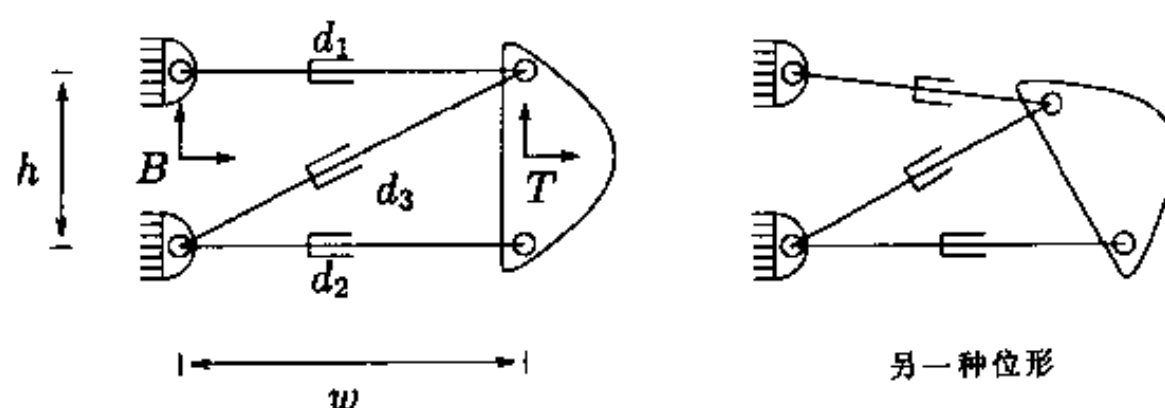


图 3.27 可变结构桁架

(e) 确定该机构的奇异位形，除运动奇异性外，还应指出驱动奇异性。

22. Stewart 平台

讨论图 3.21 所示的 Stewart 平台。设 θ_i 表示第 i 个移动关节的位移。

(a) 用 Gruebler 公式计算该机构的自由度；

(b) 试说明对于所有的 i ，如果 $\theta_i > 0$ ，则机构不处于奇异位形；

(c) 假如用 U 关节代替 Stewart 平台中的球关节（一个 U 关节是由两个轴线相交垂直的转动关节组成），用 Gruebler 公式计算代替后机构的自由度；

(d) 推导 (c) 中机构的结构方程，它是否存在奇异位形？

第四章 机器人动力学及控制

本章介绍机器人的动力学及控制。利用动力学中的有关理论推导一般开链机器人的运动方程，并构造跟踪给定期望轨迹的控制策略。在动力学推导过程中，采用运动螺旋来表示机器人的运动学，并探讨运动学在建立运动方程中的作用。这里认为读者对物理系统的控制和动力学都有一定的了解。

1 概述

由上一章可知，机器人运动学模型描述了机器人关节运动与被操作物体运动之间的关系。这里默认能对机器人关节实现任意运动规律的控制，并且机器人能真实地再现这些运动规律。本章具体介绍机器人如何实现给定的关节运动。

大多数机器人以电、液或气作为动力，将驱动力矩（直线驱动时为力）施加在机器人的关节处。机器人的动力学描述了在这些力作用下机器人如何运动。为简单起见，不考虑驱动器本身的动力学问题，从而认为能在机器人关节处施加任意力矩。这样，只需研究机器人的固有力学特性，而无需考虑特定机器人的关节是如何驱动的。

本章采用一组基于机器人运动学和惯性的非线性二阶常微分方程来描述机器人的动力学。从理论上讲，虽然这些方程可以通过计算作用在相互连接的刚体上的所有力来推出，但我们只用动力学的拉格朗日方程进行推导。这是因为该方法仅需计算系统的动能和势能，因而与直接计算作用在机器人连杆上的惯性力、哥氏力、离心力、驱动力及其他力的方法相比，该方法不易出错，而且还能确定动力学的结构特征。

一旦已知机器人的运动方程，其运动学逆解也就可求出，由此即可确定控制机器人沿给定轨迹运动所需的驱动力。如果已经建立了机器人动力学模型，那么直接由此模型即可确定关节力矩。但实际上还必须设计一种能对所施加的作用力进行校正的反馈控制策略，以补偿相对于期望轨迹的偏差，并保证整个系统在存在初始条件误差、传感器噪声和模型误差的情况下也能收敛于期望轨迹。

本章主要解决一个最简单的机器人控制问题——位置调整问题。解决此问题有两种基本的方法：第一种方法称之为关节空间控制，它是把给定任务转化成机器人关节的期望运动规律，然后利用控制策略确定使机器人跟踪给定轨迹所需的关节力矩；第二种方法是将动力学和控制问题变换到任务空间，由此根据末端执行器的位姿来确定控制策略，这种方法称为工作空间控制。

机器人与周围环境的直接接触增加了控制的难度，这时不仅要控制末端执行器的位置，而且要控制机器人对环境所作用的力。本章最后部分简要地讨论了上述问题。详尽的描述在介绍了约束系统研究方法后于第六章中给出。

2 拉格朗日方程

建立机械系统的动力学方程有许多方法。但各种方法所建立的方程都是等价的，只是方程形式不同，从而在计算或分析方面存在差异。本章采用拉格朗日方法来推导动力学公式，也即依据机械系统的能量来建立运动方程。所得方程具有解析解，可以对系统特性作进一步的分析。

2.1 基本公式

考虑具有 n 个质点的系统，它遵循牛顿第二定律，即单位时间内质点动量的改变量等于作用在质点上的力。设 F_i 为作用在质点 i 上的力， m_i 为质点的质量， r_i 为质点的位置，则根据牛顿第二定律有

$$F_i = m_i \ddot{r}_i \quad r_i \in \mathbb{R}^3, i = 1, \dots, n \quad (4.1)$$

我们只对那些相互联系并具有有限个自由度的质点系统感兴趣，而不是讨论相互独立的质点集合。为了描述这些相互联系质点间的关系，引入质点位置间的约束，每一个约束可用函数 $g_j: \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}$ 来表示，即

$$g_j(r_1, \dots, r_n) = 0 \quad j = 1, \dots, k \quad (4.2)$$

能写成上述形式的约束称为完整约束 (holonomic constraint)，如质点间的位置约束。刚体间还存在更为一般的约束，如速度约束。在研究多指手时将会发现存在此类约束。

约束对质点系的作用是施加约束力。当式 (4.2) 所表示的约束满足时，就可确定约束力。如果将约束看作是 $\mathbb{R}^n$ 中的光滑曲面，那么约束力垂直于曲面，并将系统的速度始终限制在与此曲面相切的平面内。由此，可将系统动力学写成如下的矢量方程

$$F = \begin{bmatrix} m_1 I & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_n I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{r}_1 \\ \vdots \\ \ddot{r}_n \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^k \Gamma_j \lambda_j \quad (4.3)$$

式中矢量 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k \in \mathbb{R}^{3n}$ 是约束力的基， λ_j 是第 j 个基元素的比例系数。 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ 并不要求是标准正交。对于形如式 (4.2) 的约束， Γ_j 可看成是 g_j 的梯度，并正交于 $g_j(r) = 0$ 。

比例系数 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 称为拉格朗日乘子 (Lagrange multipliers)。通常，通过对式 (4.2) 和式 (4.3) 所表示的含 $3n + k$ 个变量 ($r \in \mathbb{R}^{3n}$, $\lambda \in \mathbb{R}^k$)、共 $3n + k$ 个方程的求解，即可确定拉格朗日乘子。由于 Γ_j 并不要求是标准正交的，所以 λ_i 的值仅给出了约束力的相对大小。

用以上方法求解约束力，看似简单，然而计算起来却很复杂。这是因为即使系统质点不能独立运动，也必须跟踪系统中的所有质点的状态。一个很有吸引力的方法是利用那些能完全确定系统位置的少量变量来描述系统的运动。对一个具有 k 个约束、 n 个质点的系统，需找到 $m = 3n - k$ 个变量 $q_1, \dots, q_m$ 和一组光滑函数 $f_1, \dots, f_n$ ，它们满足下式

$$\begin{aligned} r_i = f_i(q_1, \dots, q_m) \\ i = 1, \dots, n \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} g_j(r_1, \dots, r_n) = 0 \\ j = 1, \dots, k \end{aligned} \quad (4.4)$$

其中 q_i 称为系统广义坐标 (generalized coordinates)。对于由刚性连杆组成的机器人而言，这些广义坐标一般总是取为关节角度，而这些角度值又唯一地确定了组成机器人的所有质点

的位置。

由于广义坐标值完全描述了质点的位置,所以可用广义坐标来建立系统的运动方程。为此,也用广义坐标来表示作用于系统的外力,并称其为广义力 (generalized forces),以区别于用矢量表示的三维自然力。对于将关节转角作为广义坐标的机器人,广义力就是作用于关节轴线上的力矩。

为建立运动方程,将系统动能与势能之差定义为拉格朗日函数即

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q)$$

式中 T 、 V 分别是以广义坐标表示的系统动能和势能。

定理: 4.1 拉格朗日方程

对于广义坐标为 $q \in \mathbb{R}^m$ 、拉格朗日函数为 L 的机械系统,其运动方程为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = r_i \quad i = 1, \dots, m \quad (4.5)$$

式中 r_i 是作用在第 i 个广义坐标上的外力。

式 (4.5) 称为拉格朗日方程,写成矢量形式则有

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = r$$

其中 $\partial L / \partial \dot{q}$, $\partial L / \partial q$ 和 r 通常看成是行矢量,为方便起见也常将其写成列矢量。在大多数关于机械系统动力学的书中都有上述定理的证明 (如 [100])。

拉格朗日方程是机械系统动力学研究的一个极好的公式,它将描述系统运动所需的方程数从 n (系统质点数) 减少到 m (广义坐标数)。注意,如果系统没有约束,则可将 q 取作为 r 的元素,在给定 $T = \frac{1}{2} \sum m_i \| \dot{r}_i \|^2$ 的情况下,式 (4.5) 就简化成式 (4.1)。实际上,式 (4.5) 可改写为如下形式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q} + r$$

这就是广义坐标下的牛顿定律

$$\frac{d}{dt}(\text{动量}) = \text{作用力}$$

利用式 (4.4) 可得每个质点的运动。

例 4.1 球摆的动力学

考虑图 4.1 所示的理想球摆,该系统有一质量为 m 的质点通过长度为 l 的无质量杆联于一球关节上。用两个标量参数 θ 、 ϕ 描述质点位置, θ 、 ϕ 分别表示质点绕 z 轴和 x 轴的角位移。现要求在重力作用下质点的运动。

首先求系统的拉格朗日函数 L 。质点相对于球摆机架坐标原点的位置为

$$r(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} l \sin \theta \cos \phi \\ l \sin \theta \sin \phi \\ -l \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

质点的动能为

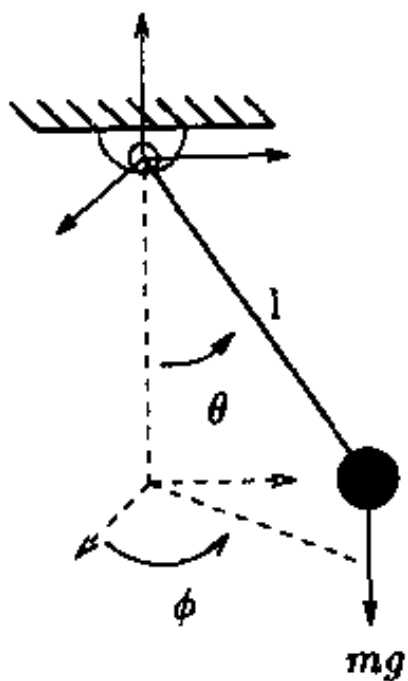


图 4.1 理想球摆
(系统的位置用
角度参数 θ 、 ϕ 表示)

$$T = \frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}^2 + (1 - \cos^2 \theta) \dot{\phi}^2)$$

质点的势能为

$$V = -mgl \cos \theta$$

其中 $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$ 是重力常量。因此拉格朗日函数为

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}^2 + (1 - \cos^2 \theta) \dot{\phi}^2) + mgl \cos \theta$$

式中 $\mathbf{q} = (\theta, \phi)$ 。

将 L 代入拉格朗日方程得

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\theta}) = ml^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = ml^2 \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta - mgl \sin \theta$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta) = ml^2 \ddot{\phi} \sin^2 \theta + 2ml^2 \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \theta \cos \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

系统动力学方程可写为下式

$$\begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -ml^2 \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \\ 2ml^2 \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \theta \cos \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mgl \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.7)$$

当给出质点的初始位置和初始速度时, 式 (4.7) 就唯一地确定了系统的随后运动, 并且由式 (4.6) 可求得质点的三维运动。

2.2 刚体的惯性

将拉格朗日方程用于机器人时, 必须将机器人连杆的动能和势能表示为关节转角和关节速度的函数, 这就要求建立连杆的质量分布模型。因每一连杆都是刚体, 所以连杆的动能和势能可根据其总质量和关于质心的惯量确定。

设 $V \subset \mathbb{R}^3$ 是刚体的体积, $\rho(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in V$ 是物体的质量分布规律。如果物体是匀质的, 那么 $\rho(\mathbf{r}) = \rho$ 就是常量。刚体的质量可表示为质量密度的体积积分:

$$m = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

刚体的质心就是密度的加权平均, 即

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{1}{m} \int_V \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} dV$$

考虑图 4.2 所示的刚体, 其动能计算如下: 在物体质心处建立一物体坐标系, 并设 $(\mathbf{p}, \mathbf{R})$ 为物体相对于惯性坐标系的运动轨迹, 为简化起见, 这里省略了所有下标。再设 $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ 为物体上一点相对于物体坐标系的坐标, 则该

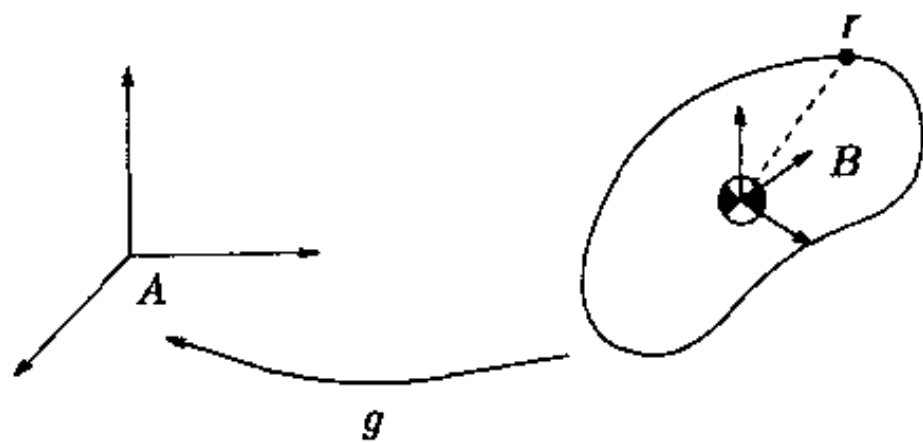


图 4.2 计算运动刚体动能的坐标系

点在惯性坐标系中的速度为

$$\dot{\mathbf{P}} + \dot{\mathbf{R}}\mathbf{r}$$

物体的动能可用如下体积积分求出

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) \|\dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{R}}\mathbf{r}\|^2 dV \quad (4.8)$$

上式可展开为

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) (\|\dot{\mathbf{p}}\|^2 + 2\dot{\mathbf{p}}^T \dot{\mathbf{R}}\mathbf{r} + \|\dot{\mathbf{R}}\mathbf{r}\|^2) dV$$

上式第一项是移动动能。由于物体坐标系位于质心，并且

$$\int_V \rho(\mathbf{r}) (\dot{\mathbf{p}}^T \dot{\mathbf{R}}) \mathbf{r} dV = (\dot{\mathbf{p}}^T \dot{\mathbf{R}}) \int_V \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} dV = 0$$

所以第二项为零，最后一项可利用转动特性和反对称矩阵加以简化

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{r})^T (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{r}) dV &= \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) (\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r})^T (\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}) dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) (\hat{\mathbf{r}}\boldsymbol{\omega})^T (\hat{\mathbf{r}}\boldsymbol{\omega}) dV = \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \left\{ \int_V \rho(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{r}}^T \hat{\mathbf{r}} dV \right\} \boldsymbol{\omega} =: \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathfrak{I} \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{\omega} \in \mathfrak{R}^3$ 为刚体角速度，对称矩阵 $\mathfrak{I} \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ 定义为

$$\mathfrak{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} = - \int_V \rho(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{r}}^2 dV$$

上式称为在物体坐标系中表示的物体惯性张量 (inertia tensor)，其中

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_V \rho(\mathbf{r}) (y^2 + z^2) dx dy dz \\ I_{xy} &= - \int_V \rho(\mathbf{r}) (xy) dx dy dz \end{aligned}$$

其他项的定义与此类似。

物体总动能可写为移动动能与转动动能之和。

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{p}}\|^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathfrak{I} \boldsymbol{\omega} = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{V}^b)^T \begin{bmatrix} m\mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathfrak{I} \end{bmatrix} \mathbf{V}^b =: \frac{1}{2} (\mathbf{V}^b)^T \mathfrak{M} \mathbf{V}^b \end{aligned} \quad (4.9)$$

式中 $\hat{\mathbf{V}}^b = g^{-1} \dot{\mathbf{g}} \in se(3)$ 是物体速度， $\mathfrak{M}$ 称为在物体坐标系中表示的物体广义惯性矩阵 (generalized inertia matrix)。矩阵 $\mathfrak{M}$ 是对称且正定的。

例 4.2 均质杆的广义惯性矩阵

图 4.3 所示为一长方体均质杆，其质量为 m ，长度为 l ，宽为 w ，高为 h ，杆的（质

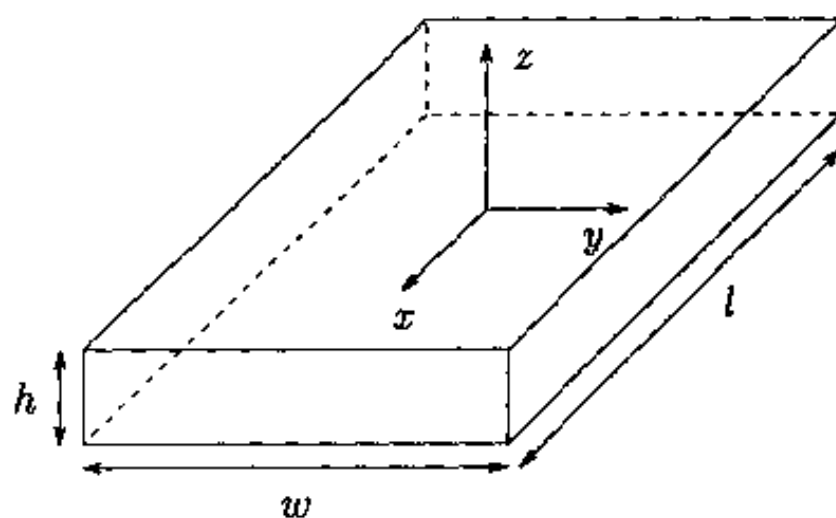


图 4.3 长方体均质杆

量) 密度为 $\rho = \frac{m}{lwh}$ 。在杆的质心处建立一坐标系, 坐标轴沿杆的主轴方向。

利用前述公式可得惯性张量为

$$I_{xx} = \int_V \frac{m}{lwh} (y^2 + z^2) dV = \frac{m}{lwh} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-w/2}^{w/2} \int_{-l/2}^{l/2} (y^2 + z^2) dx dy dz =$$

$$\frac{m}{lwh} \left\{ \frac{1}{12} (lw^3h + lwh^3) \right\} = \frac{m}{12} (w^2 + h^2)$$

$$I_{xy} = - \int_V \frac{m}{lwh} (xy) dV = - \frac{m}{lwh} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-w/2}^{w/2} \int_{-l/2}^{l/2} (xy) dx dy dz =$$

$$- \frac{m}{lwh} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-w/2}^{w/2} \left\{ \frac{1}{2} x^2 y \right\}_{-l/2}^{l/2} dy dz = 0$$

采用同样方法可求得其他项。由此可得

$$\mathfrak{I} = \begin{bmatrix} \frac{m}{12} (w^2 + h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12} (l^2 + h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12} (l^2 + w^2) \end{bmatrix}$$

由于坐标轴与长方体主轴方向一致, 所以惯性张量矩阵是对角阵。

广义惯性矩阵表示如下:

$$\mathfrak{M} = \begin{bmatrix} mI & 0 \\ 0 & \mathfrak{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{m}{12} (w^2 + h^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m}{12} (l^2 + h^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m}{12} (l^2 + w^2) \end{bmatrix}$$

由于物体坐标系建立在质心, 所以该矩阵具有块对角化结构 (见习题 3)。

2.3 实例: 两杆平面机器人的动力学

为说明如何将拉格朗日方程用于简单机器人系统, 考虑图 4.4 所示两杆平面机器人, 其中每一连杆均看作是均质长方体杆, 质量为 m_i , 相对于连杆质心坐标系 (与连杆主轴方向一致) 的惯性张量为

$$\mathfrak{I}_i = \begin{bmatrix} I_{xi} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yi} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zi} \end{bmatrix}$$

设 $v_i \in \mathcal{R}^3$ 为第 i 杆的质心移动速度, $\omega_i \in \mathcal{R}^3$ 为其角速度, 则该机器人的动能为

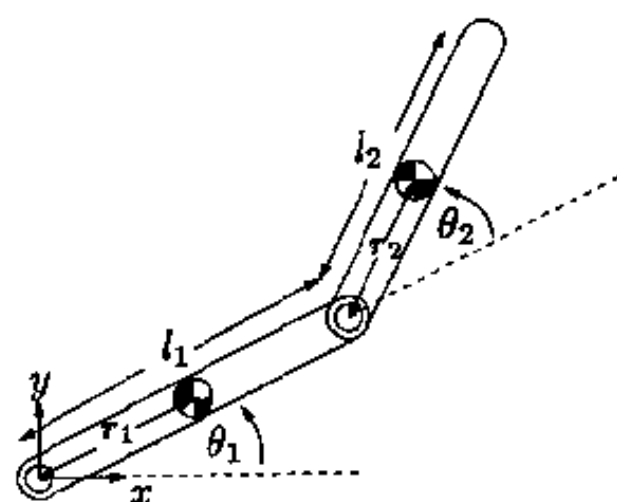


图 4.4 两杆平面操作器

$$T(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{2} m_1 \|\mathbf{v}_1\|^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_1^T \mathfrak{I}_1 \boldsymbol{\omega}_1 + \frac{1}{2} m_2 \|\mathbf{v}_2\|^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_2^T \mathfrak{I}_2 \boldsymbol{\omega}_2$$

因机器人只能在 xy 平面内运动, 所以 $\|\mathbf{v}_i\|$ 就是质心在 xy 平面内速度的大小; $\boldsymbol{\omega}_i$ 是沿 z 轴方向的矢量, 且有: $\|\boldsymbol{\omega}_1\| = \dot{\theta}_1$, $\|\boldsymbol{\omega}_2\| = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2$ 。

利用机构运动学关系, 可以求得广义坐标表示的动能。如图 4.4 所示, 设 $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i, 0)$ 表示第 i 杆质心的位置, r_1 、 r_2 分别是各杆转动关节至质心的距离, 有

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= r_1 c_1 & \dot{\bar{x}}_1 &= -r_1 s_1 \dot{\theta}_1 \\ \bar{y}_1 &= r_1 s_1 & \dot{\bar{y}}_1 &= r_1 c_1 \dot{\theta}_1 \\ \bar{x}_2 &= l_1 c_1 + r_2 c_{12} & \dot{\bar{x}}_2 &= -(l_1 s_1 + r_2 s_{12}) \dot{\theta}_1 - r_2 s_{12} \dot{\theta}_2 \\ \bar{y}_2 &= l_1 s_1 + r_2 s_{12} & \dot{\bar{y}}_2 &= (l_1 c_1 + r_2 c_{12}) \dot{\theta}_1 + r_2 c_{12} \dot{\theta}_2 \end{aligned}$$

其中 $s_i = \sin \theta_i$, $s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j)$, c_i 、 c_{ij} 与此类似。因此系统的动能就可写成

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) &= \frac{1}{2} m_1 (\dot{\bar{x}}_1^2 + \dot{\bar{y}}_1^2) + \frac{1}{2} \mathfrak{I}_{z1} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{\bar{x}}_2^2 + \dot{\bar{y}}_2^2) + \frac{1}{2} \mathfrak{I}_{z2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \alpha + 2\beta c_2 & \delta + \beta c_2 \\ \delta + \beta c_2 & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathfrak{I}_{z1} + \mathfrak{I}_{z2} + m_1 r_1^2 + m_2 (l_1^2 + r_2^2) \\ \beta &= m_2 l_1 l_2 \\ \delta &= \mathfrak{I}_{z2} + m_2 r_2^2 \end{aligned}$$

最后, 将拉格朗日函数 $L = T$ 代入拉格朗日方程, 经整理后得

$$\begin{bmatrix} \alpha + \beta c_2 & \delta + \frac{1}{2} \beta c_2 \\ \delta + \frac{1}{2} \beta c_2 & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \beta s_2 \dot{\theta}_2 & -\frac{1}{2} \beta s_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ \frac{1}{2} \beta s_2 \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

上式第一项表示由于关节加速运动而产生的惯性力, 第二项为哥氏力和离心力, 等式右侧为外力矩。

2.4 刚体的牛顿-欧拉方程

拉格朗日方程是建立机械系统运动方程的一般方法, 然而, 推导拉格朗日方程的前提是假设系统的位形空间可用 $\mathfrak{R}^n$ (n 为系统的自由度) 的子集表示。对于位形为 $g \in SE(3)$ 的刚体, 拉格朗日方程就不能直接用于建立运动方程, 除非选择表示位形空间的局部参数 (例如, 用欧拉角表示刚体的姿态)。由于 $g \in SE(3)$ 的所有参数对于某些位形是齐异的, 所以拉格朗日方程只能适用于局部参数。

本节讨论受外力和外力矩作用刚体的动力学全局参数表示。首先回顾一下刚体运动方程的一般推导过程, 然后利用运动螺旋和力螺旋建立动力学方程。

设 $g = (\mathbf{p}, \mathbf{R}) \in SE(3)$ 表示刚体质心坐标系相对于惯性坐标系的位形, $\mathbf{f}$ 为在惯性坐标系中表示的作用于质心的力。由牛顿定律可得移动方程, 写成线动量 $m\dot{\mathbf{p}}$ 形式为

$$\mathbf{f} = \frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{p}})$$

因刚体的质量是常数，所以上式可改为

$$\mathbf{f} = m\ddot{\mathbf{p}} \quad (4.12)$$

由于刚体的位置是用质心其表示的，所以上式与刚体的转动无关。

同理，可推导刚体的转动方程，并且与系统的移动无关。现考虑在外力矩 $\boldsymbol{\tau}$ 作用下刚体绕一点的转动。为建立运动方程，令角动量的改变量等于外力矩。相对于惯性坐标系的角动量为 $\mathfrak{J}'\boldsymbol{\omega}'$ ，其中

$$\mathfrak{J}' = \mathbf{R}\mathfrak{J}\mathbf{R}^T$$

是相对于惯性坐标系的瞬时惯性张量， $\boldsymbol{\omega}'$ 是空间角速度。因此转动方程为

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d}{dt}(\mathfrak{J}'\boldsymbol{\omega}') = \frac{d}{dt}(\mathbf{R}\mathfrak{J}\mathbf{R}^T\boldsymbol{\omega}')$$

式中 $\boldsymbol{\tau} \in \mathfrak{R}^3$ 在惯性坐标系中表示。将上式右侧展开得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{R}\dot{\mathfrak{J}}\mathbf{R}^T\boldsymbol{\omega}' + \mathbf{R}\mathfrak{J}\dot{\mathbf{R}}^T\boldsymbol{\omega}' + \mathbf{R}\mathfrak{J}\mathbf{R}^T\dot{\boldsymbol{\omega}}' = \\ &= \dot{\mathfrak{J}}'\boldsymbol{\omega}' + \mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^T\mathfrak{J}'\boldsymbol{\omega}' + \mathfrak{J}'\mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^T\boldsymbol{\omega}' = \\ &= \dot{\mathfrak{J}}'\boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathfrak{J}'\boldsymbol{\omega}' - \mathfrak{J}'\boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{\omega}' \end{aligned}$$

其中最后一个方程利用了对恒等式 $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$ 的微分以及 $\boldsymbol{\omega}'$ 的定义。由于上式最后一项等于零，因此动力学方程为

$$\dot{\mathfrak{J}}'\boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathfrak{J}'\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\tau} \quad (4.13)$$

式 (4.13) 称为欧拉方程 (Euler's equation)。

式 (4.12) 和式 (4.13) 通过作用于质心的力和力矩描述了刚体的动力学，但是力和力矩矢量不是相对于质心坐标系表示的，而是相对于惯性坐标系表示的。因此 $(\mathbf{f}, \boldsymbol{\tau}) \in \mathfrak{R}^6$ 并不是如第二章所定义的作用于刚体的力螺旋，这是因为力的作用点不是惯性坐标系的原点。同理， $(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}')$ 也不是空间速度或物体速度，因为 $\dot{\mathbf{p}}$ 并不是移动速度在物体坐标系或空间坐标系中的正确表示。

为用运动螺旋和力螺旋来表示刚体动力学，将物体速度 $\mathbf{v}^b = \mathbf{R}^T\dot{\mathbf{p}}$ 和物体力 $\mathbf{f}^b = \mathbf{R}^T\mathbf{f}$ 代入牛顿方程。展开式 (4.12) 的右侧有

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{p}}) = \frac{d}{dt}(m\mathbf{R}\mathbf{v}^b) = \mathbf{R}m\dot{\mathbf{v}}^b + \dot{\mathbf{R}}m\mathbf{v}^b$$

等式两边左乘 $\mathbf{R}^T$ ，则移动动力学方程变为

$$m\dot{\mathbf{v}}^b + \boldsymbol{\omega}^b \times m\mathbf{v}^b = \mathbf{f}^b \quad (4.14)$$

上式就是在物体坐标系中表示的牛顿定律 (Newton's Law)。

与此类似，将物体角速度 $\boldsymbol{\omega}^b = \mathbf{R}^T\boldsymbol{\omega}'$ 和物体力矩 $\boldsymbol{\tau}^b = \mathbf{R}^T\boldsymbol{\tau}$ 代入欧拉方程。经简单计算得

$$\dot{\mathfrak{J}}\boldsymbol{\omega}^b + \boldsymbol{\omega}^b \times \mathfrak{J}\boldsymbol{\omega}^b = \boldsymbol{\tau}^b \quad (4.15)$$

上式就是在刚体坐标系中表示的欧拉方程。注意，在物体坐标系中表示的惯性张量是常量，因此可用 $\mathfrak{J}$ 代替 $\mathfrak{J}' = \mathbf{R}\mathfrak{J}\mathbf{R}^T$ 。

将式 (4.14) 和式 (4.15) 加以组合，即得质心处作用有外力螺旋 $\mathbf{F}$ 、相对于物体坐标系的物体运动方程

$$\begin{bmatrix} m\mathbf{I} & 0 \\ 0 & m\mathfrak{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}^b \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}^b \times m\mathbf{v}^b \\ \boldsymbol{\omega}^b \times \mathfrak{J}\boldsymbol{\omega}^b \end{bmatrix} = \mathbf{F}^b \quad (4.16)$$

上式称为在物体坐标系中表示的牛顿-欧拉方程 (Newton-Euler equation), 它给出了受外力螺旋作用的物体运动方程的全面描述, 注意, 由于相对于物体坐标系的线速度与当前姿态有关, 所以移动和转动存在偶合联系。

也可以建立相对于空间坐标系的牛顿-欧拉方程, 其推导留作习题 4 和习题 5。再次将移动方程和转动方程加以组合, 移动仍与转动有关。本书总是采用相对于物体坐标系的牛顿-欧拉方程, 也就是式 (4.16)。

3 开链机器人动力学

下面推导开链机器人的运动学方程, 利用前一章的运动学公式建立以关节转角和关节速度表示的机器人拉格朗日函数, 并建立相应的动力学方程, 探讨机器人的几个基本特性, 这些特性在证明机器人控制规则的稳定性时是非常重要的。

3.1 开链机器人的拉格朗日函数

为计算具有 n 个关节的开链机器人的动能, 可将其中每一连杆的动能求和。为此定义一个固联于第 i 杆质心的坐标系 L_i , 设

$$g_{s_i}(\theta) = e^{\xi_1 \theta_1} \cdots e^{\xi_i \theta_i} g_{s_i}(0)$$

表示坐标系 L_i 相对于机器人基础坐标系 S 的位形。第 i 杆质心的物体速度为

$$\mathbf{v}_{s_i}^b = \mathbf{J}_{s_i}^b(\theta) \dot{\theta}$$

其中 $\mathbf{J}_{s_i}^b$ 为相对于 g_{s_i} 的物体雅可比矩阵, 其形式为

$$\mathbf{J}_{s_i}^b(\theta) = [\xi_1^+ \quad \cdots \quad \xi_i^+ \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$$

式中

$$\xi_j^+ = \text{Ad}_{(e^{\xi_1 \theta_1} \cdots e^{\xi_{j-1} \theta_{j-1}} g_{s_i}(0))} \xi_j, \quad j \leq i$$

为相对于第 i 连杆坐标系的第 j 个瞬时关节运动螺旋。

第 i 杆的动能为

$$T_i(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{s_i}^b)^T \mathfrak{M}_i \mathbf{v}_{s_i}^b = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T \mathbf{J}_i^T(\theta) \mathfrak{M}_i \mathbf{J}_i(\theta) \dot{\theta} \quad (4.17)$$

式中 $\mathfrak{M}_i$ 为第 i 杆的广义惯性矩阵。总动能为

$$T(\theta, \dot{\theta}) = \sum_{i=1}^n T_i(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T \mathbf{M}(\theta) \dot{\theta} \quad (4.18)$$

矩阵 $\mathbf{M}(\theta) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ 为机器人惯性矩阵。基于连杆雅可比矩阵 $\mathbf{J}_i$, 可将操作器惯性矩阵定义为

$$\mathbf{M}(\theta) = \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i^T(\theta) \mathfrak{M}_i \mathbf{J}_i(\theta) \quad (4.19)$$

为完成拉格朗日函数的推导, 必须计算机器人的势能。设 $h_i(\theta)$ 为第 i 杆质心的高度, 则第 i 杆的势能为

$$V_i(\theta) = m_i g h_i(\theta)$$

式中 m_i 为第 i 杆的质量, g 为重力常量。总势能为各杆势能之和, 即

$$V(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n V_i(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n m_i g h_i(\boldsymbol{\theta})$$

将其与动能加以组合, 得

$$L(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \sum_{i=1}^n (T_i(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) - V_i(\boldsymbol{\theta})) = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\theta}} - V(\boldsymbol{\theta})$$

3.2 开链机器人的运动方程

设 $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$ 为开链机器人的关节转角, 则拉格朗日函数具有下列形式:

$$L(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\theta}} - V(\boldsymbol{\theta})$$

其中 $\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})$ 为操作器的惯性矩阵, $V(\boldsymbol{\theta})$ 为重力所对应的势能。将动能表示成和的形式, 有

$$L(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n M_{ij}(\boldsymbol{\theta}) \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j - V(\boldsymbol{\theta}) \quad (4.20)$$

将上式代入拉格朗日方程, 得运动方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = r_i$$

其中 r_i 表示作用于第 i 关节的驱动力矩和其他非保守广义力。利用式 (4.20), 有

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{j=1}^n M_{ij} \dot{\theta}_j \right\} = \sum_{j=1}^n (\dot{M}_{ij} \dot{\theta}_j + M_{ij} \ddot{\theta}_j)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_i} = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial M_{kj}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_k \dot{\theta}_j - \frac{\partial V}{\partial \theta_i}$$

通过偏微分将 $\dot{M}_{ij}$ 展开, 得

$$\sum_{j=1}^n M_{ij}(\boldsymbol{\theta}) \ddot{\theta}_j + \sum_{j,k=1}^n \left\{ \frac{\partial M_{ij}}{\partial \theta_k} \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{kj}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_k \dot{\theta}_j \right\} + \frac{\partial V}{\partial \theta_i}(\boldsymbol{\theta}) = r_i \quad i=1, \dots, n$$

上式经整理得

$$\sum_{j=1}^n M_{ij}(\boldsymbol{\theta}) \ddot{\theta}_j + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{ijk} \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k + \frac{\partial V}{\partial \theta_i}(\boldsymbol{\theta}) = r_i \quad i=1, \dots, n \quad (4.21)$$

其中

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial M_{ij}}{\partial \theta_k} + \frac{\partial M_{ik}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial M_{kj}}{\partial \theta_i} \right\} \quad (4.22)$$

式 (4.21) 为关于机器人关节变量的二阶微分方程, 它由四部分组成: 与关节加速度有关的惯性力, 与关节速度平方成正比的离心力和哥氏力, 有势力 $\frac{\partial V}{\partial \theta_i}$ 和外力 r_i 。

由于非惯性坐标系隐含在广义坐标中, 所以出现了离心力和哥氏力项。在经典力学中, 将 $\dot{\theta}_i \dot{\theta}_j$ ($i \neq j$) 项称为哥氏力, 将 $\dot{\theta}_i^2$ 项称为离心力。函数 Γ_{ijk} 称为惯性矩阵 $\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})$ 所对应的 Christoffel 符号。

外力可以分为两部分, 设 τ_i 为作用于关节处的外力矩, 并定义 $-N_i(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$ 为作用于第 i 个广义坐标的任意其他力, 包括由有势力和摩擦力所产生的保守力。例如, 如果机器人在关节处存在粘性摩擦, 那么 N_i 可定义为

$$-N_i(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = -\frac{\partial V}{\partial \theta_i} - \beta \dot{\theta}_i$$

式中 β 为阻尼系数。作用于机器人的其他力，如作用于末端执行器上的力，可以通过雅可比矩阵的转置将其折算到关节上。

为将运动方程转换成矢量形式，定义矩阵 $C(\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为

$$C_{ij}(\theta, \dot{\theta}) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ijk} \dot{\theta}_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial M_{ij}}{\partial \theta_k} + \frac{\partial M_{jk}}{\partial \theta_i} - \frac{\partial M_{ki}}{\partial \theta_j} \right\} \dot{\theta}_k \quad (4.23)$$

称矩阵 C 为机器人的哥氏矩阵，矢量 $C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta}$ 决定了运动方程中的哥氏力和离心力项。注意还有其他方法定义满足 $C_{ij}(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta}_j = \Gamma_{ijk}\dot{\theta}_j\dot{\theta}_k$ 的矩阵 $C(\theta, \dot{\theta})$ ，但是下面可以看出这种特殊选择将具有重要性。

式 (4.21) 可以改写为

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + N(\theta, \dot{\theta}) = \tau \quad (4.24)$$

式中 τ 为驱动力矩矢量， $N(\theta, \dot{\theta})$ 包括重力和作用于关节的其他力。式 (4.24) 是描述机器人运动的二阶矢量微分方程，它是关节力矩的函数。反映机器人惯性特性的矩阵 M 和 C 具有一些重要的性质，下面将会用到这些性质。

引理 4.2 机器人运动方程的结构特性

式 (4.24) 具有下列性质：

1. $M(\theta)$ 是对称且正定的；
2. $\dot{M} - 2C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是反对称矩阵。

证明：惯性矩阵的正定可以直接根据定义和机器人静止时其动能为零的特点得到证明。为证明性质 2，可计算矩阵 $\dot{M} - 2C$ 的元素：

$$\begin{aligned} (\dot{M} - 2C)_{ij} &= \dot{M}_{ij}(\theta) - 2C_{ij}(\theta) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial \theta_k} \dot{\theta}_k - \frac{\partial M_{ij}}{\partial \theta_k} \dot{\theta}_k - \frac{\partial M_{ik}}{\partial \theta_j} \dot{\theta}_k + \frac{\partial M_{ki}}{\partial \theta_j} \dot{\theta}_k \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial M_{ki}}{\partial \theta_j} \dot{\theta}_k - \frac{\partial M_{ik}}{\partial \theta_j} \dot{\theta}_k \right) \end{aligned}$$

将下标 i 和 j 交换即得 $(\dot{M} - 2C)^T = -(\dot{M} - 2C)$ 。注意反对称性质与式 (4.23) 中 C 的特殊定义有关。

性质 2 常为被动特性，这是因为在无摩擦情况下机器人系统的总能量保持守恒（见习题 8）。在证明机器人的有关控制规则时，该被动特性是很重要的。

例 4.3 三杆机器人的动力学

为说明上述公式的应用，下面计算图 4.5 所示三杆机器人的动力学。在第三章肘机器人的分析中已求得了各关节的运动螺旋

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -l_0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \xi_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -l_0 \\ l_1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

如图所示，在每一连杆的质心处建立一个坐标系 L_i ，坐标轴方向取为与连杆惯性主轴

系统的惯性矩阵为

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_1^T \mathbf{M}_1 \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2^T \mathbf{M}_2 \mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_3^T \mathbf{M}_3 \mathbf{J}_3$$

其中的元素为

$$M_{11} = I_{y2}s_2^2 + I_{y3}s_{23}^2 + I_{x1} + I_{x2}c_2^2 + I_{x3}c_{23}^2 + m_2r_1^2c_2^2 + m_3(l_1c_2 + r_2c_{23})^2$$

$$M_{12} = 0$$

$$M_{13} = 0$$

$$M_{21} = 0$$

$$M_{22} = I_{x2} + I_{x3} + m_3l_1^2 + m_2r_1^2 + m_3r_2^2 + 2m_3l_1r_2c_3$$

$$M_{23} = I_{x3} + m_3r_2^2 + m_3l_1r_2c_3$$

$$M_{31} = 0$$

$$M_{32} = I_{x3} + m_3r_2^2 + m_3l_1r_2c_3$$

$$M_{33} = I_{x3} + m_3r_2^2$$

注意不同连杆的惯性矩表达式并不都与上述相同，这是由于机器人有限的自由度并不允许各关节绕其轴线任意转动。

哥氏力和离心力可根据惯性矩阵通过下式直接计算

$$\mathbf{C}_{ij}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ijk} \dot{\theta}_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial M_{ij}}{\partial \theta_k} + \frac{\partial M_{ik}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial M_{kj}}{\partial \theta_i} \right\} \dot{\theta}_k$$

经复杂的计算后，可得非零的 Γ_{ijk} 值为

$$\Gamma_{112} = (I_{y2} - I_{x2} - m_2r_1^2)c_2s_2 + (I_{y3} - I_{x3})c_{23}s_{23} - m_3(l_1c_2 + r_2c_{23})(l_1s_2 + r_2s_{23})$$

$$\Gamma_{113} = (I_{y3} - I_{x3})c_{23}s_{23} - m_3r_2s_{23}(l_1c_2 + r_2c_{23})$$

$$\Gamma_{121} = (I_{y2} - I_{x2} - m_2r_1^2)c_2s_2 + (I_{y3} - I_{x3})c_{23}s_{23} - m_3(l_1c_2 + r_2c_{23})(l_1s_2 + r_2s_{23})$$

$$\Gamma_{131} = (I_{y3} - I_{x3})c_{23}s_{23} - m_3r_2s_{23}(l_1c_2 + r_2c_{23})$$

$$\Gamma_{211} = (I_{x2} - I_{y2} - m_2r_1^2)c_2s_2 + (I_{x3} - I_{y3})c_{23}s_{23} + m_3(l_1c_2 + r_2c_{23})(l_1s_2 + r_2s_{23})$$

$$\Gamma_{223} = -l_1m_3r_2s_3$$

$$\Gamma_{232} = -l_1m_3r_2s_3$$

$$\Gamma_{233} = -l_1m_3r_2s_3$$

$$\Gamma_{331} = (I_{x3} - I_{y3})c_{23}s_{23} + m_3r_2s_{23}(l_1c_2 + r_2c_{23})$$

$$\Gamma_{322} = l_1m_3r_2s_3$$

最后计算重力对机器人的影响，这些力可表示为

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\theta}}$$

其中 $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 为机器人的势能。对于所讨论的三杆机器人, 其势能为

$$V(\theta) = m_1 g h_1(\theta) + m_2 g h_2(\theta) + m_3 g h_3(\theta)$$

式中 h_i 为第 i 杆的质心高度, 可利用运动学正解映射

$$g_{\mathcal{A}_i}(\theta) = e^{\hat{\xi}_1 \theta_1} \cdots e^{\hat{\xi}_i \theta_i} g_{\mathcal{A}_i}(0)$$

求得:

$$h_1(\theta) = r_0$$

$$h_2(\theta) = l_0 - r_1 \sin \theta_2$$

$$h_3(\theta) = l_0 - l_1 \sin \theta_2 - r_2 \sin(\theta_2 + \theta_3)$$

将其代入势能计算公式并求微分, 得

$$N(\theta, \dot{\theta}) = \frac{\partial V}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ -(m_2 g r_1 + m_3 g l_1) \cos \theta_2 - m_3 r_2 \cos(\theta_2 + \theta_3) \\ -m_3 g r_2 \cos(\theta_2 + \theta_3) \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

至此即完成了动力学的推导。

3.3 机器人动力学和指数积公式

对于拉格朗日函数为 $L = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T M(\theta) \dot{\theta} - V(\theta)$ 的任何机械系统, 上节给出的有关公式和性质都将成立。如果运动学正解采用指数积公式, 那么就可获得计算惯性矩阵和哥氏矩阵的更为明晰的公式。本节将基于 Brockett^[15] 和 Park^[88] 所提出的方法推导这些公式。

对于运动螺旋的分析, 第二、第三章介绍了有关的方法, 下面采用另一种算法。我们知道 $SO(3)$ 中两个矢量 $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}^3$ 的叉积形成了第三个矢量 $\omega_1 \times \omega_2 \in \mathbb{R}^3$, 并且矢量的叉积满足

$$(\omega_1 \times \omega_2)^\wedge = \hat{\omega}_1 \hat{\omega}_2 - \hat{\omega}_2 \hat{\omega}_1$$

与此类似, 可以定义 $se(3)$ 上的李氏括号为

$$[\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2] = \hat{\xi}_1 \hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_2 \hat{\xi}_1$$

可以证明上式等号右侧具有运动螺旋的形式, 因此 $[\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2] \in se(3)$ 。

如果 $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^6$ 表示两个运动螺旋的坐标, 那么可定义括号运算 $[\cdot, \cdot]: \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ 为

$$[\xi_1, \xi_2] = (\hat{\xi}_1 \hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_2 \hat{\xi}_1)^\vee \quad (4.26)$$

上式是 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^6$ 矢量叉积的一般表达式。李氏括号的下列性质也是一般叉积的性质

$$[\xi_1, \xi_2] = -[\xi_2, \xi_1]$$

$$[\xi_1, [\xi_2, \xi_3]] + [\xi_2, [\xi_3, \xi_1]] + [\xi_3, [\xi_1, \xi_2]] = 0$$

关于 $SE(3)$ 上李括号运算的详细介绍见附录 A。本章仅用到式 (4.26)。

下面定义后续内容将要用到的一个辅助记号。设 $A_{ij} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ 表示伴随变换, 即

$$A_{ij} = \begin{cases} \text{Ad}_{g(e^{\hat{\xi}_1 \theta_1 + \cdots + \hat{\xi}_i \theta_i})}^{-1} & i > j \\ \mathbf{I} & i = j \\ 0 & i < j \end{cases} \quad (4.27)$$

利用该记号, 第 i 杆物体雅可比矩阵的第 j 列由 $\text{Ad}_{g_{d_i(0)}}^{-1} A_{ij} \xi_j$ 给出, 即有

$$J_i(\theta) = \text{Ad}_{g_{d_i(0)}}^{-1} [A_{i1} \xi_1 \cdots A_{ii} \xi_i \ 0 \cdots 0]$$

通过定义第 i 杆变换后的惯性矩阵, 将 $\text{Ad}_{g_{d_i(0)}}^{-1}$ 与连杆惯性矩阵加以组合

$$\mathfrak{M}_i' = \text{Ad}_{g_{d_i(0)}}^{T-1} \mathfrak{M}_i \text{Ad}_{g_{d_i(0)}}^{-1} \quad (4.28)$$

矩阵 $\mathfrak{M}_i'$ 表示第 i 杆相对于机器人基础坐标系的惯性。

利用上述定义, 可获得运动方程中惯性项的计算公式。所得结果可总结为一个定理。

定理 4.3 惯性矩阵和哥氏矩阵计算公式

利用上面所定义的记号, 开链操作器的惯性矩阵和哥氏矩阵为

$$\begin{aligned} M_{ij}(\theta) &= \sum_{l=\max(i,j)}^n \xi_l^T A_{li}^T \mathfrak{M}_l' A_{lj} \xi_j \\ C_{ij}(\theta) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial M_{ij}}{\partial \theta_k} + \frac{\partial M_{ik}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial M_{kj}}{\partial \theta_i} \right\} \dot{\theta}_k \end{aligned} \quad (4.29)$$

式中

$$\frac{\partial M_{ij}}{\partial \theta_k} = \sum_{l=\max(i,j)}^n ([A_{k-1,i} \xi_i, \xi_k]^T A_{lk}^T \mathfrak{M}_l' A_{lj} \xi_j + \xi_i^T A_{li}^T \mathfrak{M}_l' A_{lk} [A_{k-1,j} \xi_j, \xi_k]) \quad (4.30)$$

上述定理说明, 机器人的动力学属性直接由关节运动螺旋 ξ_i 、连杆坐标系 $g_{d_i(0)}$ 和连杆惯性矩阵 $\mathfrak{M}_i$ 确定。矩阵 A_{ij} 仅对依赖于机器人当前位形的式 (4.29) 和式 (4.30) 适用。

证明: 为证明上述定理, 仅需计算 $\frac{\partial}{\partial \theta_k} (A_{ij} \xi_j)$ 。对于 $i \geq j$ 情况, 设 $g_{ij} \in \text{SE}(3)$ 为刚性变换, 即

$$g_{ij} = \begin{cases} e^{-\hat{\xi}_i \theta_i} \cdots e^{-\hat{\xi}_{j+1} \theta_{j+1}} & j > i \\ I & i = j \end{cases}$$

因此, $A_{ij} = \text{Ad}_{g_{ij}}$ 。利用上述记号, 如果 k 是满足 $i \geq k \geq j$ 的整数, 那么 $g_{ij} = g_{ik} g_{kj}$ 。现在计算 $i \geq k \geq j$ 时的 $\frac{\partial}{\partial \theta_k} (A_{ij} \xi_j)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_k} (A_{ij} \xi_j) &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_k} (g_{ij} \hat{\xi}_j g_{ij}^{-1}) \right\}^\sim = \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial \theta_k} \hat{\xi}_j g_{ij}^{-1} + g_{ij} \hat{\xi}_j \frac{\partial g_{ij}^{-1}}{\partial \theta_k} \right)^\sim = \\ &= (-g_{ik} \hat{\xi}_k g_{k-1,j}^{-1} \hat{\xi}_j g_{ij}^{-1} + g_{ij} \hat{\xi}_j g_{k-1,j}^{-1} \hat{\xi}_k g_{ik}^{-1})^\sim = \\ &= \text{Ad}_{g_{ik}} (-\hat{\xi}_k g_{k-1,j}^{-1} \hat{\xi}_j g_{kl}^{-1} + g_{k-1,j} \hat{\xi}_j g_{k-1,j}^{-1} \hat{\xi}_k)^\sim = \\ &= A_{lk} [A_{k-1,j} \hat{\xi}_j, \hat{\xi}_k] \end{aligned}$$

对于其他的 k 值情况, $\frac{\partial}{\partial \theta_k} (A_{ij} \xi_j)$ 为零。

例 4.4 理想化 SCARA 机器人的动力学

考虑图 4.6 所示的 SCARA 机器人, 其关节运动螺旋为

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \xi_3 = \begin{bmatrix} l_1 + l_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \xi_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

假设各连杆的坐标系位于质心处，并且各轴的方向最初与基础坐标系一致，变换后的连杆惯性矩阵为

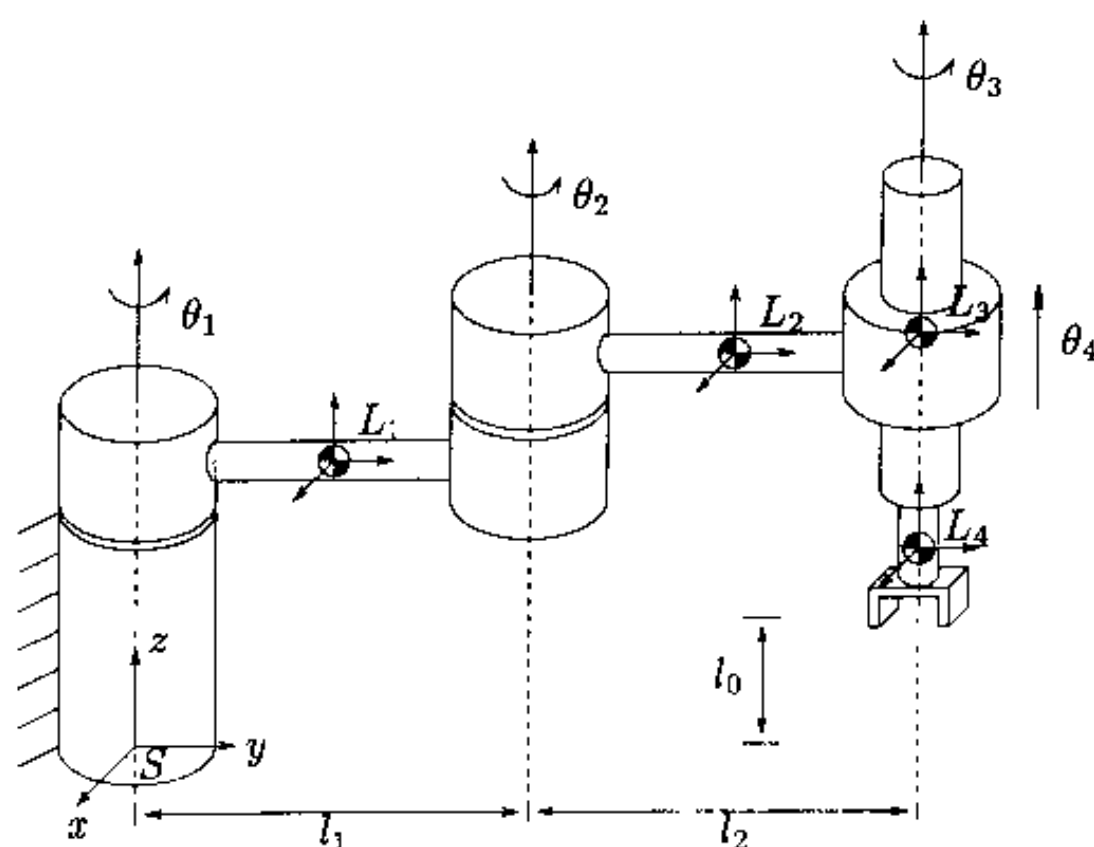


图 4.6 位于参考位形的 SCARA 机器人

$$\mathfrak{M}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ -\hat{\mathbf{p}}_i & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_i \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathfrak{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \hat{\mathbf{p}}_i \\ 0 & \mathfrak{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_i \mathbf{I} & m_i \hat{\mathbf{p}}_i \\ -m_i \hat{\mathbf{p}}_i & \mathfrak{J} \end{bmatrix}$$

式中 $\mathbf{p}_i$ 为第 i 杆坐标系的原点在基础坐标系 S 中的位置。

如果给定关节运动螺旋 ξ_i 和变换后的连杆惯量 $\mathfrak{M}_i$ ，那么机器人的动力学可用定理 (4.3) 中的公式进行计算。此项工作可采用附录 B 介绍的软件进行计算，这里仅给出最后结果。惯性矩阵为

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \alpha + \beta + 2\gamma \cos \theta_2 & \beta + 2\gamma \cos \theta_2 & \delta & 0 \\ \beta + \gamma \cos \theta_2 & \beta & \delta & 0 \\ \delta & \delta & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha &= I_{z1} + r_1^2 m_1 + l_1^2 m_2 + l_1^2 m_3 + l_1^2 m_4 \\ \beta &= I_{z2} + I_{z3} + I_{z4} + l_2^2 m_3 + l_2^2 m_4 + m_2 r_2^2 \\ \gamma &= l_1 l_2 m_3 + l_1 l_2 m_4 + l_1 m_2 r_2 \\ \delta &= I_{z3} + I_{z4} \end{aligned}$$

哥氏矩阵为

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} -\gamma \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 & -\gamma \sin \theta_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & 0 & 0 \\ \gamma \sin \theta_2 \dot{\theta}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

至此还剩一个重力项, 由于只有 θ_4 影响机器人的势能, 所以重力项可通过观察确定, 即

$$N(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_4 g \end{bmatrix}$$

摩擦力和非保守力也可以包含在 N 中。

4 李亚普诺夫 (Lyapunov) 稳定性理论

本节介绍李亚普诺夫稳定性理论, 该理论可用于下一节机器人控制器稳定性分析。下面给出该理论的有关结论 (不作证明), 后续章节将要用到这些结论。有兴趣的读者可参阅对此作详细介绍的有关教材, 如 Vidyasagar^[118] 或 Khalil^[50]。

4.1 基本定义

考虑满足下列条件的动力学系统

$$\dot{x} = f(x, t) \quad x(t_0) = x_0 \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (4.31)$$

假设解 $f(x, t)$ 满足存在性和唯一性条件, 也即 $f(x, t)$ 是关于 x 的 Lipschitz 连续的, 关于 t 是单值且分段连续的。如果存在点 $x^* \in \mathbb{R}^n$, 使得 $f(x^*, t) \equiv 0$, 则称该点为式 (4.31) 的平衡点 (equilibrium point)。凭直觉可以粗略地说, 如果起始于 x^* 附近的所有解 (意指初始条件位于 x^* 的附近) 始终保持位于 x^* 的邻近, 那么该平衡点是局部稳定的 (locally stable)。如果 x^* 是局部稳定的, 进一步说, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 起始于 x^* 附近的所有解将趋向于 x^* , 则称该平衡点 x^* 为局部渐进稳定点 (locally asymptotically stable), 由于式 (4.31) 的时变性将产生各种其他不可预料的情况, 所以上述说法是粗略的。而且凭直觉判断, 当振动摆垂直向下悬挂时具有局部稳定平衡点, 当垂直向上时具有非稳定平衡点。如果振动摆有阻尼存在, 那么稳定平衡点是局部渐进稳定。

通过改变系统的坐标原点, 可以假设平衡点处于 $x^* = 0$ 。如果存在多个平衡点, 那么有必要通过原点的移动来研究每一个平衡点的稳定性。

定义 4.1 李亚普诺夫稳定性

对于式 (4.31) 的平衡点 $x^* = 0$, 在 $t = t_0$ 时刻, 如果对于任意的 $\epsilon > 0$, 都存在一个 $\delta(t_0, \epsilon) > 0$ 使得

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq t_0 \quad (4.32)$$

则该平衡点在 $t = t_0$ 处于李亚普诺夫稳定。

李亚普诺夫稳定性对平衡点的要求是非常宽松的, 尤其是不要求轨迹由原点附近开始渐近趋向原点, 另外稳定性是定义在瞬时 t_0 的。一致稳定性 (uniform stability) 是指平衡点不会失去稳定性, 对于一致稳定平衡点 x^* , 定义 4.1 中的 δ 并不是 t_0 的函数, 所以式 (4.32) 对所有的 t_0 都成立。下面是更完整的渐近稳定性定义。

定义 4.2 渐近稳定性

对于式 (4.31) 的平衡点 $x^* = 0$, 在 $t = t_0$ 时刻, 如果

1. $x^* = 0$ 是稳定的, 并且

2. $x^* = 0$ 是局部收敛的, 即存在 $\delta(t_0)$ 使得

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (4.33)$$

则该平衡点在 $t = t_0$ 是渐近稳定的。

同前一定义, 这里的渐近稳定也是定义在 t_0 时刻, 一致渐近稳定性要求为:

1. $x^* = 0$ 是一致稳定的, 并且

2. $x^* = 0$ 是一致局部收敛的, 即存在与 t_0 无关的 δ 使得式 (4.33) 成立, 而且要求式 (4.33) 一致收敛。

最后, 若一个平衡点是不稳定的, 则认为就是非稳定的。无须赘言, 读者可以由李亚普诺夫稳定性的定义得到非稳定性的定义。在机器人学中, 最关心的是一致渐近稳定平衡。若要让机器人运动到某位置, 我们希望能精确运动到该点, 而不是到该点附近。图 4.7 说明李亚普诺夫稳定性与渐近稳定性的区别。

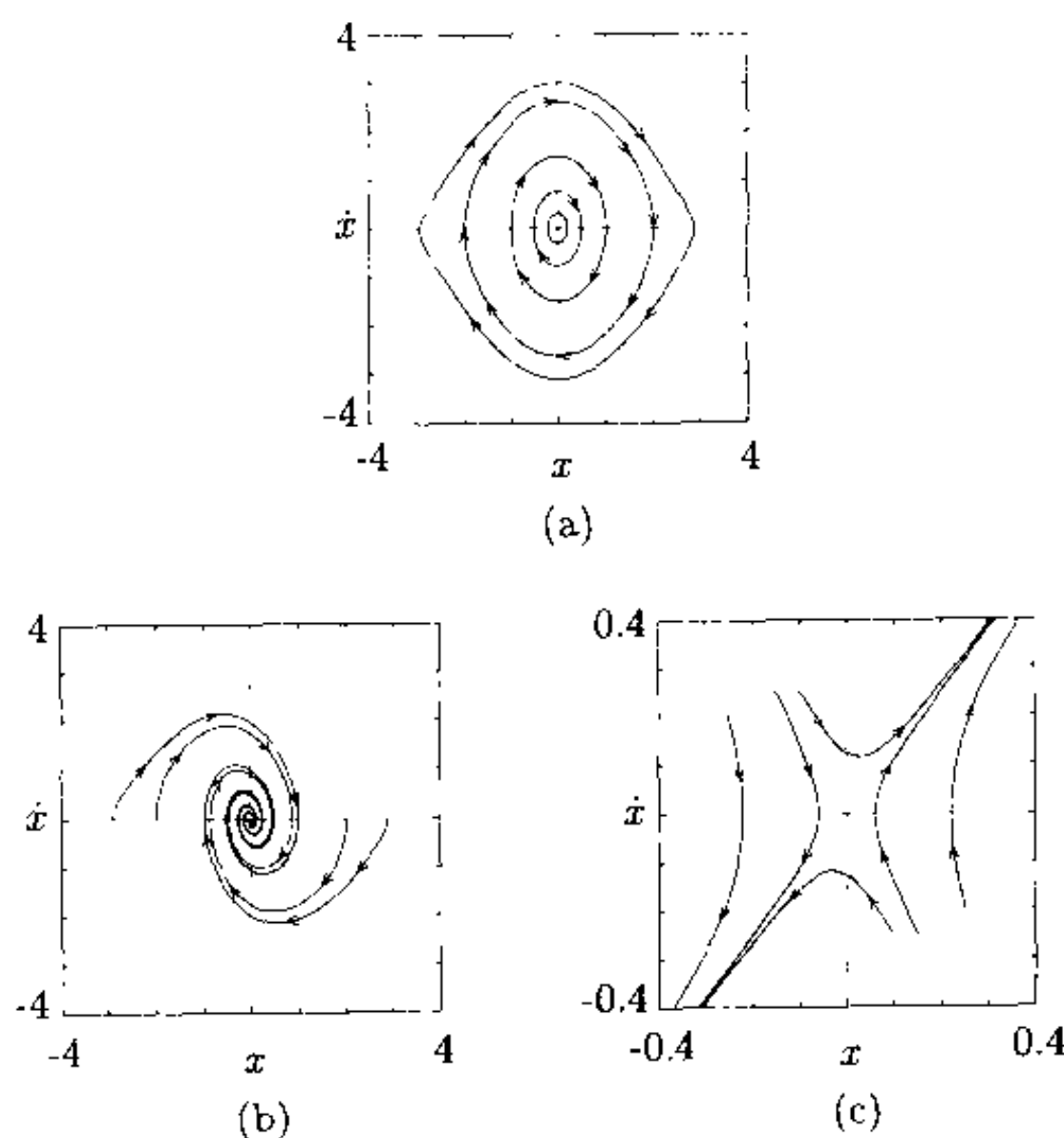


图 4.7 稳定平衡点和非稳定平衡点的相图

(a) 李亚普诺夫意义上的稳定 (b) 渐近稳定 (c) 不稳定

定义 4.1 和定义 4.2 均是局部稳定性定义, 它们描述的是系统趋近平衡点的特性。若对所有初始条件 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 平衡点 x^* 都是稳定的, 则称其为全局稳定点。全局稳定性 (global stability) 是非常理想的, 但在实际情况下很难实现。所以下面重点讨论局部稳定性理论, 进而讨论实现全局稳定的可能性。在时变系统中, 一致性的概念是非常重要的。因此, 对于非时变系统, 稳定性即指一致稳定性, 渐近稳定性即指一致渐近稳定性。

应注意渐近稳定性的定义并未对收敛速度量化,下面是一依赖于收敛指数速度的条件很严的稳定性定义。

定义 4.3 指数稳定性, 收敛速度

在平衡点 $x^* = 0$, 若存在常数 $m, \alpha > 0$ 和 $\varepsilon > 0$, 使得对于任意的 $\|x(t_0)\| \leq \varepsilon$ 和 $t \geq t_0$ 都存在

$$\|x(t)\| \leq m e^{-\alpha(t-t_0)} \|x(t_0)\| \quad (4.34)$$

则该平衡点称为指数稳定平衡点 (exponentially stable equilibrium point)。式 (4.34) 中常数 α 的最大值就是收敛速度 rate of convergence。

指数稳定性的要求很严, 而且还包含了一致、渐近稳定性要求。指数收敛在应用中是非常重要的, 它反映了控制摄动的鲁棒性, 而且在一些高级控制算法中是必不可少的, 如自适应控制。若对于任意的 $x_0 \in \mathcal{R}^n$, 都满足式 (4.34), 则系统是全局指数稳定的 (globally exponentially stable)。

4.2 李亚普诺夫直接法

李亚普诺夫直接法 (也称李亚普诺夫第二法) 是一种在不对微分方程 (4.31) 进行积分的情况下确定系统稳定性的方法。该方法可以概括为: 如果存在某种度量系统能量的指标, 那么通过研究系统能量的变化速度, 就可探讨系统的稳定性。为更精确地描述该方法, 需定义能量指标。设 B_ε 为以原点为中心、 ε 为半径的球, $B_\varepsilon = \{x \in \mathcal{R}^n: \|x\| < \varepsilon\}$ 。

定义 4.4 局部正定函数 (lpdf)

对于连续函数 $V: \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}_+ \rightarrow \mathcal{R}$, 若对于 $\varepsilon > 0$ 和某个连续严递增函数 $\alpha: \mathcal{R}_+ \rightarrow \mathcal{R}$, 有

$$V(0, t) = 0 \quad V(x, t) \geq \alpha(\|x\|) \quad \forall x \in B_\varepsilon, \forall t \geq 0 \quad (4.35)$$

则称该连续函数 $V: \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}_+ \rightarrow \mathcal{R}$ 为局部正定函数。

局部正定函数在局部类似于能量函数。全局类似于能量函数的函数称为正定函数。

定义 4.5 正定函数 (pdf)

对于连续函数 $V: \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}_+ \rightarrow \mathcal{R}$, 若满足定义 4.4 的条件, 且当 $p \rightarrow \infty$ 时 $\alpha(p) \rightarrow \infty$, 则称其为正定函数。

为讨论上面的能量函数, 定义减函数如下:

定义 4.6 减函数

对于连续函数 $V: \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}_+ \rightarrow \mathcal{R}$, 若对于 $\varepsilon > 0$ 和某个连续严递增函数 $\beta: \mathcal{R}_+ \rightarrow \mathcal{R}$, 有

$$V(x, t) \leq \beta(\|x\|) \quad \forall x \in B_\varepsilon, \forall t \geq 0 \quad (4.36)$$

则称之为减函数。

根据这些定义, 通过研究某个适当的能量函数, 利用下面的定理就可以确定系统的稳定性。该定理说明: 当 $V(x, t)$ 为局部正定且 $\dot{V}(x, t) \leq 0$ 时, 可以获得平衡点的稳定性。沿系统运动轨迹将 V 对时间求导得

$$\dot{V}|_{\dot{x}=f(x,t)} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f$$

在下面的讨论中, 用 $\dot{V}$ 表示 $\dot{V}|_{\dot{x}=f(x,t)}$ 。

定理 4.4 李亚普诺夫基本定理

设 $V(x, t)$ 为非负函数, 沿系统运动轨迹的微分为 $\dot{V}$ 。

1. 对于任何时刻 t , 在局部 x 上, 如果 $V(x, t)$ 是局部正定且 $\dot{V}(x, t) \leq 0$, 则系统的原点为局部李亚普诺夫稳定。

2. 对于任何时刻 t , 在局部 x 上, 如果 $V(x, t)$ 是局部正定且是减函数, 同时 $\dot{V}(x, t) \leq 0$, 则系统的原点为一致局部李亚普诺夫稳定。

3. 如果 $V(x, t)$ 是局部正定且是减函数, 同时 $-\dot{V}(x, t)$ 为局部正定, 则系统的原点为一致局部渐进李亚普诺夫稳定。

4. 如果 $V(x, t)$ 正定且是减函数, 同时 $-\dot{V}(x, t)$ 为正定, 则系统的原点为全局一致渐进李亚普诺夫稳定。

定理中的有关条件总结为表 4.1。

表 4.1 李亚普诺夫基本定理总结

	$V(x, t)$ 条件	$-\dot{V}(x, t)$ 条件	结 论
1	lpdf	局部 ≥ 0	稳定
2	lpdf, 递减	局部 ≥ 0	一致稳定
3	lpdf, 递减	lpdf	一致渐进稳定
4	pdf, 递减	pdf	全局一致渐进稳定

定理 4.4 给出了系统原点稳定性的充分条件, 但没有确定李亚普诺夫函数 $V(x, t)$ 。因定理仅给出充分条件, 要建立平衡点稳定性的李亚普诺夫函数还存在困难。但定理 4.4 的逆定理存在: 若平衡点是稳定的, 那么存在一个满足定理条件的函数 $V(x, t)$ 。由于缺乏一般李亚普诺夫函数的计算方法, 所以该逆定理以及其他逆定理的应用受到了限制。

定理 4.4 同样没有给出平衡解的收敛速度, 所以在指数稳定平衡时需作修正。

定理 4.5 指数稳定性理论

$x^* = 0$ 为 $\dot{x} = f(x, t)$ 的指数稳定平衡点当且仅当存在 $\epsilon > 0$ 和函数 $V(x, t)$, 对于正常数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 和 $\|x\| \leq \epsilon$, 有

$$\begin{aligned}\alpha_1 \|x\|^2 &\leq V(x, t) \leq \alpha_2 \|x\|^2 \\ \dot{V}|_{\dot{x}=f(x,t)} &\leq -\alpha_3 \|x\|^2 \\ \left\| \frac{\partial V}{\partial x}(x, t) \right\| &\leq \alpha_4 \|x\|\end{aligned}$$

满足定理 4.5 条件的系统, 其收敛速度可根据该定理的证明过程^[103]加以确定, 即

$$m \leq \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{1/2} \quad \alpha \geq \frac{\alpha_3}{2\alpha_2}$$

确定了式 (4.34) 的极限值。若定理 4.5 的极限值对所有的 x 都成立, 则平衡点 $x^* = 0$ 是全局指数稳定点。

4.3 李亚普诺夫间接法

李亚普诺夫间接法是通过系统的线性化来确定系统原点的局部稳定性。考虑如下系统

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (4.37)$$

对任意的 $t \geq 0$, 有 $f(0, t) = 0$ 。定义

$$A(t) = \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (4.38)$$

为 $f(x, t)$ 关于 x 的雅可比矩阵。对于每个固定的时刻 t , 当 $x \rightarrow 0$ 时, 差值

$$f_1(x, t) = f(x, t) - A(t)x \rightarrow 0$$

当然, 该差值也可能不是一致趋于 0, 所以应将条件加强为

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \sup_{t \geq 0} \frac{\|f_1(x, t)\|}{\|x\|} = 0 \quad (4.39)$$

若式 (4.39) 成立, 那么系统

$$\dot{z} = A(t)z \quad (4.40)$$

称为式 (4.31) 在原点的 (一致) 线性化方程。当该线性化方程存在时, 其稳定性也就保证了非线性方程在原点的局部稳定性。

定理 4.6 线性化系统的稳定性

考虑式 (4.37) 所确定的系统, 设

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \sup_{t \geq 0} \frac{\|f_1(x, t)\|}{\|x\|} = 0$$

并认为式 (4.38) 所定义的 $A(\cdot)$ 是有界的。若 0 是式 (4.40) 的一致渐近稳定平衡点, 那么该点就是式 (4.37) 的局部一致渐近稳定平衡点。

上述定理要求线性化系统是一致渐近稳定的, 以保证非线性系统的一致渐近稳定性。若线性化系统为非一致渐近稳定, 则存在上述定理的反例。

若式 (4.37) 是定常系统, 且

$$A = \left. \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0}$$

的特征值位于复平面左半边, 则由间接法可知其原点是渐近稳定的。

上述定理说明: 线性化系统为全局一致渐近稳定性意味着非线性系统在原点为局部一致渐近稳定。该定理的证明过程给出了对原点收敛域边界的估计。对非线性系统平衡点收敛域边界进行估计的系统方法是一个重要的研究课题, 包括如何建立最佳的李亚普诺夫函数。

4.4 实例

下面举例说明上述稳定性定理的应用。

例 4.5 线性谐振器

考虑图 4.8 所示阻尼谐振器。系统的动力学方程如下

$$M\ddot{q} + B\dot{q} + Kq = 0 \quad (4.41)$$

式中, M 、 B 和 K 均为正常数。将式 (4.41) 写成状态空间方程

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -(K/M)q - (B/M)\dot{q} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

将 $x = (q, \dot{q})$ 定义为系统的状态矢量。

因该系统为线性系统, 故可通过对系统极点的检查来确定其稳定性。系统的雅可比矩阵为

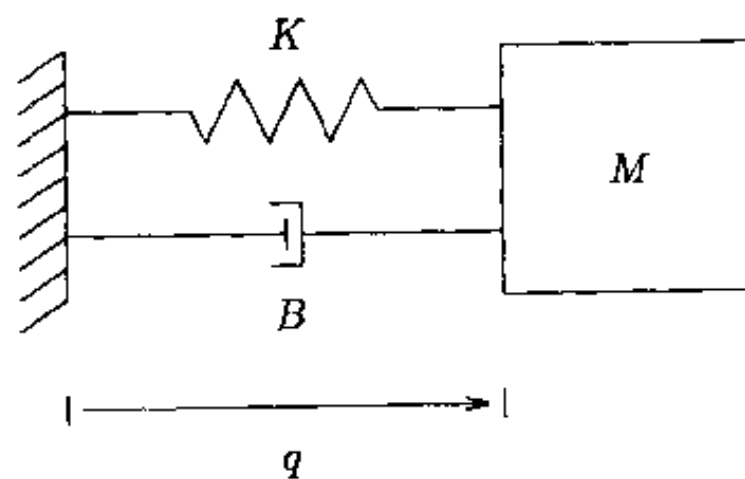


图 4.8 阻尼谐振器

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/M & -B/M \end{bmatrix}$$

其特征方程为

$$\lambda^2 + (B/M)\lambda + (K/M) = 0$$

特征方程的解为

$$\lambda = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4KM}}{2M}$$

其实部总为负, 因此系统是全局指数稳定。

下面用李亚普诺夫直接法来确定指数稳定性。显然, 这里可将李亚普诺夫函数取为系统的能量

$$V(x, t) = \frac{1}{2} M \dot{q}^2 + \frac{1}{2} K q^2 \quad (4.43)$$

沿由式 (4.41) 所确定的系统运动轨迹对 V 求导得

$$\dot{V} = M \dot{q} \ddot{q} + K q \ddot{q} = -B \dot{q}^2 \quad (4.44)$$

函数 $\dot{V}$ 是二次型, 但不是局部正定的, 因其与 q 无关。因此不能由其得出指数稳定的结论。根据 Lasalle 不变原理 (在下一节讨论), 也可能得出渐近稳定的结果, 但这种稳定是平缓的, 因为总认为系统是指数稳定的。

图 4.9a 表示与李亚普诺夫函数的能级集合 (level sets) 相叠合的系统流, 它解释了李亚普诺夫直接法失效的原因。图中李亚普诺夫函数的能级集合与 $\dot{q} = 0$ 时的系统流相切, 因此它不是确定指数稳定性的有效李亚普诺夫函数。

为解决该问题, 将能级集合稍作斜向修正, 以使系统流与能级曲面 (level surfaces) 横向相交。定义

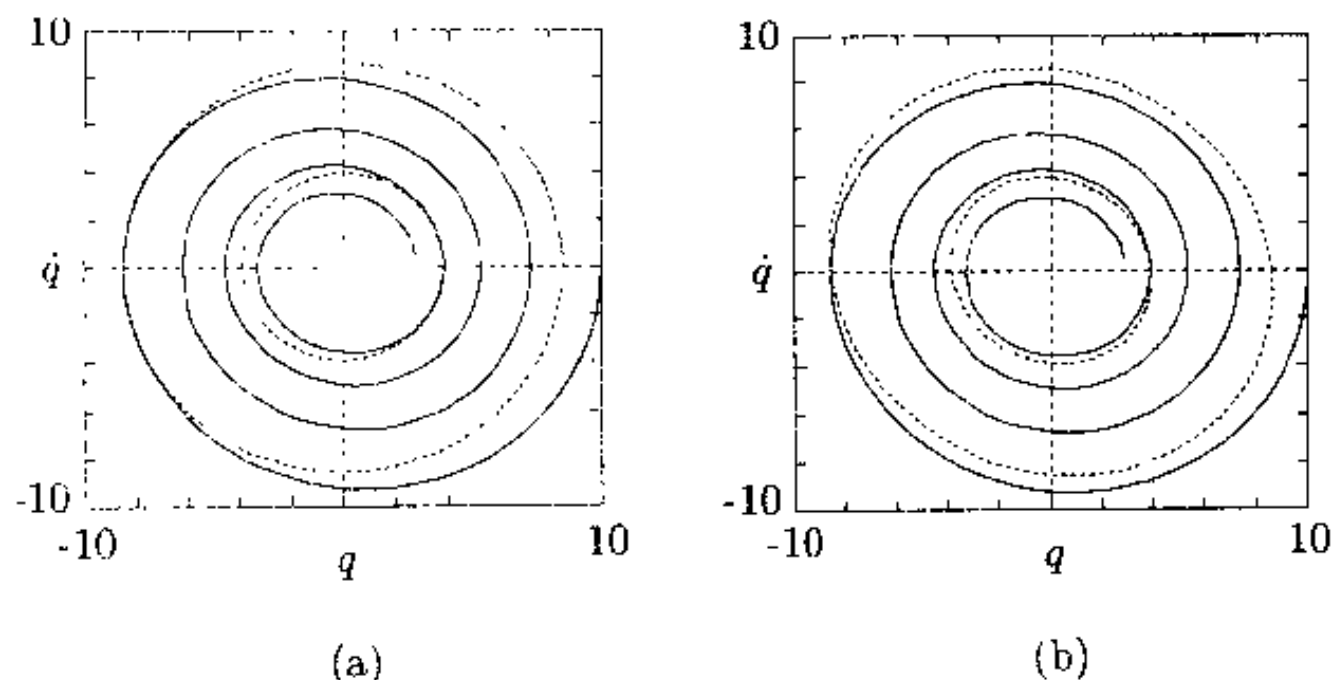


图 4.9 阻尼谐振器的能量流 (虚线为李亚普诺夫函数的能级集合)

(a) 根据总能量定义 (b) 根据能量的斜向修正定义

$$V(x, t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K & \epsilon M \\ \epsilon M & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \dot{q} M \dot{q} + \frac{1}{2} q K q + \epsilon \dot{q} M q$$

式中 ϵ 为使 V 正定的一个很小的正常数。对李亚普诺夫函数微分得

$$\dot{V} = \dot{q}M\ddot{q} + qK\dot{q} + \epsilon M\dot{q}^2 + \epsilon qM\ddot{q} =$$

$$(-B + \epsilon M)\dot{q}^2 + \epsilon(-Kq^2 - Bq\dot{q}) = - \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon K & \frac{1}{2}\epsilon B \\ \frac{1}{2}\epsilon B & -B + \epsilon M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}$$

当选择足够小的 ϵ 时, 可使函数 $\dot{V}$ 变成负定 (见习题 11), 从而就可获得指数稳定性。该李亚普诺夫函数的能级集合如图 4.9b 所示。

上述方法可用于下一节机器人控制规则的稳定性证明。

例 4.6 存在阻尼的非线性弹簧质量系统

考虑如下机械系统: 在一个非线性弹簧上固定有一个单位质量, 系统阻尼与速度有关。若 x_1 表示质量的位置, x_2 表示质量的速度。那么系统运动方程可以写为

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = -f(x_2) - g(x_1) \quad (4.45)$$

式中 f 和 g 分别为表示阻尼摩擦和弹簧回复力的光滑函数。假设 f 和 g 都是被动的, 即

$$\sigma f(\sigma) \geq 0 \quad \forall \sigma \in [-\sigma_0, \sigma_0]$$

$$\sigma g(\sigma) \geq 0 \quad \forall \sigma \in [-\sigma_0, \sigma_0]$$

等号仅当 $\sigma = 0$ 时成立。由此得李亚普诺夫函数

$$V(x) = \frac{x_2^2}{2} + \int_0^{x_1} g(\sigma) d\sigma$$

函数 g 的被动性确保了 $V(x)$ 为局部正定函数。通过简单的计算可以证明, 当 $|x_2| \leq \sigma_0$ 时

$$\dot{V}(x) = -x_2 f(x_2) \leq 0$$

由此稳定性得以证明, 但并不是关于原点的渐近稳定性。实际上原点是渐近稳定的, 由下一节的李亚普诺夫原理可以证明这一点。

4.5 李亚普诺夫不变原理

即使 $-\dot{V}(x, t)$ 不是局部正定, 由李亚普诺夫 (Lasalle) 定理也能得出平衡点的渐近稳定结论。但该规则仅适用于自激或周期系统。下面讨论自激系统, 并首先引入一些定义。将自激系统

$$\dot{x} = f(x) \quad (4.46)$$

解的轨迹表示为 $s(t, x_0, t_0)$, 它是从 x_0, t_0 开始到时间 t 时式 (4.46) 的解。

定义 4.7 ω 极限集合

对于集合 $S \subset \mathbb{R}^n$, 若对于任意的 $y \in S$, 都存在一个严格递增时间序列 t_n , 使得当 $t_n \rightarrow \infty$ 时有

$$s(t_n, x_0, t_0) \rightarrow y$$

则称集合 S 为轨迹 $s(\cdot, x_0, t_0)$ 的 ω 极限集合。

定义 4.8 不变集合

对于集合 $M \subset \mathbb{R}^n$, 若对于所有的 $y \in M$ 和 $t_0 \geq 0$, 有

$$s(t, y, t_0) \in M \quad \forall t \geq t_0$$

则称集合 M 为 (正) 不变集合。

可以证明任一轨迹的 ω 极限集合都是闭集和不变的。下面介绍李亚普诺夫原理。

定理 4.7 李亚普诺夫原理

设 $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 为局部正定函数, 使得在密集 $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n; V(x) \leq c\}$ 上有 $\dot{V}(x) \leq 0$, 定义

$$S = \{x \in \Omega_c; \dot{V}(x) = 0\}$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时, 轨迹将趋向于 S 中最大的不变集合, 也即 S 中的最大不变集合包括了 ω 极限集合。特别是若 S 中除 $x=0$ 外没有其它的不变集合, 则 0 为渐近稳定。

利用上述定理也可对全局情形进行描述。下面为李亚普诺夫原理的应用实例。

例 4.7 存在阻尼的非线性弹簧质量系统

仍考虑式 (4.45) 所确定的系统, 由于

$$V(x) = \frac{x_2^2}{2} + \int_0^{x_1} g(\sigma) d\sigma$$

因此

$$\dot{V}(x) = -x_2 f(x_2)$$

为运用李亚普诺夫原理, 取 $c = \min(V(-\sigma_0, 0), V(\sigma_0, 0))$, 由此可知对于 $x \in \Omega_c = \{x; V(x) \leq c\}$, 都有 $\dot{V}(x) \leq 0$ 。根据李亚普诺夫原理, 轨迹位于 $\Omega_c \cap \{x_1, x_2; \dot{V} = 0\} = \Omega_c \cap \{x_1, 0\}$ 内的最大不变集合。为获得最大不变集合, 注意到

$$x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow x_1(t) \equiv x_{10} \Rightarrow \dot{x}_2(t) = 0 = -f(0) - g(x_{10})$$

式中 x_{10} 为一常数。因此有

$$g(x_{10}) = 0 \Rightarrow x_{10} = 0$$

故 $\Omega_c \cap \{x_1, x_2; \dot{V} = 0\}$ 内的最大不变集合为原点。根据李亚普诺夫原理, 原点为局部渐近稳定点。

李亚普诺夫原理也适用于周期性系统。但李亚普诺夫原理尚未推广于非周期性系统, 由此限制了它在实际中的应用。

5 位置控制与轨迹跟踪

本节讨论机器人的位置控制问题: 在给定期望运动轨迹情况下, 如何确定使机器人再现该轨迹的关节力矩。希望选择一种控制策略, 对于初始条件误差、传感器噪声和模型误差具有鲁棒性。这里不考虑驱动器的动力学问题, 并假定可以对关节施加任意的力矩。

5.1 问题描述

机器人的动力学方程为

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + N(\theta, \dot{\theta}) = \tau \quad (4.47)$$

式中 $\theta \in \mathbb{R}^n$ 为机器人位形变量的集合, $\tau \in \mathbb{R}^n$ 为作用于关节的力矩。若给定的关节期望运动规律为 $\theta_d(\cdot)$ 。为简单起见, 假设 θ_d 在任意时刻都是确定的, 且至少是二阶可微。

若已知机器人的完整动力学模型, 并且 $\theta(0) = \theta_d(0), \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_d(0)$, 那么通过取

$$\tau = M(\theta_d)\ddot{\theta}_d + C(\theta_d, \dot{\theta}_d)\dot{\theta}_d + N(\theta_d, \dot{\theta}_d)$$

即可解决此问题。因 θ 和 θ_d 满足同样的微分方程, 且具有相同的初始条件, 根据微分方程

解的唯一性得：对所有的 $t \geq 0$ ，有 $\theta(t) = \theta_d(t)$ 。这属于开环控制的情况：机器人的当前状态未用作控制输入。

然而，这样的控制策略鲁棒性差。若 $\theta(0) \neq \theta_d(0)$ ，则开环控制始终无法修正该误差。既然无法知道机器人当前的确切位置，那么这种方法显然是不可行的。而且当初始位形处于期望初始位形附近时，不能保证机器人的运动轨迹始终保持在期望轨迹附近。基于这一原因，应在控制规则中引入反馈系统。反馈量的选择应使机器人的实际轨迹收敛于期望轨迹。特别是当轨迹为一定点时，闭环系统在期望点处应为渐近稳定。

设计稳定的机器人控制规则有很多方法。利用机器人的动力学结构特性，可以证明这些控制规则对所有具有此类特性的机器人都是稳定的。因此，没有必要为特定的机器人设计控制规则，只要能证明特定控制算法的稳定性仅需满足引理 4.2 中的特性，那么该控制规则就能适用于一般开链机器人。当然，控制规则的性能在很大程度上还与机器人有关，因此下面给出的控制规则仅是反馈补偿设计的基础。

5.2 计算力矩

对上述开环控制规则作如下修正：在给定操作器当前位置和速度情况下，消除所有的非线性量，并施加适当的力矩以克服驱动器的惯性，即

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta}_d + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + N(\theta, \dot{\theta})$$

将其代入机器人的动力学方程得

$$M(\theta)\ddot{\theta} = M(\theta)\ddot{\theta}_d$$

因 $M(\theta)$ 关于 θ 一致正定，所以有

$$\ddot{\theta} = \ddot{\theta}_d \quad (4.48)$$

因此，若机器人的初始位置和速度与期望位置和速度一致，那么机器人将跟踪期望轨迹。如前所述，该控制规则不能修正初始条件误差。

加入状态反馈后，可以提高控制规则的跟踪特性。由方程 (4.48) 的线性特性可以得到下面的控制规则

$$\tau = M(\theta)(\ddot{\theta}_d - K_v\dot{e} - K_p e) + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + N(\theta, \dot{\theta}) \quad (4.49)$$

式中 $e = \theta - \theta_d$ ， K_v 和 K_p 为定常增益矩阵 (constant gain matrices)。代入式 (4.47) 后，可得误差动力学方程

$$M(\theta)(\ddot{e} + K_v\dot{e} + K_p e) = 0$$

因 $M(\theta)$ 总是正定的，所以有

$$\ddot{e} + K_v\dot{e} + K_p e = 0 \quad (4.50)$$

这就是控制实际轨迹与期望轨迹之间误差的线性微分方程。式 (4.49) 称之为计算力矩控制规则 (computed torque control law)。

计算力矩控制规则由两部分组成。式 (4.49) 可以写为如下形式

$$\tau = \underbrace{M(\theta)\ddot{\theta}_d + C\dot{\theta} + N}_{\tau_{ff}} + \underbrace{M(\theta)(-K_v\dot{e} - K_p e)}_{\tau_{fb}}$$

式中 τ_{ff} 项为前馈分量 (feed forward component)，它是驱使系统沿名义轨迹运动所需的力矩； τ_{fb} 项为后馈分量 (feed back component)，它是消除机器人轨迹误差所需的补偿力矩。

因误差方程 (4.50) 是线性方程, 很容易选取使得整个系统稳定的 K_v 和 K_p , 并且当 $t \rightarrow \infty$ 时有 $e \rightarrow 0$, 而且当 K_v 和 K_p 为对角阵时, 可获得独立的指数稳定系统。下面的定理给出了计算力矩控制规则为指数跟踪的一些条件。

定理 4.8 计算力矩控制规则的稳定性

对于式 (4.47) 所描述的系统, 若 $K_v, K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为正定对称矩阵, 那么计算力矩控制规则 (4.49) 将使系统得到指数轨迹跟踪。

证明: 将误差动力学方程写成一阶线性系统

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_p & -K_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix}$$

可以证明矩阵 A 的特征值都具有负实部。设 $\lambda \in \mathbb{C}$ 为矩阵 A 的一个特征值, 对应的特征矢量为 $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{C}^{2n}$, $v \neq 0$, 那么有

$$\lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_p & -K_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ -K_p v_1 - K_v v_2 \end{bmatrix}$$

若 $\lambda = 0$, 则 $v = 0$, 因此 $\lambda = 0$ 不是 A 的特征值; 若 $\lambda \neq 0$, 而 $v_2 = 0$, 则 $v_1 = 0$, 所以 $v_1, v_2 \neq 0$ 。不失一般性, 设 $\|v_1\| = 1$, 可得

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= v_1^* \lambda^2 v_1 = v_1^* \lambda v_2 = \\ &= v_1^* (-K_p v_1 - K_v v_2) = -v_1^* K_p v_1 - \lambda v_1^* K_v v_1 \end{aligned}$$

式中 $*$ 表示复共轭转置。因 $\alpha = v_1^* K_p v_1 > 0$, $\beta = v_1^* K_v v_1 > 0$, 所以有

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0 \quad \alpha, \beta > 0$$

因此 λ 的实部为负。

计算力矩控制规则能够将非线性动力学系统转化成线性系统, 从而可采用线性控制的一些分析方法。一个非常广泛的应用就是反馈线性化: 经全状态非线性反馈, 一个非线性系统就转化成线性系统。反馈线性化的缺点是需要根据计算时间和输入的大小, 利用反馈将非线性系统完全转化成单一线性系统。对于机器人而言, 不存在输入的无界问题, 这是因为系统的惯性矩阵是有限的, 所以所施加的控制力矩总是有限的。另外, 实验结果表明计算力矩控制器具有非常好的性能特征, 其应用越来越广泛。

5.3 PD 控制

非线性系统的另一种控制方法是基于系统在操作点线性化的线性控制器。因为系统的线性化局部决定了整个系统的稳定性, 这类控制器可以保证系统是局部稳定的。在很多场合, 由李亚普诺夫函数的结构可以证明线性控制器是全局稳定的。

基于这样的设计思想, 就形成了机器人的比例加微分 (PD) 控制规则。最简单的 PD 控制规则具有如下形式

$$\tau = -K_v \dot{e} - K_p e \quad (4.51)$$

式中 K_v 和 K_p 为正定矩阵, $e = \theta - \theta_d$ 。因该控制规则没有前馈项, 所以不能获得准确的无误差轨迹跟踪。通常增加一个积分项以消除静态误差。但为了保证系统的稳定性和避免积分器的飘移, 这样处理又增加了额外的复杂性。

在引入前馈项之前, 先证明 PD 控制器的渐近定点稳定性

定理 4.9

对于式 (4.47) 所描述的系统, 若 $\theta_d \equiv 0$, $K_v, K_p > 0$, 则控制规则式 (4.51) 将使系统在平衡点 $\theta = \theta_d$ 处为全局渐近稳定。

证明: 对于 $\theta_d \equiv 0$, 闭环系统为

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + K_v\dot{\theta} + K_p(\theta - \theta_d) = 0 \quad (4.52)$$

不失一般性, 设 $\theta_d = 0$ (若不满足, 则重新定义 $\theta' = \theta - \theta_d$)。取系统的总能量作为李亚普诺夫函数

$$V(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^T M(\theta)\dot{\theta} + \frac{1}{2}\theta^T K_p \theta$$

函数 V (全局) 正定且递减。沿式 (4.52) 所表示的轨迹计算 $\dot{V}$ 得

$$\begin{aligned} \dot{V}(\theta, \dot{\theta}) &= \dot{\theta}^T M\ddot{\theta} + \frac{1}{2}\dot{\theta}^T \dot{M}\dot{\theta} + \dot{\theta}^T K_p \theta = \\ &= -\dot{\theta}^T K_v \dot{\theta} + \frac{1}{2}\dot{\theta}^T (\dot{M} - 2C)\dot{\theta} \end{aligned}$$

因 $\dot{M} - 2C$ 是反对称矩阵, 所以有

$$\dot{V} = -\dot{\theta}^T K_v \dot{\theta}$$

虽然 K_v 是正定阵, 但当 $\dot{\theta} = 0$ 和 $\theta \neq 0$ 时 $\dot{V} = 0$, 所以函数 $\dot{V}$ 是负半定的。因此根据李亚普诺夫基本定理, 仅可得出平衡点稳定的结论。

为证明渐近稳定性, 可运用李亚普诺夫原理。 $\dot{V} \equiv 0$ 的集合 S 为

$$S = \{(\theta, \dot{\theta}); \dot{\theta} \equiv 0\}$$

为获得 S 中的最大不变集合, 将 $\dot{\theta} \equiv 0$ 代入闭环方程式 (4.52), 得

$$K_p \theta = 0$$

因 K_p 是正定矩阵, 因此 S 中的最大不变集合就是单点 $\theta = 0$, 即平衡点 $\theta = 0$ 是渐近稳定的。

因关心的主要是轨迹跟踪, 考虑 PD 控制规则的下列修正形式

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta}_d + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta}_d + N(\theta, \dot{\theta}) - K_v\dot{e} - K_p e \quad (4.53)$$

称式 (4.53) 为放大的 PD 控制规则。注意式 (4.53) 中的第二项不同于哥氏项 $C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta}$, 在下面定理的证明中可以看出产生此差别的原因。

定理 4.10 PD 控制规则的稳定性

对于式 (4.47) 所描述的系统, 若 $K_v, K_p > 0$, 则控制规则式 (4.53) 将使系统得到指数轨迹跟踪。

证明: 闭环系统方程为

$$M(\theta)\ddot{e} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{e} + K_v\dot{e} + K_p e = 0 \quad (4.54)$$

如前一定理的证明, 取系统能量作为李亚普诺夫函数, 并不能获得指数稳定的结论, 这是因为 $\dot{V}$ 仅是负半定, 而且系统是一个时变系统, 也不能运用李亚普诺夫原理。

为证明指数稳定性, 可采用与前一节弹簧质量系统相同的方法, 即通过选取如下的李亚普诺夫函数对能量函数的能级集合作斜向修正

$$V(e, \dot{e}, t) = \frac{1}{2}\dot{e}^T M(\theta)\dot{e} + \frac{1}{2}e^T K_p e + \epsilon e^T M(\theta)\dot{e}$$

因 $M(\theta) > 0$ 和 $K_p > 0$, 故对于任意小的 ϵ 上式都是正定的。沿式 (4.54) 所表示的轨迹对上式微分得

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{e}^T M \ddot{e} + \frac{1}{2} \dot{e}^T \dot{M} \dot{e} + \dot{e}^T K_p \dot{e} + \epsilon \dot{e}^T M \ddot{e} + \epsilon \dot{e}^T (M \ddot{e} + \dot{M} \dot{e}) = \\ &= -\dot{e}^T (K_v - \epsilon M) \dot{e} + \frac{1}{2} \dot{e}^T (\dot{M} - 2C) \dot{e} + \epsilon \dot{e}^T (-K_p \dot{e} - K_v \dot{e} - C \dot{e} + \dot{M} \dot{e}) = \\ &= -\dot{e}^T (K_v - \epsilon M) \dot{e} - \epsilon \dot{e}^T K_p \dot{e} + \epsilon \dot{e}^T (-K_v + \frac{1}{2} \dot{M}) \dot{e}\end{aligned}$$

取 $\epsilon > 0$ 足够小使得 $\dot{V}$ 是负半定 (见习题 11), 根据定理 4.5 知系统为指数稳定。

若 $\dot{\theta}_d \equiv 0$, 即希望使一点稳定, 此时控制规则 (4.53) 可简化为原点 PD 控制规则 (4.51)。应注意渐近跟踪需完全消除摩擦力和重力, 并且还与这些量的精确模型和机器人的惯性矩阵有关。实际上, 模型的误差将导致跟踪的误差。

运用 PD 控制规则时的一个困难就是如何选取增益矩阵 K_p 和 K_v 。系统在给定工作点 θ_0 线性化时的误差动力学方程为

$$M(\theta_0) \ddot{e} + K_v \dot{e} + K_p e = 0$$

因为这是一个线性系统, 所以有可能根据线性控制理论选取合适的增益矩阵 K_p 和 K_v , 获得所希望的性能指标。但是如果要跟踪一个轨迹, 那么就不能保证始终处于 θ_0 附近, 而且所选取的增益矩阵可能不合适。在实际情况下, 可以根据位于机器人工作空间中部的某个平衡点的线性化来选取增益矩阵, 以获得合理的结果。

5.4 工作空间控制

假设已知表示末端执行器期望位形的轨迹为 $g_d(t) \in SE(3)$ 。使机器人沿该轨迹运动的一种算法是求解每一瞬时的运动学逆解, 获得使 $g(\theta_d(t)) = g_d(t)$ 的期望关节转角规律 $\theta_d(t) \in Q$, 然后利用上一节的方法来设计再现该轨迹的反馈控制器。

用这种方式来设计反馈控制器存在几个方面的问题。因为运动学逆解的计算很费时间, 所以为满足 g_d 的实时性需要, 需采用高效计算机按控制所要求的速度来计算 θ_d 。另外, 在关节空间选取反馈增益矩阵也是比较困难的, 因为所给的任务是末端执行器的轨迹。例如, 对于增益矩阵 K_p 和 K_v 为对角阵的关节空间计算力矩控制器, 若机器人的设定点有变动, 将在关节空间产生毫不相干的响应, 并导致以 θ 表示的直线轨迹。由于运动学关系的非线性特性, 在 $SE(3)$ 中不可能获得直线轨迹。在实际中, 这类情况是不希望出现的。

为克服上述缺点, 可以考虑直接在末端执行器坐标系中解决问题。这样也就无需求解运动学逆解, 在控制器设计时使增益矩阵直接与任务特性相关。但是, 为能利用第四节的方法, 必须在 $SE(3)$ 中建立一系列的局部坐标系, 并用欧拉角来表示姿态。但这样却使其应用受到了限制, 尽管在实际应用中, 这些限制无关紧要。按此设计控制器的方法称为工作空间控制, 因为 x 表示末端执行器在机器人工作空间中的位形。

设 $f: Q \rightarrow \mathbb{R}^p$ 表示关节变量 $\theta \in Q$ 与工作空间变量 $x \in \mathbb{R}^p$ 之间的光滑且可逆的映射。特殊情况时要求 $n = p$, 以使机器人的自由度数等于工作空间变量 x 的维数。在可能情况下, 允许 $p < 6$, 此时工作空间变量仅是 $SE(3)$ 的部分参数, 例如 SCARA 机器人即属此种情况, 其末端执行器的位置以及相对于 z 轴的姿态构成了任务坐标的自然集合。

机器人在关节空间中的动力学方程为

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \boldsymbol{\tau}$$

式中 $\boldsymbol{\tau}$ 为关节力矩矢量, $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{N}$ 同前一样为系统的动力学参数

利用映射 $f: \boldsymbol{\theta} \rightarrow \mathbf{x}$ 的雅可比矩阵将动力学方程写为 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ 的函数

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\theta}}$$

注意式中 $\mathbf{J}$ 是映射 $f: \mathbf{Q} \rightarrow \mathbb{R}^p$ 的雅可比矩阵, 而不是机器人的雅可比矩阵。假设映射 f 是光滑且可逆的, 那么可得

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{x}}, \quad \ddot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{J}^{-1}\ddot{\mathbf{x}} + \frac{d}{dt}(\mathbf{J}^{-1})\dot{\mathbf{x}}$$

将其代入机器人动力学方程, 两边左乘 $\mathbf{J}^{-T} := (\mathbf{J}^{-1})^T$ 得

$$\mathbf{J}^{-T}\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{J}^{-1}\ddot{\mathbf{x}} + \left(\mathbf{J}^{-T}\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\mathbf{J}^{-1} + \mathbf{J}^{-T}\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\frac{d}{dt}(\mathbf{J}^{-1}) \right)\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{J}^{-T}\mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{J}^{-T}\boldsymbol{\tau}$$

设

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}} &= \mathbf{J}^{-T}\mathbf{M}\mathbf{J}^{-1} \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \mathbf{J}^{-T}\left(\mathbf{C}\mathbf{J}^{-1} + \mathbf{M}\frac{d}{dt}(\mathbf{J}^{-1}) \right) \\ \tilde{\mathbf{N}} &= \mathbf{J}^{-T}\mathbf{N} \\ \mathbf{F} &= \mathbf{J}^{-T}\boldsymbol{\tau} \end{aligned}$$

则动力学方程变为

$$\tilde{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{N}}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{F} \quad (4.55)$$

上式是以工作空间坐标 $\mathbf{x}$ 与机器人位形 $\boldsymbol{\theta}$ 表示的动力学方程。 $\tilde{\mathbf{M}}$ 、 $\tilde{\mathbf{C}}$ 、 $\tilde{\mathbf{N}}$ 称为系统的有效矩阵, 它们从工作空间变量角度来表示系统的动力学。因 f 是局部可逆的, 所以可从这些方程中消去 $\boldsymbol{\theta}$, 而且可以看出式 (4.55) 就是关于广义坐标 $\mathbf{x}$ 的拉格朗日方程。对于大多数机器人, 可以通过运动学正解直接计算 $\boldsymbol{\theta}$ 和 $\mathbf{x}$, 很容易得到 $\boldsymbol{\theta}$ 的显示表达式。

式 (4.55) 与以关节坐标写出的开链机器人动力学方程具有相同的基本结构。为在控制规则中利用这些结构, 必须验证其也满足在控制器稳定性证明中所用到的一些特性。下列引理证明了这一点。

引理 4.11 工作空间动力学的结构特性

式 (4.55) 具有下列性质:

1. $\tilde{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\theta})$ 是对称且正定的;
2. $\dot{\tilde{\mathbf{M}}} - 2\tilde{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是反对称矩阵。

证明: 因 $\mathbf{J}$ 是可逆矩阵, 性质 1 由其定义可以获证。为证明性质 2, 可作如下计算

$$\dot{\tilde{\mathbf{M}}} - 2\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{J}^{-T}(\dot{\tilde{\mathbf{M}}} - 2\tilde{\mathbf{C}})\mathbf{J}^{-1} + \frac{d}{dt}(\mathbf{J}^{-T})\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{J}^{-1} - \mathbf{J}^{-T}\tilde{\mathbf{M}}\frac{d}{dt}(\mathbf{J}^{-1})$$

通过直接验算即可证明该矩阵确为反对称矩阵。

由这两个性质, 可以直接将上一节的控制规则推广到工作空间坐标。例如, 计算力矩控制规则变为

$$\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\theta})(\ddot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{K}_v\dot{\mathbf{e}} - \mathbf{K}_p\mathbf{e}) + \tilde{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{N}}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$$

$$\tau = J^T F$$

式中 x_d 是期望工作空间轨迹； $e = x - x_d$ 是工作空间误差。该控制规则的稳定性证明同前。根据 $M(\theta)$ 的正定性，可将工作空间误差动力学公式写为

$$\ddot{e} + K_d \dot{e} + K_p e = 0$$

这是一个线性微分方程，其稳定性可以直接获证。PID 控制规则同样可推广到工作空间坐标。

将控制规则表示成这种形式的优点是：可以直接在工作空间坐标中确定增益矩阵 K_v 和 K_p ，这就简化了增益的选取工作，而且不必求逆映射 f^{-1} 。事实上只需计算 f 的雅可比矩阵及其逆阵。

注意当机器人接近奇异位形时，有效惯性矩阵 $\hat{M}$ 将急剧增大。这说明机器人在某些方向的运动是非常困难的，即较大的驱动力仅产生微小的运动。应注意奇异位形与参数的选择有密切关系。在机器人关节空间不存在这种奇异位形。

例 4.8 关节空间和工作空间控制器的比较

为比较关节空间控制器与工作空间控制器的不同，考虑一个平面两自由度机器人的控制。将末端执行器的位置参数 x, y 取为工作空间变量。

图 4.10 为关节坐标表示的计算力矩控制规则的阶跃响应 (step response)。注意右侧末端执行器的轨迹是一条曲线。关节轨迹的时间响应是一有阻尼机械系统的典型线性响应。

图 4.11 为工作空间坐标表示的计算力矩控制规则的阶跃响应。此时末端执行器的轨迹 (包括过冲量) 是工作空间中的一条直线和关节空间中的一条曲线。

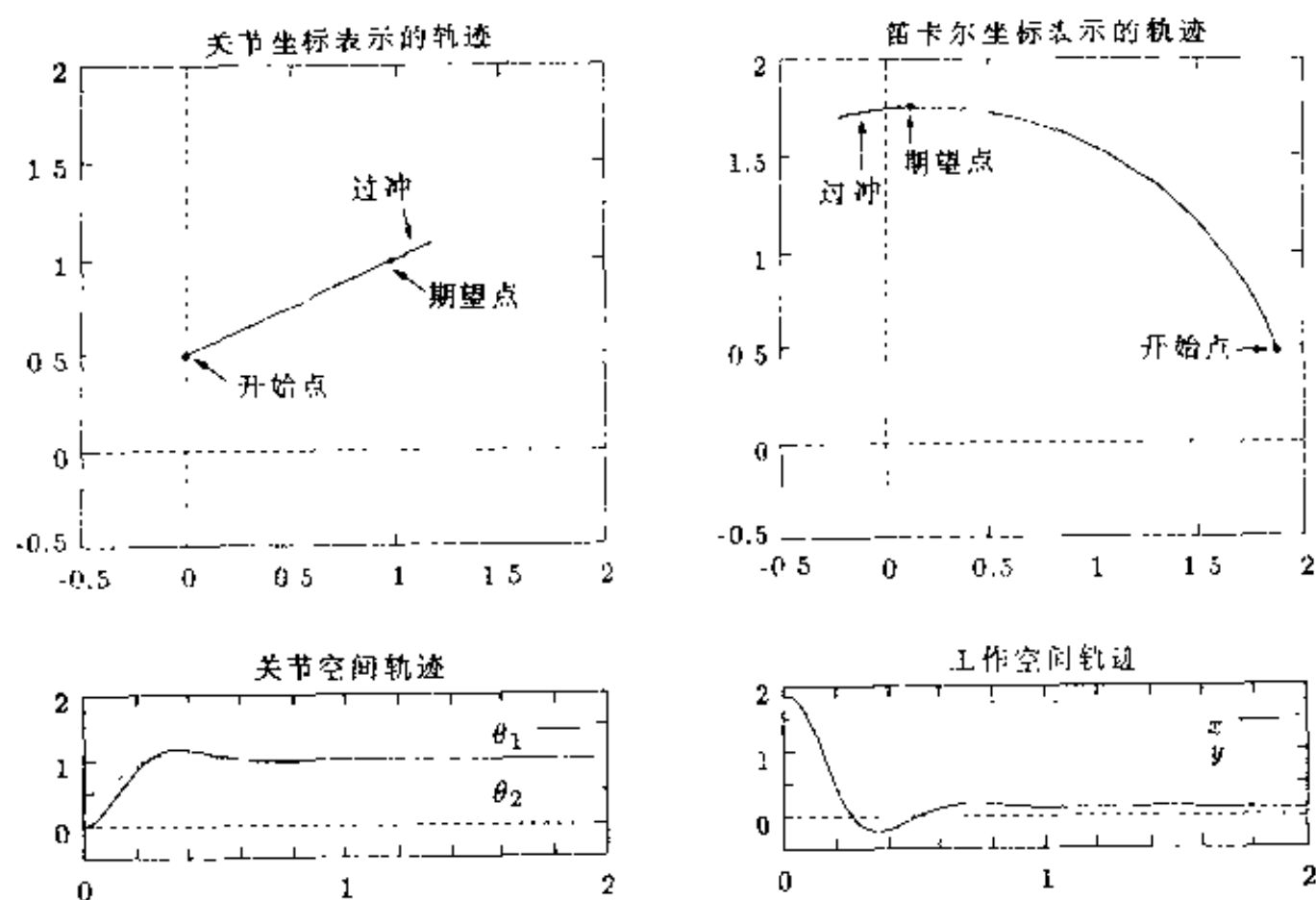


图 4.10 关节空间中计算力矩控制规则的阶跃响应

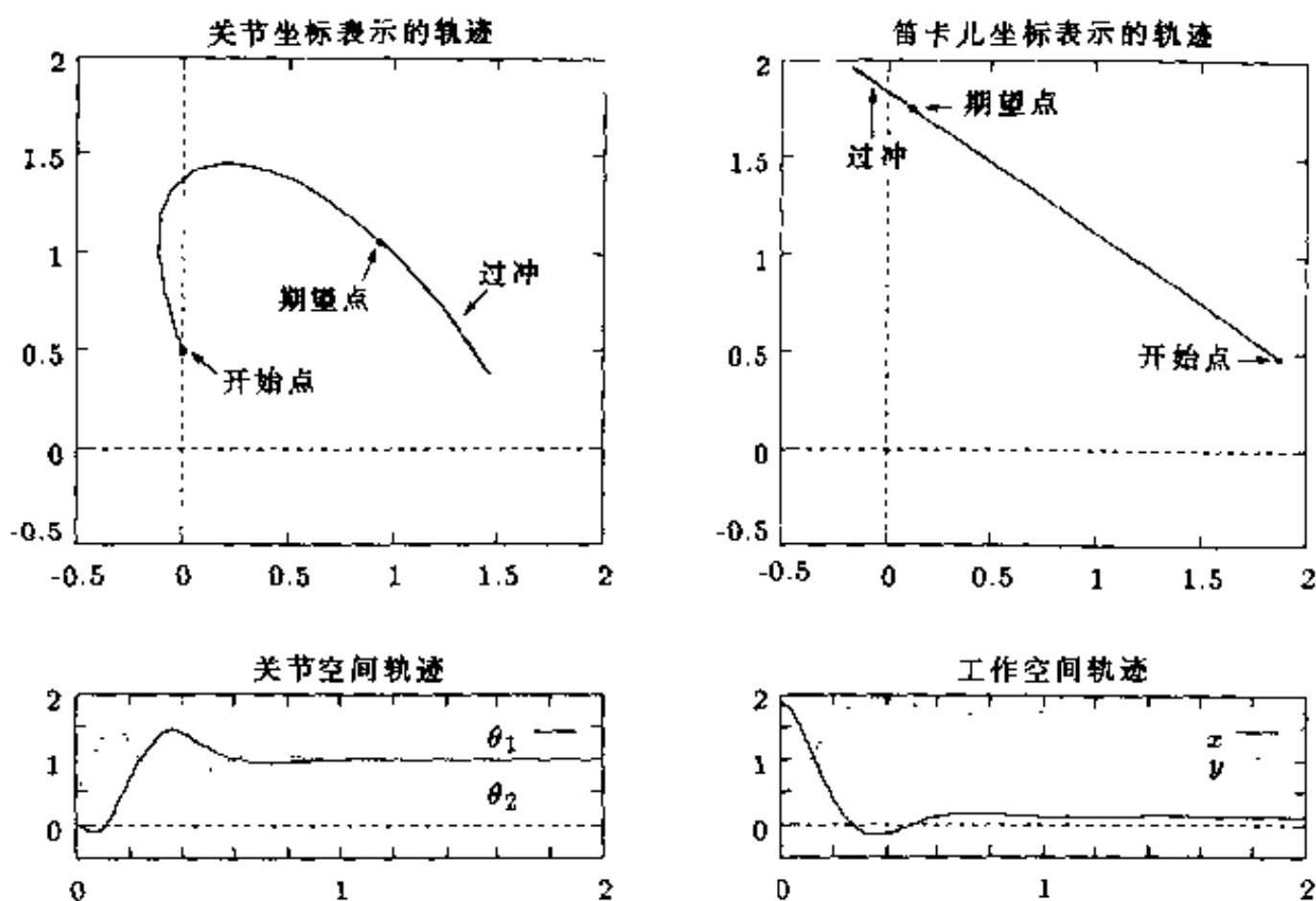


图 4.11 工作空间中计算力矩控制规则的阶跃响应

6 有约束机器人的控制

本节简要介绍有约束机器人的控制问题。更详细的介绍见第六章。

6.1 约束系统的动力学

下面考虑这样一个问题：机器人的末端沿一个曲面运动，并要求对曲面施加一个压力。为简化起见，假设该曲面是无摩擦的（这里的分析可以推广到更为一般的情形）。设机器人沿其运动的曲面可以用一组独立、光滑的约束表示为

$$h_j(\theta_1, \dots, \theta_n) = 0 \quad j = 1, \dots, k \quad (4.56)$$

并存在一光滑的单射 $f: \mathcal{R}^{n-k} \rightarrow \mathcal{R}^n$ 使得

$$h_j(f_1(\phi), \dots, f_n(\phi)) = 0 \quad (4.57)$$

也就是说， $\phi \in \mathcal{R}^{n-k}$ 表示曲面上允许运动的参数， $\theta = f(\phi)$ 对应于机器人与曲面接触的位形。

控制的目标就是使机器人在对曲面施加力的同时，能跟踪给定的轨迹 $\phi_d(t)$ 。因在关节空间中曲面可表示为映射 $h(\theta) = 0$ 的能级集合，曲面的法矢量由 ∇h_i 的梯度所张成的空间确定。（因曲面是 $n-k$ 维的，所以法矢量空间是 k 维的）。任意形式的力矩

$$\tau_N = \sum \lambda_j \nabla h_j(\theta) \quad (5.58)$$

对应于施加在曲面上的法向力。在不考虑摩擦的情况下，力矩所作的功为

$$\tau_N \cdot \dot{\theta} = \sum \lambda_i \nabla h_i \cdot \dot{\theta} = \sum \lambda_i \left(\frac{\partial h_i}{\partial \theta} \dot{\theta} \right)$$

$$\sum \lambda_i \frac{d}{dt}(h(\theta)) = 0$$

因此, 法向力对系统不作功, 从而不影响系统的运动。假设任务描述中包含有所期望的法向力要求 $\lambda_1(t), \dots, \lambda_k(t)$ 。

若机器人能保持与曲面接触, 那么机器人的动力学方程就可写成 ϕ 的函数。对 $\theta = f(\phi)$ 微分得

$$\dot{\theta} = \frac{\partial f}{\partial \phi} \dot{\phi} \quad \ddot{\theta} = \frac{\partial f}{\partial \phi} \ddot{\phi} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \dot{\phi} \quad (4.59)$$

将它们代入机器人的运动方程

$$M(\theta) \ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} + N(\theta, \dot{\theta}) = \tau$$

有

$$M(\theta) \frac{\partial f}{\partial \phi} \ddot{\phi} + \left(C(\theta, \dot{\theta}) \frac{\partial f}{\partial \phi} + M(\theta) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \right) \dot{\phi} + N(\theta, \dot{\theta}) = \tau \quad (4.60)$$

令 $J = \frac{\partial f}{\partial \phi}(\phi)$, 并定义

$$\begin{aligned} \tilde{M}(\phi) &= J^T M(f(\phi)) J \\ \tilde{C}(\phi, \dot{\phi}) &= J^T (C(f(\phi), J\dot{\phi}) J + M(f(\phi)) \dot{J}) \\ \tilde{N}(\phi, \dot{\phi}) &= J^T N(f(\phi), J\dot{\phi}) \\ F &= J^T \tau \end{aligned} \quad (4.61)$$

则运动方程可写为

$$\tilde{M}(\phi) \ddot{\phi} + \tilde{C}(\phi, \dot{\phi}) \dot{\phi} + \tilde{N}(\phi, \dot{\phi}) = F \quad (4.62)$$

上式具有与无约束机器人运动方程相同的形式。第六章将证明式 (4.62) 也满足引理 4.2 的性质。这是很自然的, 因为是假定了机器人与曲面保持接触, 并取 ϕ 作为广义坐标。

值得注意的是: 式 (4.62) 是系统沿由能级集合 $h(\theta) = 0$ 所确定的曲面运动时的动力学方程。左乘 J^T 后, 可以消去方程中的约束力因素。在实际应用中, 更重视约束力的控制, 因此还是用式 (4.60) 的运动方程

6.2 有约束机器人的控制

有约束机器人系统的控制任务为: 既要控制系统沿约束曲面运动的瞬时位置, 又要控制系统作用于曲面上的力。在稳定性分析中, 仅需分析沿曲面的运动, 因为在曲面法线方向没有运动。仅从这一点来看, 也必须保持始终与曲面相接触。若机器人未受到约束, 那么就要求通过对力的控制来确保是压向曲面, 而非脱离曲面。

本节简要介绍如何将前述计算力矩公式推广用于机器人的位置和力控制, 详细的讨论见第六章。由第六章可知: 位置和力的混合控制是单机器人和多机器人及其周围环境交互作用控制中最一般性的问题。

若用 $\phi_d(t)$ 表示约束曲面上的一条轨迹, 用式 (4.58) 中的拉格朗日乘子 $\lambda_1(t), \dots, \lambda_k(t)$ 表示作用在曲面上的力。因这里所关心的是抵抗约束的力的控制, 所以位置控制务必保证不脱离约束曲面。定义

$$\tau_\phi = M(\theta) \frac{\partial f}{\partial \phi} (\ddot{\phi}_d - K_v \dot{e}_\phi - K_p e_\phi) + \left(C(\theta, \dot{\theta}) \frac{\partial f}{\partial \phi} + M(\theta) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \right) \dot{\phi} + N(\theta, \dot{\theta})$$

式中: $e_\phi = \phi - \phi_d$ 。上式就是驱使机器人沿曲面运动并对曲面不施加力时所需要的力矩。换句话说, 若施加力矩 $\tau = \tau_\phi$, 并完全去除约束, 那么机器人将按理想的轨迹运动, 就如存在约束一样。

为施加适当的法向力, 将式 (4.58) 定义的 τ_N 加到 τ_ϕ 上。因 τ_N 位于约束的法线方向, 故其不影响位置的控制。当然, 这要求约束面能承受作用在其上的法向力。完整的控制规则为

$$\tau = \tau_\phi + \sum_{i=1}^k \lambda_i(t) \nabla h_i \quad (4.63)$$

式中 τ_ϕ 为已知。该控制规则的分析收敛性证明见第六章

与前面介绍的控制规则一样, 这里提出的力控制规则与机器人和曲面的模型精确度有关。特别要注意是: 法向力不采用反馈来修正模型误差、传感器误差, 或其它的非理想因素。

6.3 实例: 沿滑槽运动的平面机器人

作为有约束机器人的一个简单实例, 考虑图 4.12 所示两自由度平面机器人, 其末端执行器限制在滑槽中运动。该系统为一曲柄滑块机构, 在转动关节处可以施加力矩, 现需控制滑块的运动和作用在滑槽上的力。该例子相当于机器人沿墙面的运动, 其中对滑槽的作用力必须总是指向规定的方向。

取滑槽为过点 $q = (l, 0)$ 并与基础坐标系的 x 轴成 α 角的直线, 滑槽的法矢量为

$$n = \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{bmatrix}$$

滑槽可以表示为满足 $(p - q) \cdot n = 0$ 的所有点 $p \in \mathbb{R}^2$ 的集合。

根据末端执行器必须位于滑槽中的要求, 就可得到机器人的约束。设 $p(\theta) \in \mathbb{R}^2$ 表示工具坐标系的位置, 则约束为

$$h(\theta) = \left(p(\theta) - \begin{bmatrix} l \\ 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{bmatrix} = 0$$

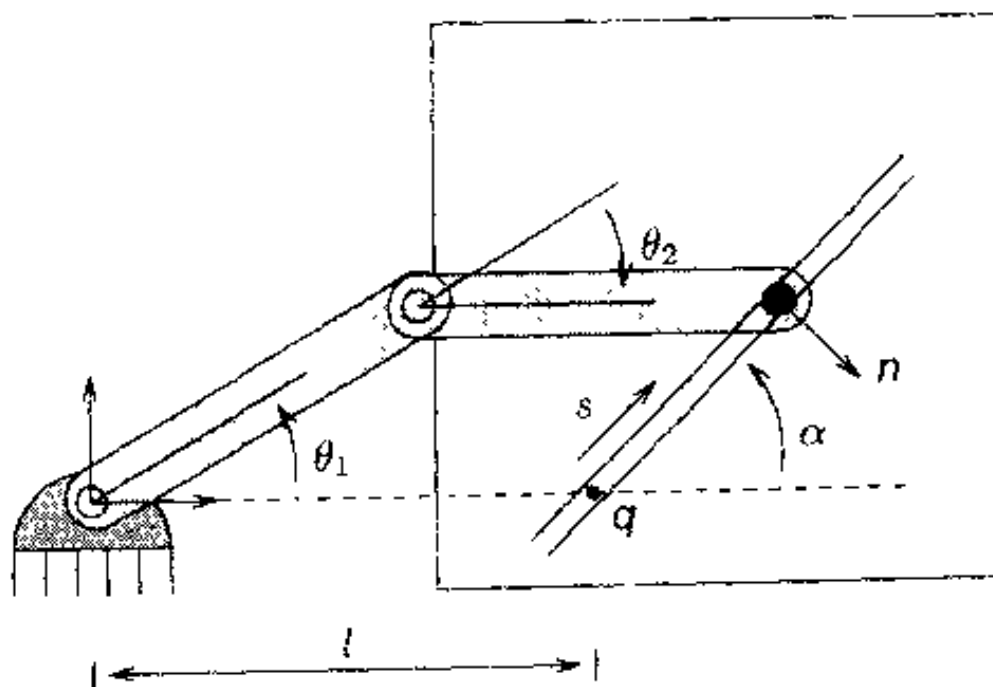


图 4.12 沿滑槽运动的平面机器人

将其代入机器人的运动学正解方程得

$$h(\theta) = (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) - l) \sin \alpha - (l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)) \cos \alpha = -l_1 \sin(\theta_1 - \alpha) - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2 - \alpha) - l \sin \alpha$$

确定法向力方向的约束梯度为

$$\nabla h(\theta) = \begin{bmatrix} -l_1 \cos(\theta_1 - \alpha) - l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2 - \alpha) \\ -l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2 - \alpha) \end{bmatrix}$$

注意这是在关节坐标系中的法向力方向。也就是说, 作用在该方向的关节力矩不引起运动, 只是当力作用在滑槽方向时才产生运动

为表示沿滑槽的运动, 设 $s \in \mathcal{R}$ 表示沿滑槽运动的位置, 其中当 $s=0$ 时表示点 $q = (l, 0)$ 。建立函数 $f(s)$ 使得 $h(f(s))=0$ 包含机器人的运动学逆解, 即根据给定的滑槽上某点的位置, 求得机器人到达该点时的关节转角。

若机器人的端部位于滑槽上的位置 s , 那么末端执行器的 xy 坐标为

$$x(s) = l + s \cos \alpha$$

$$y(s) = s \sin \alpha$$

求解运动学逆解方程 (见第三章第 3 节), 并取肘部向下的解, 有

$$f(s) = \begin{bmatrix} \theta_1(s) \\ \theta_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan\left(\frac{s \sin \alpha}{l + s \cos \alpha}\right) + \arccos\left[\frac{s^2 + 2ls \cos \alpha + l^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1 \sqrt{s^2 + 2ls \cos \alpha + l^2}}\right] \\ \pi + \arccos\left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - s^2 - 2ls \cos \alpha - l^2}{2l_1 l_2}\right) \end{bmatrix}$$

映射的雅可比矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{(s + l \cos \alpha)(s^2 + 2ls \cos \alpha + l^2 - l_1^2 + l_2^2)}{2l_1(s^2 + 2ls \cos \alpha + l^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 - \frac{(s^2 + 2ls \cos \alpha + l^2 + l_1^2 - l_2^2)}{4l_1^2(s^2 + 2ls \cos \alpha + l^2)}}} + \frac{l \sin \alpha}{s^2 + l^2 + 2ls \cos \alpha} \\ \frac{2(s + l \cos \alpha)}{\sqrt{4l_1^2 l_2^2 - (s^2 + 2ls \cos \alpha + l^2 - l_1^2 - l_2^2)^2}} \end{bmatrix}$$

上述矩阵可用于求解运动方程和建立控制规则。计算力矩控制规则具有如下形式

$$\tau = M(\theta)J(\dot{s}_d - K_v \dot{e}_s - K_p e_s) + (C(\theta, \dot{\theta})J + M(\theta)\dot{J})\dot{s} + \lambda n$$

式中 $e_s = s - s_d$; λ 是作用于滑槽的期望力; $K_v, K_p \in \mathcal{R}$ 分别为增益系数和阻尼系数; M, C 分别为广义惯性矩阵和哥氏矩阵。由 2.3 节求得的惯性参数为

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} \alpha + \beta x_2 & \delta + \frac{1}{2}\beta x_2 \\ \delta + \frac{1}{2}\beta x_2 & \delta \end{bmatrix} \quad C(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\beta s_2 \dot{\theta}_2 & -\frac{1}{2}\beta s_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ \frac{1}{2}\beta s_2 \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

式中

$$\alpha = \mathfrak{I}_{x1} + \mathfrak{I}_{x2} + m_1 r_1^2 + m_2 (l_1^2 + r_2^2)$$

$$\beta = m_2 l_1 l_2$$

$$\delta = \mathfrak{I}_{x2} + m_2 r_2^2$$

令人惊奇的是如此简单的问题却得到这么复杂的解。其原因是整个问题的求解是在机器人的关节空间进行的, 而约束 $\theta = f(s)$ 是一条非常复杂的曲线。

推导该系统运动方程的最好方法是: 根据描述末端执行器位置的工作空间变量来建立系统的动力学方程 (见习题 12)。按此方法, 将机器人端部限制在滑槽中的约束方程就变得非常简单。这也是第六章的一个基本方法, 第六章将结合该实例以及一些其他有约束操作系统例子进行更为一般的讨论。

7 小结

本章讨论的主要概念如下:

1. 拉格朗日函数为 $L = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q})$ 的机械系统, 其运动方程满足拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i$$

其中 $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ 是系统的广义坐标; $\tau \in \mathbb{R}^n$ 是广义外力矢量。

2. 对于位形为 $g(t) \in SE(3)$ 的物体, 由牛顿-欧拉方程可得其运动方程为

$$\begin{bmatrix} m\mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathfrak{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}^b \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}^b \times m\mathbf{v}^b \\ \boldsymbol{\omega}^b \times \mathfrak{I}\boldsymbol{\omega}^b \end{bmatrix} = \mathbf{F}^b$$

其中 m 为物体质量; $\mathfrak{I}$ 为惯性张量; $\mathbf{V}^b = (\mathbf{v}^b, \boldsymbol{\omega}^b)$ 和 $\mathbf{F}^b$ 分别为物体瞬时速度和施加的物体力旋量。

3. 开链机器人的运动方程为

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \boldsymbol{\tau}$$

式中 $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$ 为机器人关节变量的集合; $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ 为作用在关节处的驱动力集合。机器人的动力学方程具有下列性质:

- (a) $\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})$ 是对称且正定的;
- (b) $\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是反对称矩阵。

4. 对于平衡点为 $\mathbf{x}^*$ 的系统 $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t)$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 如果由 $\mathbf{x}^*$ 附近开始的所有解都趋向于 $\mathbf{x}^*$, 则该平衡点 $\mathbf{x}^*$ 为局部渐近稳定点。通过寻找一个局部正定函数 $V(\mathbf{x}, t) \geq 0$, 使得 $-\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ 沿系统轨迹也是局部正定的, 那么利用李亚普诺夫直接法可以证明系统的稳定性。当 $-\dot{V}$ 是半正定时, 利用 Lasalle 不变原理可以证明系统的渐近稳定性。另外, 李亚普诺夫间接法可以检查系统的线性化 (如果存在的话)。线性化的全局指数稳定性意味着完全非线性系统的局部指数稳定。

5. 根据机器人动力学方程的形式和结构, 可建立多种跟踪任意轨迹的控制规则。其中两个最典型的控制规则是计算力矩控制规则

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})(\ddot{\boldsymbol{\theta}}_d + \mathbf{K}_v\dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathbf{K}_p\boldsymbol{\epsilon}) + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$$

和增广 PD 控制规则

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}}_d + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}}_d + \mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{K}_v\dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathbf{K}_p\boldsymbol{\epsilon}$$

这两种控制规则可以实现对给定关节空间轨迹的指数轨迹跟踪。也可推导这两种控制规则在工作空间中的形式, 此时在不求解运动学逆解的情况下即能实现末端执行器的轨迹跟踪。利用李亚普诺夫稳定性理论, 可以证明这些控制规则的稳定性。

8 文献说明

动力学的拉格朗日方程是经典的; 更好的处理方法可参考 Rosenberg^[100] 或 Pars^[90] 的著作。关于拉格朗日方程在机器人动力学中的应用, 可参阅机器人学方面的教材, 如文献 [2, 21, 35, 53, 111]。

第 3.3 节介绍的运动链运动方程的几何公式基于 Brockett, Stokes 和 Park^[15, 88] 最近的著作, 并参考了 Rodriguez, Jain 和 Kreutz-Delgado^[46, 99] 的空间运动代数公式, 他们在计算系统的惯性特性时更为全面地反映出系统的树状性质。

关于机器人控制方面的文献非常多。其中 Spong 和 Vidyasagar^[111] 进行了比较全面的讨

论, 给出了机器人控制的很多不同方法。文献^[110]也对该领域的最新研究成果作了很好的总结。第5节介绍的修正PD控制规则是由Koditschek^[52]最先提出的。关于利用线性化技术对机器人进行控制的讨论可参考Kreutz^[54]。为证明PD控制规则的指数稳定性, 已有学者提出了在李亚普诺夫函数中采用非对称项, 例如Wen和Bayard^[120]。

9 习题

1. 推导图4.13所示系统的运动方程。

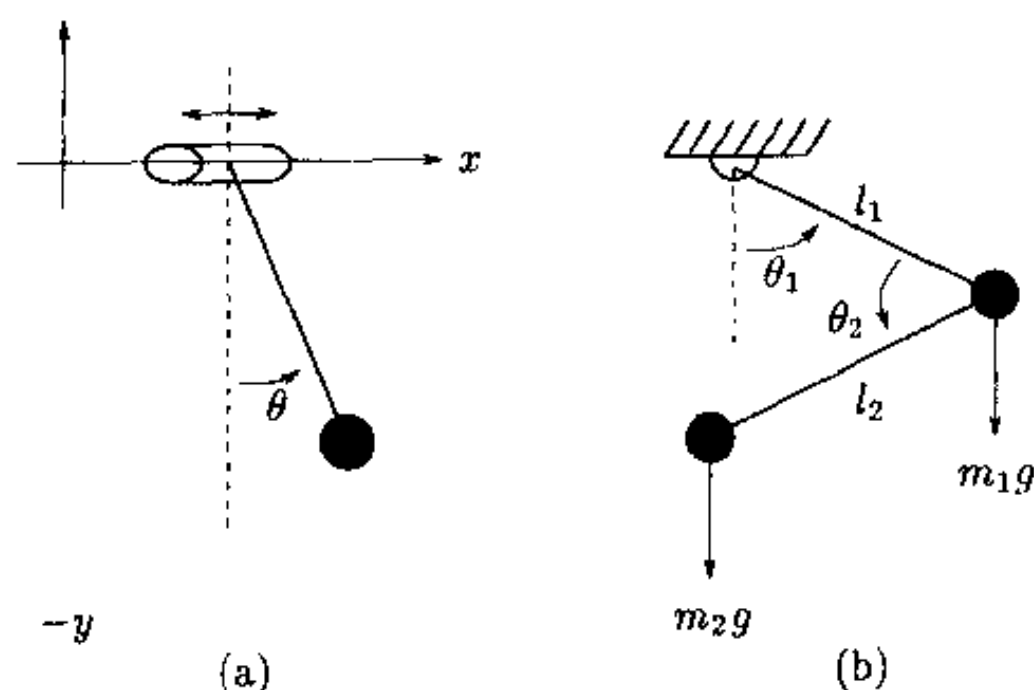


图 4.13 平面摆
(a) 单摆 (b) 双摆

(a) 栓于绳索上的理想平面摆, 其支点可沿水平线自由滑动(无摩擦)。

(b) 双摆: 用无质量的连杆将两个集中质量连接起来, 并与支架组成转动关节。

2. 计算图4.14所示物体的惯性张量。

3. 广义惯性矩阵变换

当物体坐标系由B换为C时, 试证明物体的广义惯性矩阵为

$$\mathfrak{M}_c = \text{Ad}_{g_{bc}}^T \mathfrak{M}_b \text{Ad}_{g_{bc}} = \begin{bmatrix} m\mathbf{I} & m\mathbf{R}_{bc}^T \hat{\mathbf{p}}_{bc} \mathbf{R}_{bc} \\ -m\mathbf{R}_{bc}^T \hat{\mathbf{p}}_{bc} \mathbf{R}_{bc} & \mathbf{R}_{bc}^T (\mathfrak{J} - m\hat{\mathbf{p}}_{bc}^2) \mathbf{R}_{bc} \end{bmatrix}$$

式中 g_{bc} 表示由C到B的物体运动, $\mathfrak{M}_b$, $\mathfrak{M}_c$ 分别为在坐标系B和C中表示的广义惯性矩阵。

4. 证明在空间坐标系中的欧拉方程为

$$\mathfrak{J}' \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathfrak{J}' \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\tau}$$

式中 $\mathfrak{J}' = \mathbf{R} \mathfrak{J} \mathbf{R}^T$, $\boldsymbol{\tau}$ 为作用于刚体质心的力矩。

5. 建立空间坐标系中的牛顿-欧拉方程。

6. 证明可以通过选取 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{C}$, 使

得牛顿-欧拉方程为如下形式

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{V}} + \mathbf{C}(\mathbf{g}, \dot{\mathbf{g}}) \mathbf{V} = \mathbf{F}$$

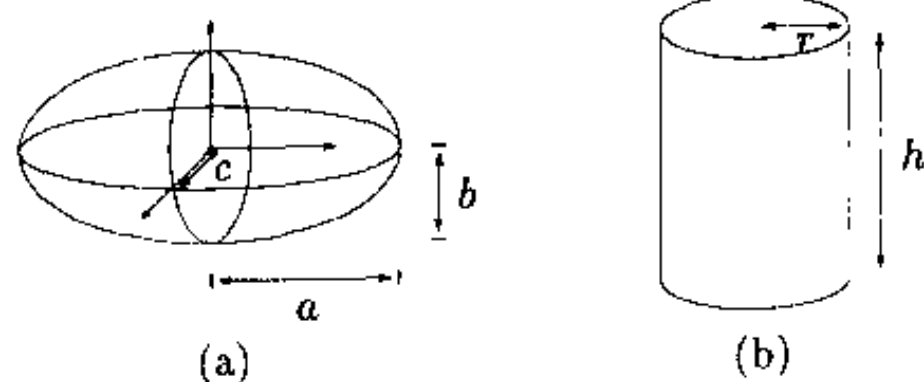


图 4.14 惯性张量的计算
(a) 椭球 (b) 圆柱

式中 $M > 0$, $\dot{M} - 2C$ 为反对称矩阵。

7. 证明由式 (4.11) 给出的平面两杆机器人的运动方程满足引理 4.2 的性质。

8. 机器人动力学的被动性

设 $H = T + V$ 为刚性机器人的总能量。证明：若 $\dot{M} - 2C$ 是反对称矩阵，则系统的能量是守恒的，即 $\dot{H} = \dot{\theta} \cdot \tau$ 。

9. 证明 PD 控制规则的工作空间形式可实现指数轨迹跟踪。

10. 当 $\lambda \in \mathbb{R}$ 为正, $K_v, K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为正定时, 证明下列控制规则

$$\tau = M(\theta)(\ddot{\theta}_d + \lambda \dot{e}) + C(\theta, \dot{\theta})(\dot{\theta}_d + \lambda e) + N(\theta, \dot{\theta}) + K_v \dot{e} + K_p e$$

是指数轨迹跟踪。

11. 若 A, C 是对称且正定的, 试证明对于任意小的 $\epsilon > 0$, 下列矩阵是正定的

$$\begin{bmatrix} \epsilon A & \epsilon B \\ \epsilon B^T & C + \epsilon D \end{bmatrix}$$

12. 利用工作空间坐标的混合控制

考虑第 6.3 节给出的有约束操作问题。设 $p_a(\theta) \in \mathbb{R}^2$ 为末端执行器的坐标, $w = p(\theta)$ 为系统工作空间坐标的集合。

(a) 计算将关节空间动力学方程转换为工作空间动力学方程的矩阵 $J(\theta)$ (见第 5.4 节);

(b) 建立以工作空间变量表示的约束函数, 并求将滑槽位置变换为工作空间坐标的映射 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ 。设 $K(s)$ 表示映射 $w = f(s)$ 的雅可比矩阵。

(c) 建立以 w 及其微分、约束系统动力学参数、矩阵 $J(\theta)$ 和 $K(s)$ 表示的约束系统动力学方程。

(d) 证明 (c) 推导的运动方程与第 6.3 节推导的运动方程相同, 并证明两种情况下的 τ_N 和惯性矩阵 $\tilde{M}(s)$ 也相同。

第五章 多指手运动学

本章研究多指机器人手抓取物体的运动学问题。对于给定的手指和物体描述，建立手指与物体间速度和力的关系，研究能实现对物体操作的抓取条件。所建立的抓取运动学除考虑通常的手指与物体间以固定点接触外，还包括手指相对于物体作纯滚动或滑动情况。

1 抓取概述

通常，工业中使用的机器人由大臂和作为末端执行器的简单夹持器组成。此类机器人对于要求实现负荷的大范围运动作业是有效的，但却不能实现诸如装配之类的要求对负荷进行精细调整运动的作业。因为传统的机器人要实现对被抓物体的微小运动，机器人臂部各关节的运动就要求很精确，由于机器人臂部各构件尺寸通常较大，通过整个臂部的运动不易实现对物体的精确操作，正如人通过整个手臂的运动来写字一样。

传统机器人的第二个不足为：对于一定的夹持器，所能抓取物体的类型有限。例如平行爪式夹持器，当用于抓取含平行平面的物体时是非常有效的，然而却不能用于稳定抓取四面体。这种局限性有时可通过为机器人臂部配备工具变换装置、将不同的夹持器以一定的方式装于机器人上加以克服，这样可有效地扩大所能抓取物体的类型，但还是不能有效地解决精细调整运动问题。

在本章和下一章将研究克服这些问题的另一种方法，即使用多指机器人手。多指手相当于安装在机器人手臂上可独立实现操作运动的一组机器人。由于机器人手通常均小于所安装的机器人本体，所以可提高机器人的整体精度，而且多指手所增加的自由度使得仅用一个“末端执行器”即可适应抓取各种类型的物体。

多指手的使用使整个系统的复杂性增加。带有多指末端执行器的机器人自由度很多，使系统的运动学和动力学分析复杂化，而且由于手与物体的接触，必须研究含接触约束的机械系统运动学和动力学，同时系统自由度的增加将使完成一定任务的可行抓取规划工作变得困难。

机器人手的使用将导致附加的复杂性，所以对于使用多指手并不是能解决任何操作问题这一观点的认识是很重要的。通常的末端执行器已能解决大量的制造和物料搬运问题，而且还能实现稳定和刚性抓取，而同类的抓取若由多指手来完成则需要有反馈控制并导致整个抓取刚性的降低。尽管如此，在很多情况下，安装于机器人臂端的多指手仍是解决一些困难问题的很有吸引力的方法。机器人手研究的方法原理可应用于很多其它领域，最显著的是用于多机器人的协调操作。事实上，如果将两个机器人看作是一个手的两个手指，那么两机器人的协调提升问题即可归结为手的抓取问题。鉴于此，本章将给出多指手研究的基本原理，这些原理可用于各种机器人系统。

多指机器人手的研究可分为运动学与规划、动力学与控制两大基本问题。在考虑机器人手的附加复杂性后，前面几章介绍的有关这方面的研究方法可推广在此得到应用，同时也提

出一些结合多指手特点的新的研究方法,如抓取规划和纯滚动接触运动学。

首先详细研究多指机器人手的运动学问题。对于给定的物体、手指模型及手指与物体间的接触方式,找出手指与物体间力和运动关系,其中主要是解决手指相对于物体无滑动情况下的系统运动学。在研究手运动学时均假设接触位置已知(或可以确定)。在此假设条件下,建立影响手运动的基本抓取约束。

抓取规划问题是指确定物体与手指间的一系列接触位置。为此,首先说明抓取应具有的特性,这些特性为:

1) 抵抗外力的能力。若给定加于物体上的力螺旋,希望施加能产生相反力螺旋的接触力。手指能抵抗任意外力的抓取称为力封闭抓取(force-closure grasp)。

2) 灵活操作物体的能力。为操作物体,必须能使物体的运动与期望任务相一致,即根据不同的任务,要求能使物体实现所有方向或若干方向的运动。手指能实现物体任意运动的抓取称为可操作抓取(manipulable grasp)。

对于给定物体,选择具有以上特性的接触方式。针对一些简单情况,提出选择接触位置的过程,以说明方法的有效性。

第六章研究多指机器人手的动力学和控制问题,将第四章中的有关动力学公式加以推广应用于含接触约束的机器人系统。由于用于机器人的所有控制规则均能加以推广应用于多指机器人手系统,所以这样做是完全可能的。同时还将多指机器人手系统研究的有关方法推广应用于冗余度机器人的动力学和控制研究。

在本章和下一章,作以下两个假设以进行精确分析:

- 1) 刚性物体与刚性杆机器人接触。
- 2) 给定手指和物体的精确模型。

如何放宽上述条件正是当前研究的主题(如文献[48, 74])。

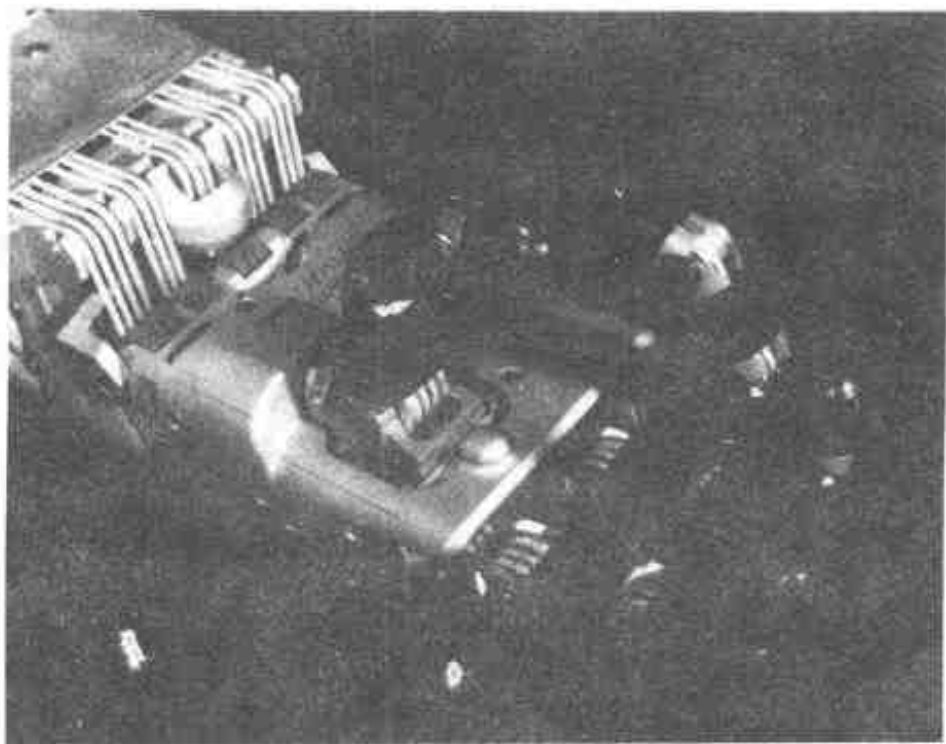


图 5.1 Utah/MIT 手

2 抓取静力学

首先研究一种特殊的简单情况,即手指与物体间均看作是接触位置固定的点接触,从而可以不考虑手指在物体表面上的滚动或滑动(这种滚动或滑动情况后面将作详细研究)。同时也不考虑构成手的手指运动学,而仅考虑一组接触点与物体间的力传递。

2.1 接触模型

手指与物体间的接触可以看作是手指施加于接触点的力与物体上某参考点合力螺旋之间

的一种映射。为简化第六章中动力学公式,选择物体质心位置作为物体参考点。基于固定于各接触位置和物体参考点的一组坐标系,表示作用于接触点和物体上的力。假设物体上的接触点位置固定不变。

为方便起见,选择接触坐标系 C_i 时使其 z 轴指向接触点处表面内法线方向(如图 5.2)。以相对于物体坐标系 O 的位置和姿态来描述接触位置,即

$$g_{\alpha} = (p_{\alpha}, R_{\alpha}) \in SE(3)$$

为相对于物体的接触位置。 g_{α_i} 为将接触坐标系中给定点的坐标转换为物体坐标系中的坐标。物体相对于固定的手掌坐标系的位形由 $x_o := g_{po} \in SE(3)$ 给定,接触点施加的力可用相对于接触坐标系 C_i 原点的力螺旋 F_{c_i} 表示。

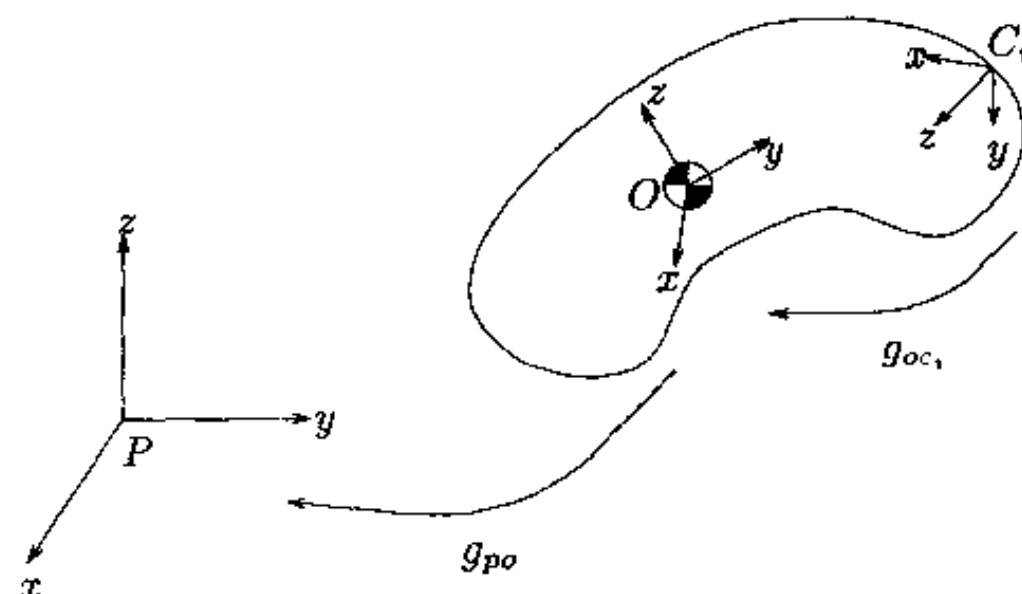


图 5.2 接触位置和物体受力坐标系

一般手指并不能施加任意方向的力。将通常的接触位形分为几种简单的接触模型,研究其中最简单的接触情况,即考虑手指在接触位置对物体仅能施加法向力,然后将其推广到考虑摩擦的几种简单模型

当指端与物体间无摩擦时即获得无摩擦点接触(frictionless point contact)(图 5.3),此时力只能是加在物体表面的法线方向上,即力可表示为

$$F_{c_i} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T f_{c_i} \quad f_{c_i} \geq 0 \quad (5.1)$$

这里, $f_{c_i} \in \mathfrak{R}$ 为手指施加于法线方向的力幅。 f_{c_i} 必须为正,以保证这种接触是压向物体而不是拉物体。

无摩擦点接触虽然在实际情况下并不存在,但对于手指与物体间的摩擦较小或未知时却是一种有效的接触模型。由于无摩擦点接触只能施加法向力,对物体的操作就不能依靠摩擦力。

对于希望利用摩擦力的抓取,必须建立考虑摩擦的接触模型,如可用库仑摩擦模型(Coulomb friction model)。可将施加于表面切线方向的接触力看作是法向力的函数。库仑摩擦模型是认为切向力正比于法向力的经验模型,其比值恒定,与接触材料有关。

设切向力的大小为 $f \in \mathfrak{R}$, 法向力的大小为 $f \in \mathfrak{R}$, 则根据库仑定律下式为接触处出现滑动时的条件

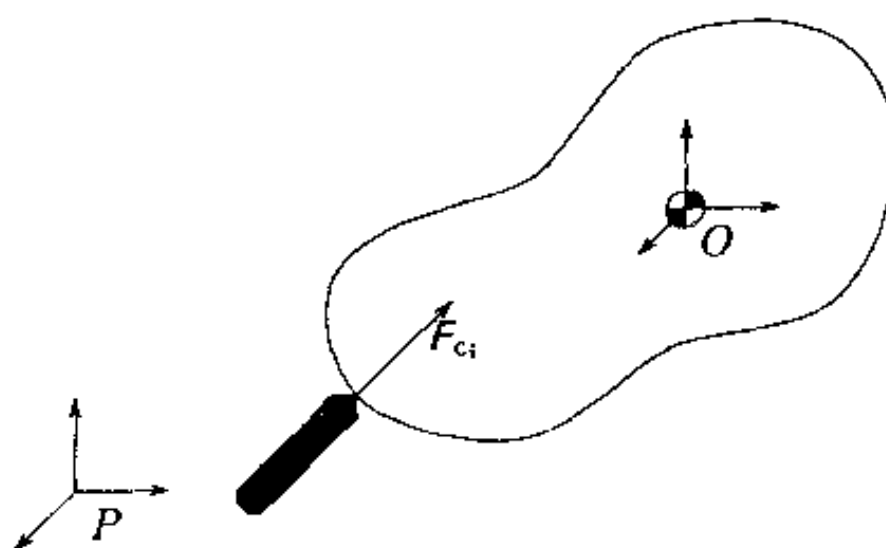


图 5.3 无摩擦点接触

$$|f^t| > \mu f^n$$

这里 $\mu > 0$ 为静摩擦因数。也就是说接触处施加的切向力范围为

$$f^t \leq \mu f^n \quad (5.2)$$

实际情况下, f 必须为正以保证至少存在非零的 f^t

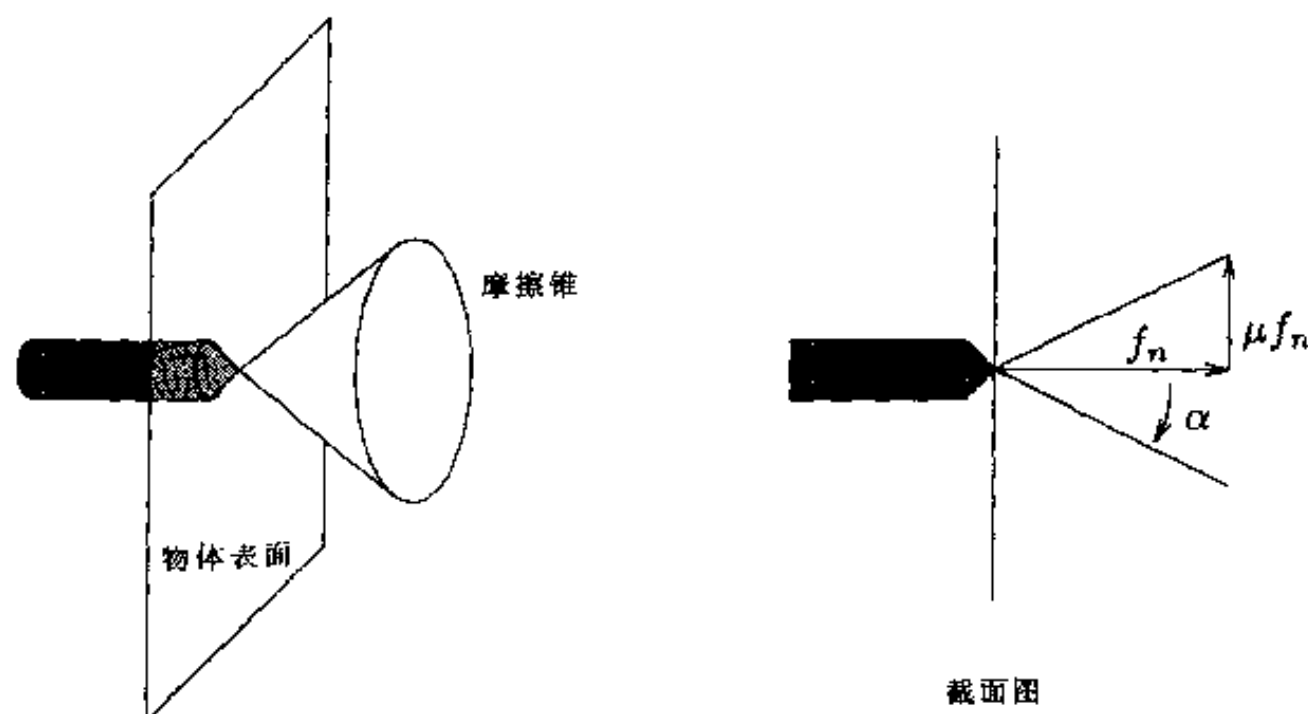


图 5.4 库仑摩擦模型的几何描述

式 (5.2) 的几何意义如图 5.4 所示, 接触处施加的力必须位于以表面法线为轴线的摩擦圆锥 (friction cone) 内, 相对于法线的圆锥角为

$$\alpha = \arctan \mu$$

常用材料的摩擦因数见表 5.1。由于 μ 通常小于 1, 因此摩擦圆锥角小于 45° 。

表 5.1 常用材料静摩擦因数 (摘自 CRC 化学物理手册)

钢对钢	0.58	木材对木材	0.25 ~ 0.5
聚乙烯对钢	0.3 ~ 0.35	木材对钢	0.2 ~ 0.6
聚乙烯对聚乙烯	0.5	木材对皮革	0.3 ~ 0.4
橡胶对固体	1 ~ 4	皮革对金属	0.6

当指端与物体间存在摩擦时即采用有摩擦点接触模型 (point contact with friction), 此时力可施加于接触处摩擦锥内的任意方向。对于有摩擦模型, 加于物体上的力螺旋相对于不变的方向基可表示为

$$F_{ci} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} f_{ci}, \quad f_{ci} \in FC_{ci} \quad (5.3)$$

其中

$$FC_{ci} = \{f \in \mathcal{R}^3 : \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \leq \mu f_3, f_3 \geq 0\}$$

更接近实际的接触模型是软指接触 (soft-finger contact), 即不仅可在关于表面法线的圆锥内施加力, 而且可相对于法线施加力矩。为简化起见, 认为力矩由力矩摩擦因数确定。施加的接触力螺旋为

$$\mathbf{F}_{c_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{f}_{c_i} \quad \mathbf{f}_{c_i} \in FC_{c_i} \quad (5.4)$$

摩擦锥为

$$FC_{c_i} = \{ \mathbf{f} \in \mathcal{R}^4 : \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \leq \mu f_3, f_3 \geq 0, |f_4| \leq \gamma f_3 \}$$

这里 $\gamma > 0$ 为力矩摩擦因数。

通常, 用力螺旋基 $\mathbf{B}_{c_i} \in R^{p \times m_i}$ 和摩擦锥 FC_{c_i} 来表示一种接触模型。在所有例子中, 均取施加于 $SE(3)$ 的广义力空间的维数 $p = 6$ 。当然其它值也是可以的, 如对于平面抓取情况取 $p = 3$ 。力螺旋基的维数 m_i 表示接触处施加独立力的维数。 FC_{c_i} 应满足下列特点:

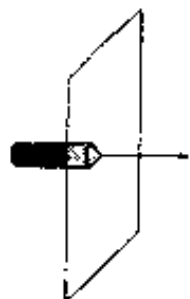
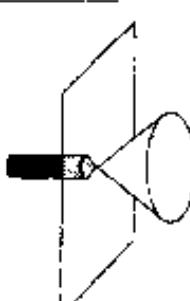
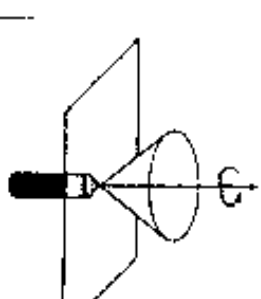
- 1) FC_{c_i} 为非内空 $\mathcal{R}^{m_i}$ 的封闭子集;
- 2) 对于任意的 $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in FC_{c_i}$, 总存在 $\alpha, \beta > 0$, 使 $\alpha \mathbf{f}_1 + \beta \mathbf{f}_2 \in FC_{c_i}$ 。

一定的接触方式所允许施加接触力的集合为

$$\mathbf{F}_{c_i} = \mathbf{B}_{c_i} \mathbf{f}_{c_i} \quad \mathbf{f}_{c_i} \in FC_{c_i} \quad (5.5)$$

表 5.2 列出了几种常见接触类型。其它如线接触、面接触类型在习题中加以研究。

表 5.2 常见接触类型

接触类型	图 解	力螺旋基	FC
无摩擦点接触		$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$f_1 \geq 0$
有摩擦点接触		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\sqrt{f_1^2 + f_2^2} \leq \mu f_3$ $f_3 \geq 0$
软 指		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\sqrt{f_1^2 + f_2^2} \leq \mu f_3$ $f_3 \geq 0$ $ f_4 \leq \gamma f_3$

2.2 抓取映射

为确定接触力对物体的影响,将接触力变换到物体坐标系。设第 i 接触坐标系相对于物体坐标系的位姿为 $(\mathbf{p}_{\alpha_i}, \mathbf{R}_{\alpha_i})$, 则单个接触力在物体坐标系可写为

$$\mathbf{F}_o = \text{Ad}_{\mathbf{g}_{\alpha_i}}^T \mathbf{F}_{c_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\alpha_i} & 0 \\ \hat{\mathbf{p}}_{\alpha_i} \mathbf{R}_{\alpha_i} & \mathbf{R}_{\alpha_i} \end{bmatrix} \mathbf{B}_{c_i} \mathbf{f}_{c_i} \quad \mathbf{f}_{c_i} \in \text{FC}_{c_i}$$

式中 $\text{Ad}_{\mathbf{g}_{\alpha_i}}^T$ 为将接触力螺旋映射为物体力螺旋的力螺旋变换矩阵。为简单起见,通常省略下标 o 而用 $(\mathbf{p}_{c_i}, \mathbf{R}_{c_i})$ 表示第 i 接触坐标系的位姿。定义 $\mathbf{G}_i \in \mathbb{R}^{p \times m_i}$ 为相对于 $\mathbf{B}_{c_i}$ 的接触力与物体力螺旋之间的线性映射,即

$$\mathbf{G}_i = \text{Ad}_{\mathbf{g}_{\alpha_i}}^T \mathbf{B}_{c_i}$$

如果共有 k 个手指与物体接触,作用于物体上总的力螺旋为各手指加于物体上力螺旋之和。接触力与物体所受合力之间的映射称为抓取映射 (grasp map): $\mathbf{G}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$, $m = m_1 + \dots + m_k$ 。由于每一接触映射是线性的,力螺旋可以叠加 (只要是在同一坐标系中表示), 则合力螺旋为

$$\mathbf{F}_o = \mathbf{G}_1 \mathbf{f}_{c1} + \dots + \mathbf{G}_k \mathbf{f}_{ck} = [\mathbf{G}_1 \quad \dots \quad \mathbf{G}_k] [\mathbf{f}_{c1} \quad \dots \quad \mathbf{f}_{ck}]^T$$

抓取映射为

$$\mathbf{G} = [\text{Ad}_{\mathbf{g}_{\alpha_1}}^T \mathbf{B}_{c1} \quad \dots \quad \text{Ad}_{\mathbf{g}_{\alpha_k}}^T \mathbf{B}_{ck}] \quad (5.6)$$

根据该定义,物体力螺旋可写为

$$\mathbf{F}_o = \mathbf{G} \mathbf{f}_c \quad \mathbf{f}_c \in \text{FC} \quad (5.7)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_c &= (\mathbf{f}_{c1}, \dots, \mathbf{f}_{ck}) \in \mathbb{R}^m \\ \text{FC} &= \text{FC}_{c1} \times \dots \times \text{FC}_{ck} \subset \mathbb{R}^m \\ m &= m_1 + \dots + m_k \end{aligned}$$

因此,抓取可以用抓取映射 $\mathbf{G}$ 和摩擦锥 FC 加以完整描述。

定义 5.1 抓取表示

抓取的完整描述包括矩阵 $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ 和满足下列条件的集合 $\text{FC} \in \mathbb{R}^m$:

1. FC 为非空 $\mathbb{R}^m$ 的封闭子集。
2. 对于任意的 $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in \text{FC}$, 总存在 $\alpha, \beta > 0$, 使得 $\alpha \mathbf{f}_1 + \beta \mathbf{f}_2 \in \text{FC}$ 。

由接触所能加于物体上的力螺旋集合具有下列形式

$$\mathbf{F}_o = \mathbf{G} \mathbf{f}_c \quad \mathbf{f}_c \in \text{FC}$$

从现在开始,将用 $\mathbf{G}$ 和 FC 表示抓取,并略去摩擦锥的实际意义而将 $\mathbf{G}$ 直接看作是一种抓取。

例 5.1 无摩擦点接触抓取映射

首先考虑若干点与物体接触的情况,每一接触力螺旋可写为

$$\mathbf{F}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{c_i} & 0 \\ \hat{\mathbf{p}}_{c_i} \mathbf{R}_{c_i} & \mathbf{R}_{c_i} \end{bmatrix} [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \mathbf{f}_{c_i} \quad \mathbf{f}_{c_i} \geq 0$$

将矩阵相乘,可看出物体力螺旋具有下列形式

$$F_o = \begin{bmatrix} n_{c_i} \\ p_{c_i} \times n_{c_i} \end{bmatrix} f_{c_i}$$

式中 n_{c_i} 为在物体坐标系中表示的表面内法矢。将各手指的作用加以组合即得

$$F_o = \begin{bmatrix} n_{c_1} & \cdots & n_{c_k} \\ p_{c_1} \times n_{c_1} & \cdots & p_{c_k} \times n_{c_k} \end{bmatrix} [f_{c_1}, \cdots, f_{c_k}]^T = G f_c \quad \begin{matrix} F_o \in \mathcal{R}^6 \\ f_{c_i} \geq 0 \end{matrix}$$

例 5.2 软指抓取一个盒子

考虑如图 5.5 所示通过两个软指接触抓取一个盒子的情况。接触坐标系相对于物体坐标系的位置为

$$\begin{aligned} R_{c_1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & p_{c_1} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{bmatrix} \\ R_{c_2} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & p_{c_2} &= \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

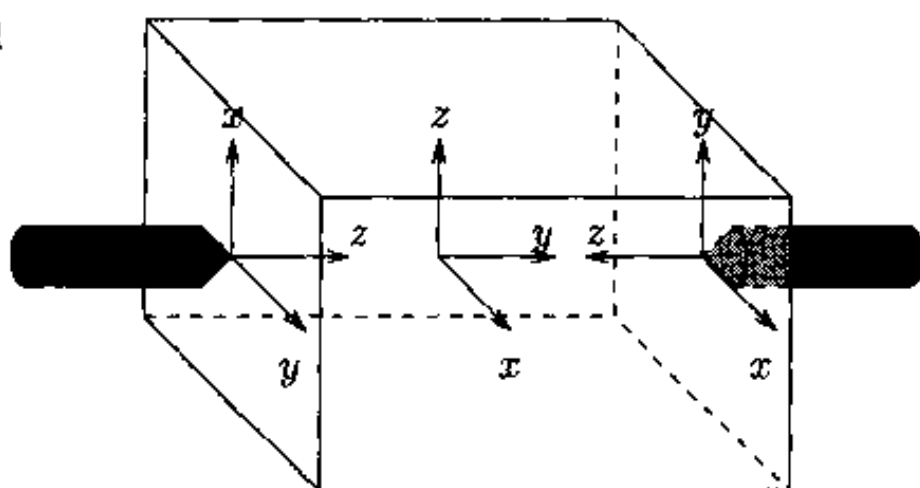


图 5.5 两指抓取盒子

将标准力螺旋基变换到物体坐标系, 得每一手指的抓取映射

$$G_i = \begin{bmatrix} R_{c_i} & 0 \\ \hat{p}_{c_i} R_{c_i} & R_{c_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将各抓取映射加以组合得

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -r & 0 & 0 & 0 & 0 & +r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & +r & 0 & 0 & -r & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

接触力为

$$f_c = (f_{c1}^1, f_{c1}^2, f_{c1}^3, f_{c1}^4, f_{c2}^1, f_{c2}^2, f_{c2}^3, f_{c2}^4) \in \mathcal{R}^8$$

在该坐标系中表示的摩擦锥为

$$FC = FC_{c1} \times FC_{c2}$$

$$FC_{c1} = \{f_c : \sqrt{(f_{c1}^1)^2 + (f_{c1}^2)^2} \leq \mu f_{c1}^3, |f_{c1}^4| \leq \gamma f_{c1}^3, f_{c1}^3 \geq 0\}$$

$$FC_{c2} = \{f_c : \sqrt{(f_{c2}^1)^2 + (f_{c2}^2)^2} \leq \mu f_{c2}^3, |f_{c2}^4| \leq \gamma f_{c2}^3, f_{c2}^3 \geq 0\}$$

例 5.3 矩形的平面抓取

考虑图 5.6 所示平面抓取情况。这里的分析仅限于 $SE(2)$ 。力螺旋在 $SE(2)$ 中可用一移

动分量 $f \in \mathbb{R}^2$ 和一个转动分量 $\tau \in \mathbb{R}$ 表示, 其中 f 对应于平面中的力, τ 对应于绕平面法线的力矩 (见习题 2.11)。SE(2) 中力旋量可按下式进行变换

$$\begin{bmatrix} f_o \\ \tau_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{c_i} & 0 \\ [-p_x & p_y] \mathbf{R}_{c_i} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{c_i} \\ \tau_{c_i} \end{bmatrix}$$

式中 $\mathbf{R}_{c_i} \in SO(2)$ 和 $p_{c_i} = (p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2$ 表示 c_i 相对于物体坐标系的位置。

由以上定义即可对图 5.6 进行分析。在 SE(2) 中, 选择接触坐标系时使 y 轴指向表面内法矢方向, 此时接触位置为

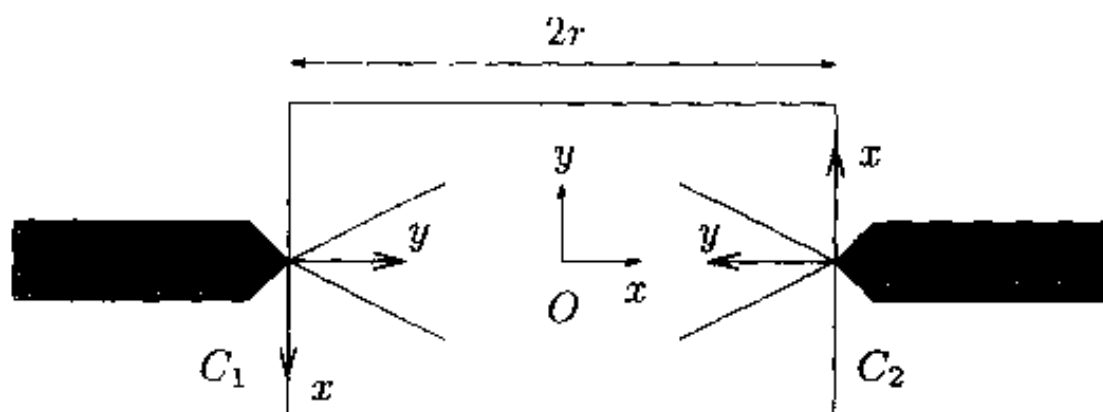


图 5.6 平面抓取

$$\mathbf{R}_{c1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad p_{c1} = \begin{bmatrix} -r \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_{c2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad p_{c2} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$$

有摩擦点接触力旋量基为

$$\mathbf{B}_{c_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

相应的摩擦锥约束为

$$f_{c_i} \in FC_{c_i}$$

$$FC_{c_i} = \{f \in \mathbb{R}^2 : |f_1| \leq \mu f_2, f_2 \geq 0\}$$

抓取映射为

$$\mathbf{G} = [\text{Ad}_{g_{\alpha 1}}^T \mathbf{B}_{c1} \quad \text{Ad}_{g_{\alpha 2}}^T \mathbf{B}_{c2}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ r & 0 & r & 0 \end{bmatrix}$$

3 力封闭

抓取的一个重要特性是能通过接触处施加适当的手指力螺旋来平衡作用于物体上的外力螺旋。例如, 当用多指手提起位于台面上的物体时, 手指必须对物体施加与物体重力方向相反的力。根据工作任务的不同, 可能还需克服其它方向的力螺旋, 同时手指所施加的力必须始终位于摩擦锥内, 以避免手指在物体表面上的滑动。

3.1 有关定义

一种抓取如果能抵抗任意力螺旋, 则这种抓取认为是力封闭^①的。为此引入下列定义。

定义 5.2 力封闭抓取

对于给定的施加于物体上的任意外力螺旋 $F_o \in \mathbb{R}^6$, 如果存在接触力 $f_c \in FC$ 使

① 为使叙文一致, 这里用术语力封闭, 而不是力螺旋封闭。

$$Gf_c = -F_o$$

则这种抓取称为力封闭抓取。由该定义可直接得到下列定理。

定理 5.1 力封闭抓取特性

抓取为力封闭当且仅当 $G(FC) = \mathbb{R}^p$ 。

力封闭抓取的主要特点是存在内力。所谓内力 (internal force) 是指作用于物体上合力为零的接触力的集合。在前面的平面抓取实例中可以看出

$$f_N = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]^T \Rightarrow Gf_N = 0$$

由此得出下列定义。设 $\text{int}(FC)$ 表示摩擦锥的内部。

定义 5.3 内力

如果 $f_N \in N(G) \cap FC$, 则 f_N 为内力。如果 $f_N \in N(G)$ 且 $f_N \in \text{int}(FC)$, 则 f_N 称为严格内力 (strictly internal force)。

内力可用于保证接触力满足摩擦锥约束。注意内力是相对于各接触处力螺旋基表示的接触力的集合。以下定理表明严格内力的存在是抓取为力封闭的必要条件。

定理 5.2 内力的必要性

抓取为力封闭当且仅当 G 为满射, 且存在一个接触力矢量 $f_N \in N(G)$ 使得 $f_N \in \text{int}(FC)$ 。

证明: (充分性) 取 $F_o \in \mathbb{R}^p$, 并设 f'_c 为满足 $F_o = Gf'_c$ 的任意矢量。因 G 满射, 必存在 f'_c 。下面说明总存在一个 α 使得 $f'_c + \alpha f_N \in \text{int}(FC)$ 。注意到

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{f'_c + \alpha f_N}{\alpha} = f_N \in \text{int}(FC)$$

因此存在足够大的 α' , 使

$$\frac{f'_c + \alpha' f_N}{\alpha'} \in \text{int}(FC) \subset FC$$

由摩擦锥的性质得

$$f_c = f'_c + \alpha f_N \in \text{int}(FC)$$

且 $Gf_c = Gf'_c = F_o$ 。

(必要性) 假设抓取是力封闭的, 取 $f_1 \in \text{int}(FC)$ 使 $F_o = Gf_1 \neq 0$, 取 $f_2 \in FC$ 使 $Gf_2 = -F_o$, 并定义 $f_N = f_1 + f_2$ 。则由圆锥特性可得 $Gf_N = F_o - F_o = 0$, 且 $f_N \in \text{int}(FC)$ 。

3.2 构成力封闭的条件

由于摩擦锥的特殊性, 抓取的力封闭性的判断是困难的。但对于特定的简单情况, 可以直接根据定义判断抓取的力封闭性。例如, 如果抓取是无摩擦点接触, 则抓取映射具有以下形式

$$G = \begin{bmatrix} n_{c1} & \cdots & n_{ck} \\ p_{c1} \times n_{c1} & \cdots & p_{ck} \times n_{ck} \end{bmatrix}$$

$$FC = \{f \in \mathbb{R}^k : f_i \geq 0\}$$

因此 $G(FC) = \mathbb{R}^6$ 当且仅当 G 中各列的正线性组合 (positive linear combinations) 张成 $\mathbb{R}^6$ 。

本例说明力封闭问题可作为正线性空间中的问题加以重新构造。由此得下述集合定义, 详细介绍见文献 [98]。

对于矢量 $\{v_1, \dots, v_k\}$ ($v_i \in \mathbb{R}^p$) 构成的集合, 如果存在 $\alpha_i > 0$ 使下式成立, 则称为正相关 (positive dependent)

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i = 0$$

矢量 $\{v_1, \dots, v_k\}$ 构成的集合, 如果对于 $x \in \mathbb{R}^n$ 存在 $\alpha_i > 0$, $i = 1, \dots, k$, 使下式成立, 则正张成 $\mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i = x$$

任何正张成 $\mathbb{R}^n$ 的矢量的集合均为正相关 (通过取 $x = 0$)。正相关矢量必存在严格正系数 $\alpha_i > 0$ 。

对于集合 K , 如果对于任意 $x, y \in K$, 有 $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$, 其中 $\lambda \in [0, 1]$, 则称 K 为凸集 (convex set)。凸集内任意两点间的连线仍位于该集。集合 S 的凸包 (convex hull), 是包含 S 的最小凸集 K (即为所有包含 S 的凸集的交集), 以 $\text{co}(S)$ 表示。据此定义, 对于给定的集合 $S = \{v_1, \dots, v_k\}$, 其凸包为

$$\text{co}(S) = \{v = \sum \alpha_i v_i : \sum \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0\}$$

此概念的说明见图 5.7a。

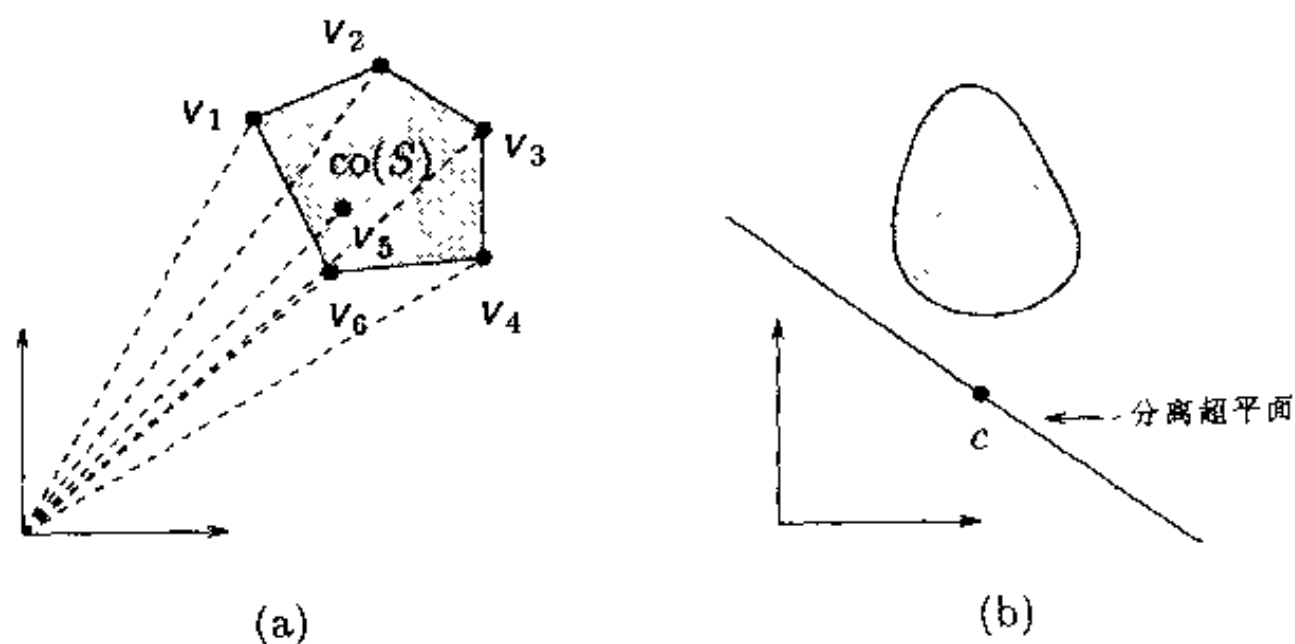


图 5.7 凸包与分离超平面

凸集研究中一个有用的对象为分离超平面 (separating hyperplane)。对于给定点 $c \in \mathbb{R}^p$, 经过 c 并具有法矢 $v \in \mathbb{R}^p$ 的超平面定义为

$$H_v(c) = \{x \in \mathbb{R}^p : v^T(x - c) = 0\}$$

由凸集分析基本理论知, 对于任一凸集 K 和一点 $c \in K$, 存在满足 $x \in K$, $v^T(x - c) > 0$ 的超平面 $H_v(c)$, 即 K 中所有点均位于 $H_v(c)$ 的同侧。这样的超平面称为位于 K 与 c 之间的分离超平面 (见图 5.7b)。如果 c 位于 K 的边界上, 则用 $v^T(x - c) \geq 0$ 代替 $v^T(x - c) > 0$, 并称 $H_v(c)$ 为支撑超平面 (supporting hyperplane)。

以下定理说明这些概念在确定抓取是否为力封闭中的应用。

定理 5.3 力封闭抓取的凸条件

考虑无摩擦点接触的固定接触抓取。设 $G \in \mathbb{R}^{p \times m}$ 为对应的抓取矩阵, 并用 $\{G_i\}$ 表示 G 的列。则下列描述是等价的:

- 1) 抓取是力封闭的。
- 2) G 的列正张成 $\mathcal{R}^p$ 。
- 3) $\{G_i\}$ 的凸包包含原点的邻域。
- 4) 不存在矢量 $v \in \mathcal{R}^p$, $v \neq 0$ 满足 $v \cdot G_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$ 。

条件 1) 和 2) 的等价由无摩擦点接触抓取的力封闭定义获得。其余条件基于有关凸集理论 (已超出本书范围), 详见文献 [98]。

定理 5.3 中第 4 个条件在计算方面是很有意义的, 这是因为 v 可以由 G 的列构成。即, 若给定 G 的 $p-1$ 列的任意组合, 并设 $v \in \mathcal{R}^p$ 为与 $p-1$ 列正交的非零矢量。为证明条件 4, 仅需检验 v 与 G 的其余列的点积符号不全相同。如何考虑由此定义的 v 留作习题。应注意矢量 v 如果存在, 则与经过原点的支撑超平面垂直。

例 5.4 用凸条件确定力封闭

考虑图 5.8 所示平面点接触

抓取情况。对于第一种抓取, 接触位置位于矩形物体的棱角附近, 对应的抓取映射为

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -a & b & -a & b \end{bmatrix}$$

其中 $a, b > 0$ 。可以通过选择 G 的任意两列来构成支撑超平面。设 v_{ij} 表示由 G_i 和 G_j 所确定平面的法矢。考虑各种可能情况, 有

$$\begin{aligned} v_{12}^T &= [a & b & 1] & v_{12}^T G &= [0 & 0 & -2a & 2b] \\ v_{13}^T &= [0 & 1 & 0] & v_{13}^T G &= [0 & -1 & 0 & 1] \\ v_{14}^T &= [a & -b & 1] & v_{14}^T G &= [0 & 2b & -2a & 0] \\ v_{23}^T &= [a & -b & -1] & v_{23}^T G &= [2a & 0 & 0 & -2b] \\ v_{24}^T &= [1 & 0 & 0] & v_{24}^T G &= [1 & 0 & -1 & 0] \\ v_{34}^T &= [a & b & -1] & v_{34}^T G &= [2a & -2b & 0 & 0] \end{aligned}$$

由于不存在满足定理 5.3 条件 4 的可能性, 所以可得出抓取是力封闭的结论。这种抓取的凸包见图 5.8 右上方。

对于第二种抓取, 接触位置取为 $a, b = 0$, 即

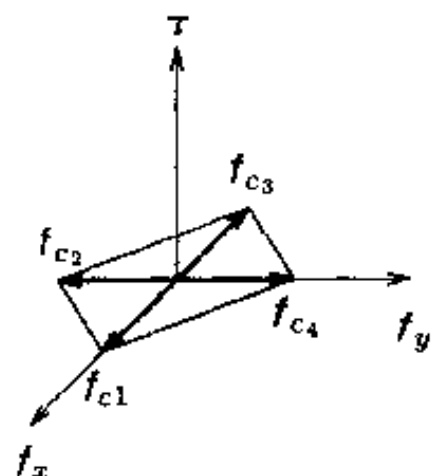
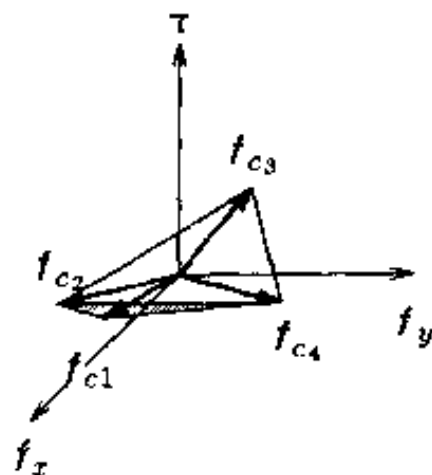
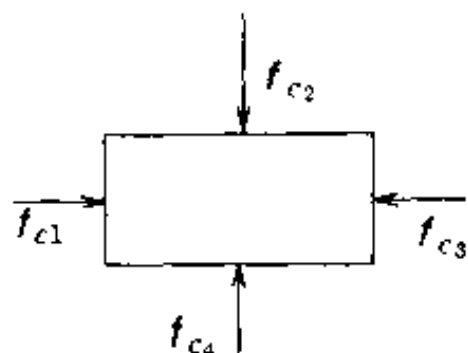
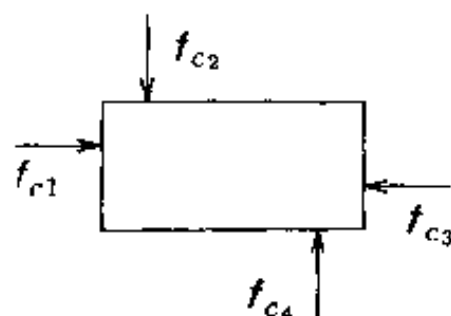


图 5.8 点接触平面抓取是否为力封闭的确定

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由于不可能通过 G 列的正线性组合来约束力矩(条件 2), 所以这种抓取不是力封闭的。 G 列的凸包全部位于 $f_x f_y$ 平面内, 但不包括原点邻域(条件 3)。最后取 $v = (0, 0, 1)$,

$$v^T G = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

因此条件 4 也不满足。

在某些情况下, 定理 5.3 可推广用于有摩擦接触的抓取。下面以一实例加以说明。

例 5.5 凸条件用于有摩擦抓取

考虑图 5.9 所示平面抓取情况。这里不用通常的接触力螺旋基来描述抓取。注意到位于摩擦锥内的接触力可以写为确定锥边的力的正线性组合, 因此可以通过检验接触摩擦锥边对应的物体力螺旋是否正张成物体力螺旋空间来判断抓取是否为力封闭

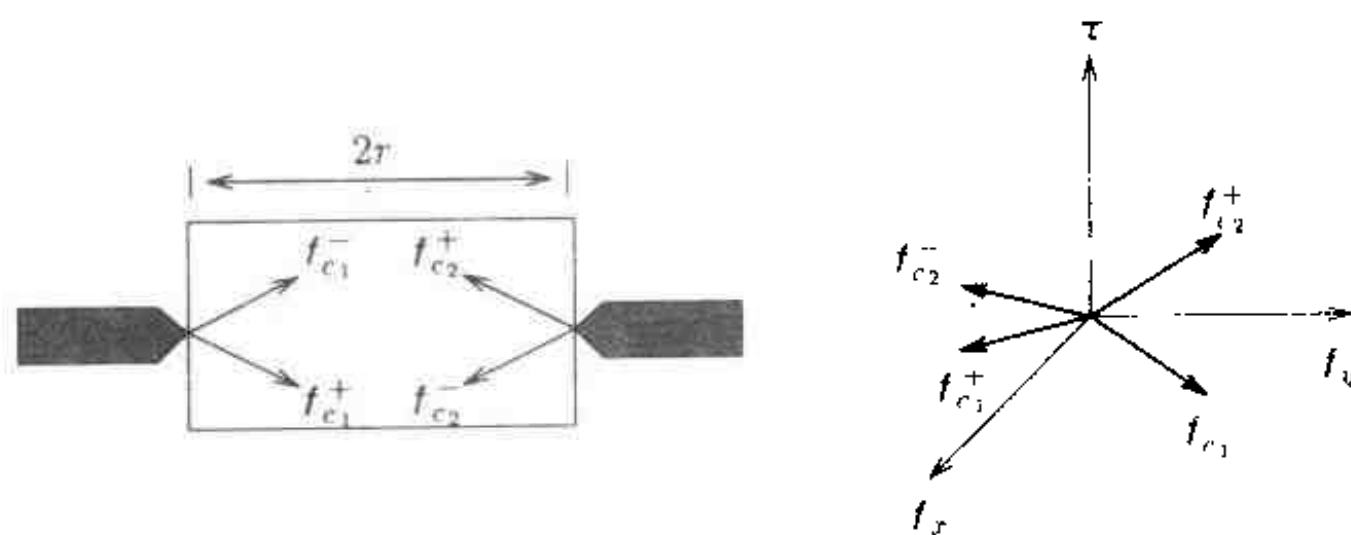


图 5.9 有摩擦点接触力封闭性

平面接触情况等价于如下接触映射

$$G'_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mu & -\mu \\ \mu r & -\mu r \end{bmatrix}$$

摩擦锥为

$$FC'_i = \{f \in \mathbb{R}^2 : f_1, f_2 \geq 0\}$$

其形式与两个独立的无摩擦点接触类似。因此, 通过对基的适当选择, 可以用定理 5.3 来检验有摩擦平面抓取的力封闭性。

对于空间三维抓取, 不能直接将定理 5.3 推广到有摩擦接触模型, 因为摩擦锥不能表示为矢量的有限集合, 不能用有限基的凸包来确定抓取是否力封闭。事

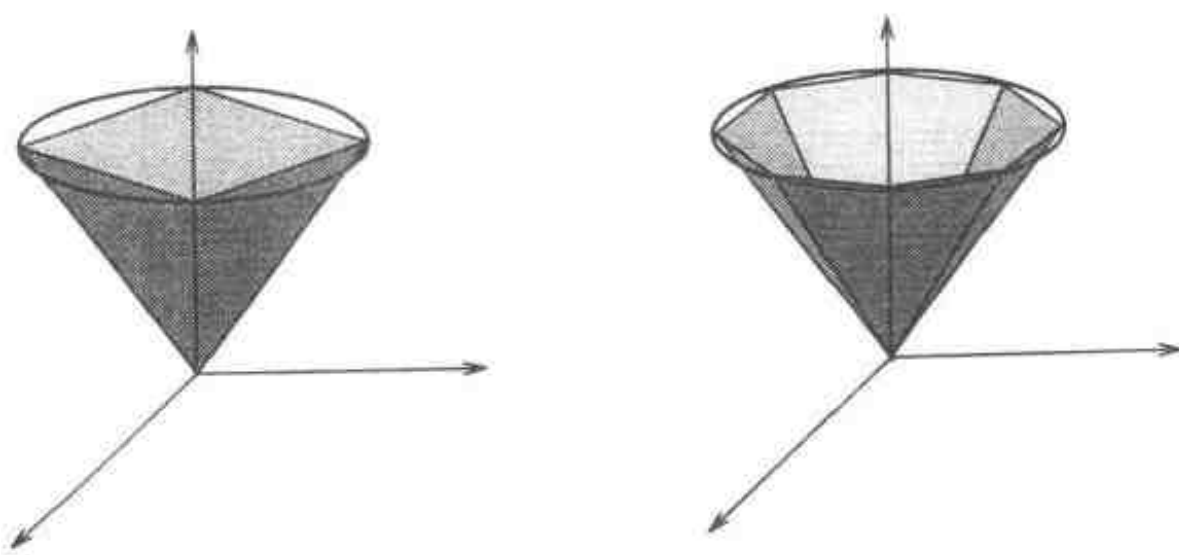


图 5.10 空间摩擦锥的近似

实上, 圆形摩擦锥可以用矢量有限集合生成的多面锥体来近似代替, 如图 5.10 所示。此时力封闭条件可以通过对近似锥体凸包的估计 (保守的) 来加以检验。如果凸包包含了原点的邻域, 则抓取是力封闭的。对于有限维近似锥体, 这是充分条件, 而非必要条件。

检验空间抓取力封闭的其他方法将在下一节介绍。

4 抓取规划

本节简要介绍如何选择满足力封闭抓取条件的接触位置。

4.1 所需接触数目的范围

假设要求设计一个多指机器人手, 用它来完成一系列指定任务, 那么首先必须确定手指的数目和类型。本节考虑如下问题: 如果给定接触模型, 那么需要多少个手指才能抓取任意物体? 如果选定了接触类型, 在机器人手掌上至少要安排几个手指?

对于给定物体 $O \subset \mathbb{R}^3$ (或平面时 $O \subset \mathbb{R}^2$), 用 $\Sigma = \partial O$ 表示物体的表面轮廓, 并假设物体表面是连续、光滑的曲面。用 $\Lambda(\Sigma)$ 表示通过无摩擦点接触施加到物体上的所有力螺旋的集合:

$$\Lambda(\Sigma) = \left\{ \begin{bmatrix} n_{c_i} \\ p_{c_i} \times n_{c_i} \end{bmatrix} : c_i \in \partial O \right\}$$

式中 n_{c_i} 是 Σ 在点 c_i 处的单位内法矢, p_{c_i} 是在物体坐标系中表示的接触点。如果 $\Lambda(\Sigma)$ 的凸包不包含原点, 那么 Σ 是一个异常曲面 (exceptional surface)。含有异常曲面的物体是不能通过无摩擦点接触对其抓取的。空间球面以及平面上的圆即为异常曲面。

对于非异常曲面, 根据凸分析中的两个经典定理, 可确定实现力封闭抓取所需接触数目的上下限。

定理 5.4 (Caratheodory)

如果集合 $X = \{v_1, \dots, v_k\}$ 正张成空间 $\mathbb{R}^p$, 则 $k \geq p+1$ 。

定理 5.5 (Steinitz)

如果 $S \subset \mathbb{R}^p$, $q \in \text{int}(\text{co}S)$, 那么一定存在集合 $X = \{v_1, \dots, v_k\} \subset S$, 使得 $q \in \text{int}(\text{co}X)$, $k \leq 2p$ 。

Caratheodory 定理说明, 如果一个曲面能用力封闭方式抓取, 那么必须至少有 $(p+1)$ 个接触。对于图 5.11 所示平面情况这一点很容易看出。当 $p=2$ 时, Caratheodory 定理认为正张成二维空间的矢量的任意集合至少有三个元素。假如任选图中的两个矢量, 并记为 v_i 和 v_j , 那么 $-(v_i + v_j)$ 将不包含在由 v_i 和 v_j 正张成的空间内。对于 $p>2$ 的情况结论与之相似。当然, 矢量集合多于 $(p+1)$ 个元素时仍不能正张成 $\mathbb{R}^p$ 。例如, 图 5.11a 的 $\{v_1, v_2, v_3\}$ 就不能正张成 $\mathbb{R}^2$ 空间。

Steinitz 定理给出了所需最少接触数的上界。设 $S = \Lambda(\Sigma)$, 并取 $q=0$, 如果抓取是力封闭的, 那么 $0 \in \text{int}(S)$, 并且由 Steinitz 定理可知存在构成力封闭抓取的 $2p$ 个矢量 $v_1, \dots, v_{2p} \in \Lambda(\Sigma)$ 。因此, Steinitz 定理说明抓取任一非异常曲面最多需要 $2p$ 个接触。这 $2p$ 个矢量并不唯一, 图 5.11b 和 5.11c 表明张成 $\mathbb{R}^2$ 空间的 4 个矢量的两种选择。注意图 5.11c

中 v_3 是多余的, 但图 5.11b 中的所有矢量都是张成 $\mathcal{R}^2$ 所必须的。

Caratheodory 定理和 Steinitz 定理可用于确定无摩擦点接触时构成力封闭抓取所需接触

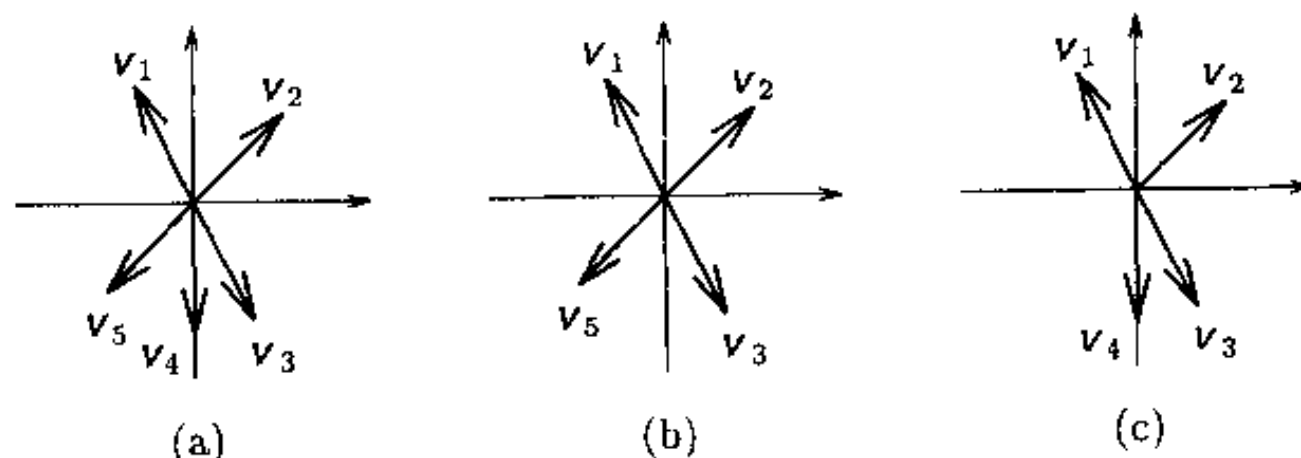


图 5.11 正张成二维空间的矢量集合

点的数目。若设 p 为力螺旋空间的维数, k 为接触数, 那么

$$p = 3(\text{平面}) \Rightarrow 4 \leq k \leq 6$$

$$p = 6(\text{空间}) \Rightarrow 7 \leq k \leq 12$$

由此可得平面 ($p=3$) 情况下所有非异常曲面的接触数范围。对于空间 ($p=6$) 情况, 特殊类型物体的接触数范围是可以确定的, 但一般情况并不能。多面体和完全光滑体之类的物体可以通过至多 7 个接触点实现抓取。

对于更一般的接触类型, 接触点数也是可以确定的, 但此问题的详解说明已超出本书范围 (可参见 [67])。对于有摩擦的点接触情况, 可通过正四面体 (或平面时的等边三角形) 来说明接触数的范围, 并取 $\mu < \tan 19.5^\circ$ 。有关这方面的内容将在习题和下一节中讨论。

表 5.3 抓取物体所需手指数

空间	物体类型	下限	上限	无摩擦点接触	有摩擦点接触	软指
平面 ($p=3$)	异常曲面	4	6	n/a	3	3
	非异常曲面			4	3	3
空间 ($p=6$)	异常曲面	7	12	n/a	4	4
	非异常曲面			12	4	4
	多面体			7	4	4

表 5.3 给出了各种接触类型所需接触点的数目范围, 这些数目范围是对所列物体实现力封闭抓取所需接触数目的下限, 也即为实现对所列任一物体的力封闭抓取, 至少需要的接触点数。

4.2 构成力封闭抓取

对于平面物体在有摩擦两点接触情况下力封闭抓取的计算和构成问题, 本节将给出一种非常简便的方法。该算法基于以下定理。

定理 5.6 平面对心抓取^[83]

有摩擦两点接触平面抓取为力封闭的充分必要条件是: 两接触点连线位于两摩擦锥内部。

满足该定理条件的抓取称为对心抓取 (antipodal grasp)。该定理的证明留作习题。

为将该定理转化为抓取规划的算法, 可将该定理的条件写成一组线性不等式约束。设 n_1 、 n_2 分别为接触点 p_1 、 p_2 处的内法矢 (见图 5.12), 对于给定的单位矢量 n , 定义矢量 $n^\perp$ 与 n 正交且满足

$$n \otimes n^\perp = +1$$

式中 $\otimes$ 表示二维叉乘

$$a \otimes b = \det \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}^2$$

若物体为一多面体, 希望找出所有可能的力封闭抓取。接触点连线位于相应摩擦锥内部的约束可写为

$$A: (n_1 - \mu n_1^\perp) \otimes (p_2 - p_1) > 0$$

$$B: (n_1 + \mu n_1^\perp) \otimes (p_2 - p_1) < 0$$

$$C: (n_2 - \mu n_2^\perp) \otimes (p_1 - p_2) > 0$$

$$D: (n_2 + \mu n_2^\perp) \otimes (p_1 - p_2) < 0$$

对于给定的任意两个边, 绘出各不等式的边界线, 即可在图上表示出上述不等式。图 5.13 即为一例。

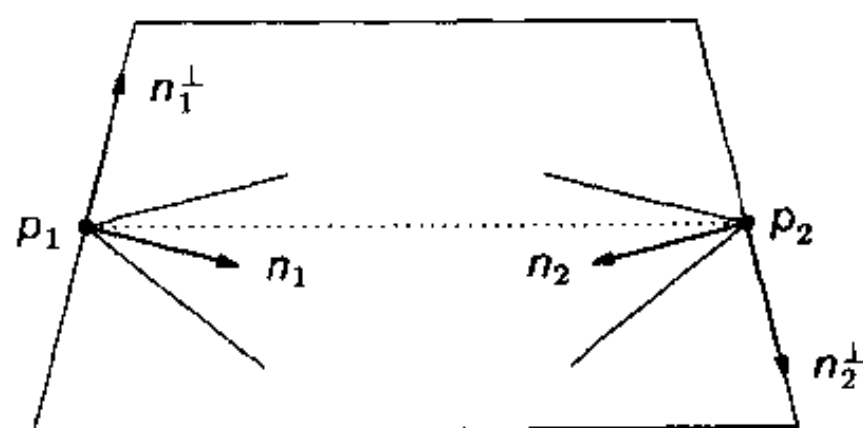


图 5.12 有摩擦两点接触二维力封闭抓取的几何关系

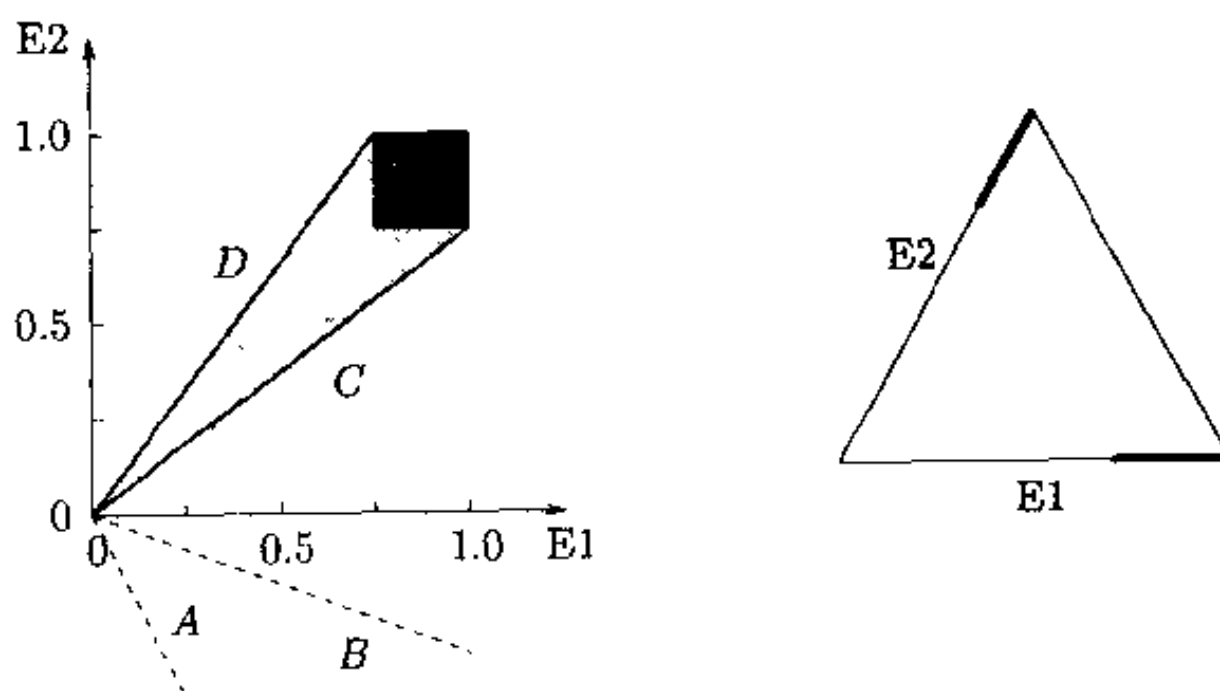


图 5.13 等边三角形的力封闭抓取

[浅阴影区域对应于所有力封闭抓取的集合, 深阴影正方形

(与三角形边上的深色段对应) 指明了最大的接触独立区域]

图 5.13 给出了任意两边间力封闭抓取的完整描述。通过任意两边的组合, 即可获得物体的所有可能力封闭抓取。力封闭抓取的选择有许多方法, 其中之一为: 首先给抓取定义一个度量指标, 然后选择使该指标为最大时的抓取, 并且还要是力封闭的。另一种可能性就是选择一个抓取, 以使力封闭区域内两边之间的距离最大, 这种抓取与使每一边的接触独立区域为最大的方法是等效的, 也就是说, 在每一边上可以找到使每一接触位于相应区域的力封闭抓取, 这样的区域对应于一个平面。

通过对定理 5.6 进行如下的变形, 可以将上述算法扩展到空间情况。

定理 5.7 空间对心抓取^[83]

两软指接触的空间抓取为力封闭当且仅当接触点连线位于两摩擦锥内。

可以将前面的绘图方法应用于曲面物体。此时,约束变成接触位置(经适当的参数化)的非线性函数。然而,如果有办法找到给定描述的零点,则该方法仍适用。

5 抓取约束

前面几节是在没有考虑手指运动学参数的情况下分析抓取运动学的,也就是说,假设能在接触点处施加力,而不管这些力是怎么产生的。本节将上述分析推广到机器人手指的运动学和静力学。

我们把抓取物体的机器人手看作是一个运动约束系统。为与前面内容相对应,仍假设物体上接触点的位置是固定的,此时物体与手指间的约束可表述为接触处速度相等。例如,在给定的接触点处,指端速度与物体上接触点的速度在曲面法线方向一定相等。为简便起见,本节均假设所有的接触都是有摩擦接触或是软指接触,由此假设接触位置固定。至于更一般的情况,将在下一节中予以讨论。

5.1 手指运动学

第三章用指数积公式推导了开链机器人的运动学正解关系,并把机器人末端执行器的空间速度写为

$$\mathbf{V}_s^s = \mathbf{J}_s^s(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\theta}}$$

式中 $\mathbf{J}_s^s(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ 为运动学正解函数的空间雅可比矩阵;运动螺旋 $\mathbf{V}_s^s$ 为工具坐标系的广义速度在固定基坐标系中的表示。工具坐标系的物体速度为

$$\mathbf{V}_{st}^b = \text{Ad}_{g_{st}}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{J}_s^s(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\theta}}$$

它是工具坐标系的瞬时速度在自身坐标系中的表示。

机器人手可以看作为固定于同一基座(手掌)上的多个机器人(手指)。在每一手指的根部固连坐标系 S_i ,在指端接触点处固连坐标系 F_i ,如图 5.14。其中 F_i 随指端一起运动,而位于接触点处的坐标系 C_i 随物体一起运动。若设 $\mathbf{J}_{s_{f_i}}^s$ 为 F_i 相对于固定坐标系 S_i 的雅可比矩阵,则有

$$\mathbf{V}_{s_{f_i}}^b = \text{Ad}_{g_{s_{f_i}}}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_{f_i}) \mathbf{J}_{s_{f_i}}^s(\boldsymbol{\theta}_{f_i}) \dot{\boldsymbol{\theta}}_{f_i} \quad (5.8)$$

式中 $\boldsymbol{\theta}_{f_i} \in \mathbb{R}^n$ 为第 i 个手指关节转角矢量。

手指的抓取约束给出了不允许运动的方向。相对于坐标系 C_i 的这些约束可认为是对手

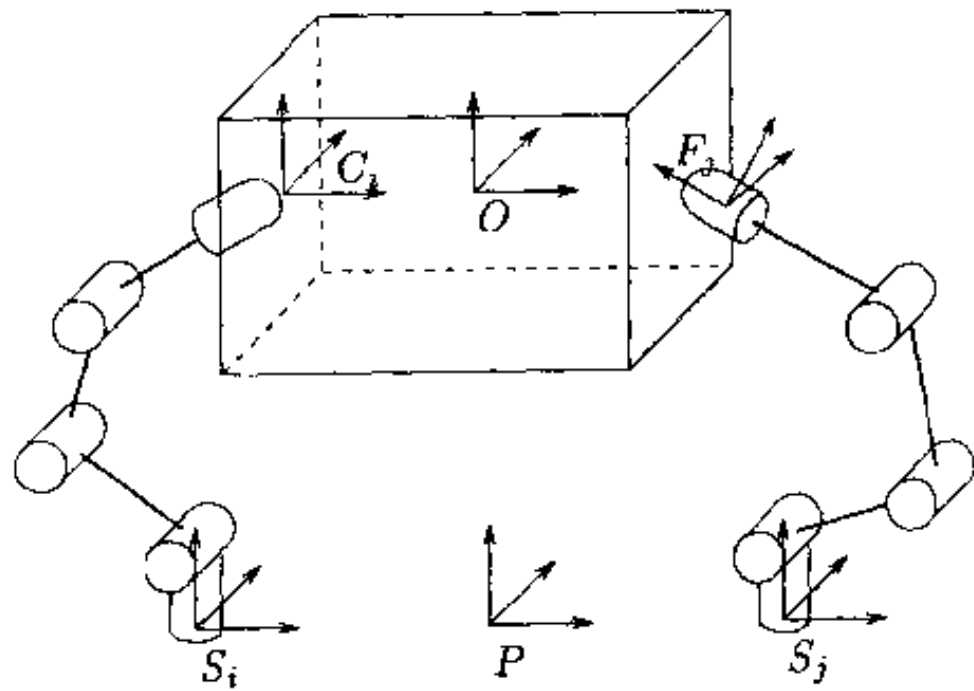


图 5.14 抓取坐标系

指坐标系 F_i 速度的约束。例如，无摩擦点接触即约束了手指和物体的速度，使这两个坐标系在曲面法线方向的相对速度为零。经转换后，曲面法线方向就是接触坐标系的 z 轴方向，因此可以将该约束写为

$$[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \mathbf{V}_{f_i}^b = 0$$

上式矩阵乘以 $\mathbf{V}_{f_i}^b$ 是对无摩擦点接触处力螺旋基的变换。

通常，运动受到约束的方向就是力所作用的方向。因此，对于力螺旋基为 $\mathbf{B}_i$ 的接触，应有

$$\mathbf{B}_i^T \mathbf{V}_{f_i}^b = 0 \quad (5.9)$$

式 (5.9) 限制了手指与物体之间正交于力作用方向的相对速度。

利用一组的已知量，即可具体写出式 (5.9)。因整个计算是利用物体速度来完成的，所以可暂时略去上标 b 。利用第二章第 4 节中的速度关系，可将 $\mathbf{V}_{f_i}^b$ 写为

$$\mathbf{V}_{f_i} = \text{Ad}_{g_{pi}}^{-1} \mathbf{V}_{p_i} + \mathbf{V}_{p_i} = -\text{Ad}_{g_{pi}}^{-1} \text{Ad}_{g_{pi}} \mathbf{V}_{pf_i} + \mathbf{V}_{p_i} \quad (5.10)$$

式中 $\mathbf{V}_{p_i}$ 为指端相对于手掌坐标系的速度。由于手指根坐标系相对于手掌坐标系是固定的，因此有

$$\mathbf{V}_{pf_i} = \text{Ad}_{g_{f_i}}^{-1} \mathbf{V}_{p_i} + \mathbf{V}_{s_{f_i}} = \mathbf{V}_{s_{f_i}} \quad (5.11)$$

因 $\mathbf{V}_{p_i}$ 可表示为手掌相对于物体的速度与物体相对于接触点速度之和，而接触坐标系相对于物体坐标系是固定的（根据固定接触假设），所以有

$$\mathbf{V}_{p_i} = \text{Ad}_{g_{oi}}^{-1} \mathbf{V}_{po} + \mathbf{V}_{oc_i} = \text{Ad}_{g_{oi}}^{-1} \mathbf{V}_{po} \quad (5.12)$$

将式 (5.11) 和式 (5.12) 代入式 (5.10)，有

$$\mathbf{V}_{f_i} = -\text{Ad}_{g_{pi}}^{-1} \text{Ad}_{g_{pf_i}} \mathbf{V}_{s_{f_i}} + \text{Ad}_{g_{oi}}^{-1} \mathbf{V}_{po}$$

现将上式代入约束方程，并利用手指运动学关系，可得

$$\mathbf{B}_i^T (\text{Ad}_{g_{pi}}^{-1} \text{Ad}_{g_{pf_i}} \text{Ad}_{g_{s_{f_i}}}^{-1}) \mathbf{J}_{s_{f_i}}^s \dot{\boldsymbol{\theta}}_{f_i} = \mathbf{B}_i^T \text{Ad}_{g_{oi}}^{-1} \mathbf{V}_{po}$$

上式是以手指关节转角 $\boldsymbol{\theta}$ 和物体位形 g_{po} 来表示第 i 个手指的接触约束。

利用伴随方程将上述约束方程加以简化

$$\text{Ad}_{g_{pi}}^{-1} \text{Ad}_{g_{pf_i}} \text{Ad}_{g_{s_{f_i}}}^{-1} = (\text{Ad}_{g_{s_{f_i}}} \text{Ad}_{g_{po}} \text{Ad}_{g_{oi}})^{-1} = \text{Ad}_{g_{s_{f_i}}}^{-1}$$

经代换，第 i 个手指的约束成为

$$\mathbf{B}_i^T \text{Ad}_{g_{s_{f_i}}}^{-1} \mathbf{J}_{s_{f_i}}^s(\boldsymbol{\theta}_{f_i}) \dot{\boldsymbol{\theta}}_{f_i} = (\text{Ad}_{g_{oi}}^{-1} \mathbf{B}_i)^T \mathbf{V}_{po} = \mathbf{G}_i^T \mathbf{V}_{po} \quad (5.13)$$

将每一手指对应的式 (5.13) 加以组合，可以将约束表示成矩阵形式。设 k 为手指数目， n_i 为第 i 个手指的自由度数，并有 $n = n_1 + \cdots + n_k$ 。将手的雅可比矩阵定义为 $\mathbf{J}_h(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ，具体如下

$$\mathbf{J}_h(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^T \text{Ad}_{g_{s_{f_1}}}^{-1} \mathbf{J}_{s_{f_1}}^s(\boldsymbol{\theta}_{f_1}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{B}_k^T \text{Ad}_{g_{s_{f_k}}}^{-1} \mathbf{J}_{s_{f_k}}^s(\boldsymbol{\theta}_{f_k}) \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

其中 $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_{f_1}, \cdots, \boldsymbol{\theta}_{f_k}) \in \mathbb{R}^n$ 。而式 (5.13) 所描述的约束具有以下形式

$$\boxed{J_h(\theta, x_0)\dot{\theta} = G^T V_{po}^b} \quad (5.15)$$

式中 $x_0 := g_{po}$ 表示物体的位形, θ 为所有手指的关节转角。式 (5.15) 是基本抓取约束 (fundamental grasping constraint), 它建立了手指速度与物体速度间的关系。这些约束和对抓取摩擦锥的描述提供了建立固定接触抓取模型所必要的信息。

尽管已从力学的角度导出了抓取约束, 但用一个简洁且有意义的方式来解释式 (5.15) 也是可能的。式 (5.15) 表示在接触处物体速度与指端速度相等。既然某些方向的运动是允许的 (例如绕接触点的转动), 那么可以仅约束 B_i 的列所表示的方向。式 (5.15) 仅仅是式 (5.9) 的改写, 但式 (5.15) 的形式更为有用。

J_h 、 G 和 FC 完全反映了手指抓取物体的特性。由此引出如下定义。

定义 5.4 多指抓取的描述

多指抓取可以用手的雅可比矩阵 $J_h(\theta, x_0): \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^m$, 抓取映射 $G: \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}^p$ 和满足定义 5.1 条件的摩擦锥 $FC \subset \mathcal{R}^m$ 来描述。

严格地说, 应对抓取和多指抓取加以区别, 其中抓取仅是物体和接触位置的描述, 而多指抓取还包括手指运动学的描述。当上下文意义明确时, 我们都用抓取一词。

5.2 多指抓取的性质

现在研究式 (5.15) 中抓取约束的数学特性, 并对其含义作出解释。在本章前面部分, 已经发现抓取的力封闭特性可以用抓取映射 G 和摩擦锥 FC 来表征。在研究力封闭特性时, 假设手指可以施加所有可能的接触力, 下面详细研究在什么条件下该假设是正确的, 在什么条件下该假设不成立。

多指抓取的基本特性是机器人手指能实现物体的运动。如果一组手指能实现物体的任意运动而不脱离接触, 则这种抓取称为是可操作的。

定义 5.5 可操作抓取

在位形 (θ, x_0) 处, 如果对于物体的任意运动 V_{po}^b , 都存在满足式 (5.15) 的 $\dot{\theta}$, 则称该多指抓取是可操作的 (manipulable)。

由该定义可得如下定理。

定理 5.8 所有可操作抓取的性质

位形 (θ, x_0) 处的抓取是可操作的当且仅当

$$R(G^T) \subset R(J_h(\theta, x_0))$$

可操作性并不要求矩阵 J_h 单射 (一对一)。当 J_h 的列数大于行数 ($n > m$) 且为行满秩, 从而存在一个非平凡的 (non-trivial) 零空间时, 对应于给定的物体运动, 可以存在多种手指运动。如果任意关节速度 $\dot{\theta}_N \in N(J_h)$ 都不产生接触点的运动, 则称 $\dot{\theta}_N$ 为内部运动 (internal motion)。对手指速度增加内部运动并不会改变被抓物体的速度, 这样手指——物体系就成为有冗余自由度的机器人。应注意的是, 由于手的雅可比矩阵中 B_i 项的影响, 即使每个手指都不是冗余的, 仍会存在这种运动冗余度。由此隐含了不破坏接触约束方向上的关节速度, 也即在这些方向上允许存在内部运动。

式 (5.15) 建立了物体和手指之间的速度关系, 我们还要用到力的关系。如第二节所述, 抓取映射给出了接触力和物体力螺旋之间的关系

$$F_0 = Gf_c$$

利用手的雅可比矩阵的转置, 可以建立接触力与关节力矩之间的关系

$$\tau = J_h^T f_c \quad (5.16)$$

(令关节力矩所作之功与接触力所做之功相等即得上式)。由抓取映射的推导可知, 为避免滑动, 接触力必须位于摩擦锥 FC 内。多指抓取中力与速度的所有关系可概括为图 5.15。

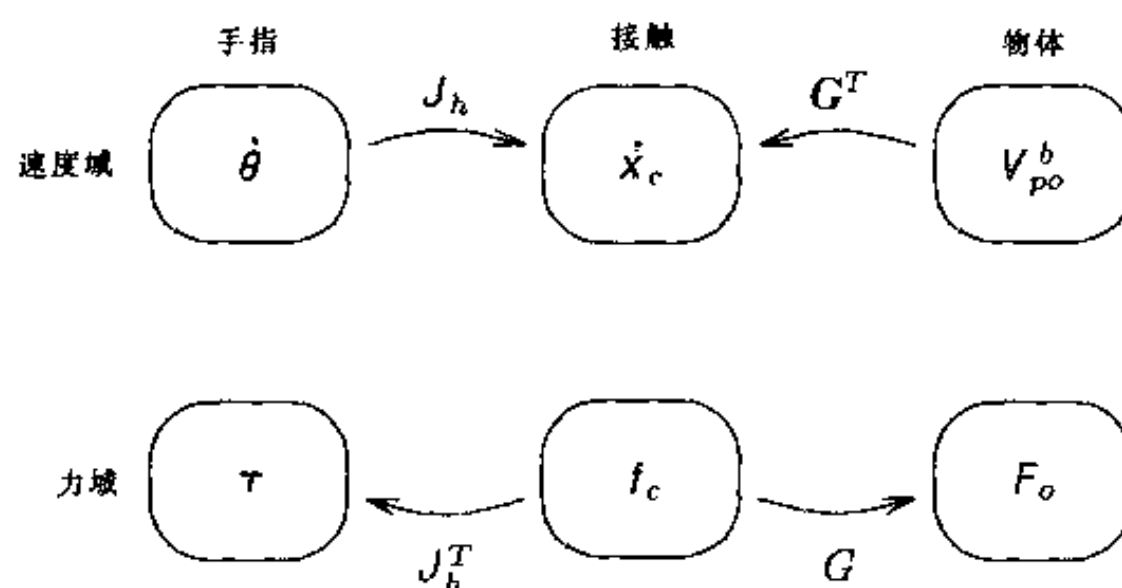


图 5.15 多指抓取的关系图

[为保证这些关系成立, 接触力必须满足 $f_c \in FC$]

如第三章所述, 当 $J_h \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 不是方阵时, 对式 (5.16) 的理解必须引起注意。如果抓取是可操作的且是力封闭的, 那么 J_h 在 G^T 域内是满射的。此时总能施加一个给定的接触力, 但是所需关节力矩不唯一。如果存在内部运动, 则必须考虑机器人的动力学, 详见下一章的讨论。

如果一个抓取是不可操作的, 那么是不可能施加任意接触力的。这种情况下 J_h^T 将存在一个非平凡的零空间, 从而存在使式 (5.16) 中的 $\tau = 0$ 的接触力 f_c , 这与关节自由度数小于工作空间维数的开链机器人的情况完全类似。特别地, 称位于 J_h^T 的零空间的接触力为结构相关力 (structurally dependent forces), 因为如果没有机构弹性特性方面的进一步信息, 就不能确定结构相关力在机构中所产生的力。

表 5.4 抓取性质

特 性	定 义	描 述
力封闭性	能抵抗施加的任意力螺旋	$G(FC) = \mathbb{R}^p$
可操作性	能实现物体的任意运动	$R(G^T) \subset R(J_h)$
内力	不产生纯物体力螺旋的接触力 f_N	$f_N \in N(G) \cap \text{int}(FC)$
内部运动	不产生物体运动的手指运动 $\dot{\theta}_N$	$\dot{\theta}_N \in N(J_h)$
结构力	不产生纯关节力矩的物体力螺旋 F_I	$G^T F_I \in N(J_h^T)$

如前所述, 抓取特性可以用抓取映射 G 、手的雅可比矩阵 J_h 和摩擦锥 FC 来表征。抓取的这些性质总结在表 5.4 中。需注意的是, 力封闭性和可操作性是抓取的两个独立特性。

对于一个抓取，它可能是力封闭的但不是可操作的，或者是可操作的但不是力封闭的，甚至既不是力封闭的也不是可操作的，此类实例见图 5.16。

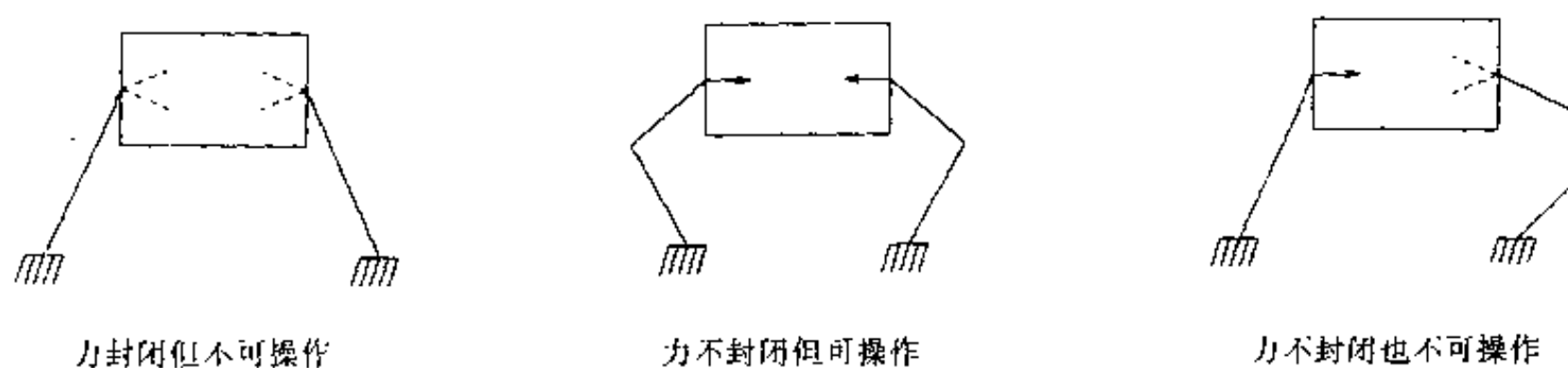


图 5.16 反映可操作性和力封闭性的抓取示例

5.3 实例：两个 SCARA 手指抓取盒子

作为如何进行计算的实例，考虑图 5.17 所示的抓取。在该实例中，用两个 SCARA 手指抓取一个盒子。假设接触点位置在物体坐标系中的表示为 $p_{c_i} = (0, \pm r, 0)$ ，并且每一个接触都是软指接触。

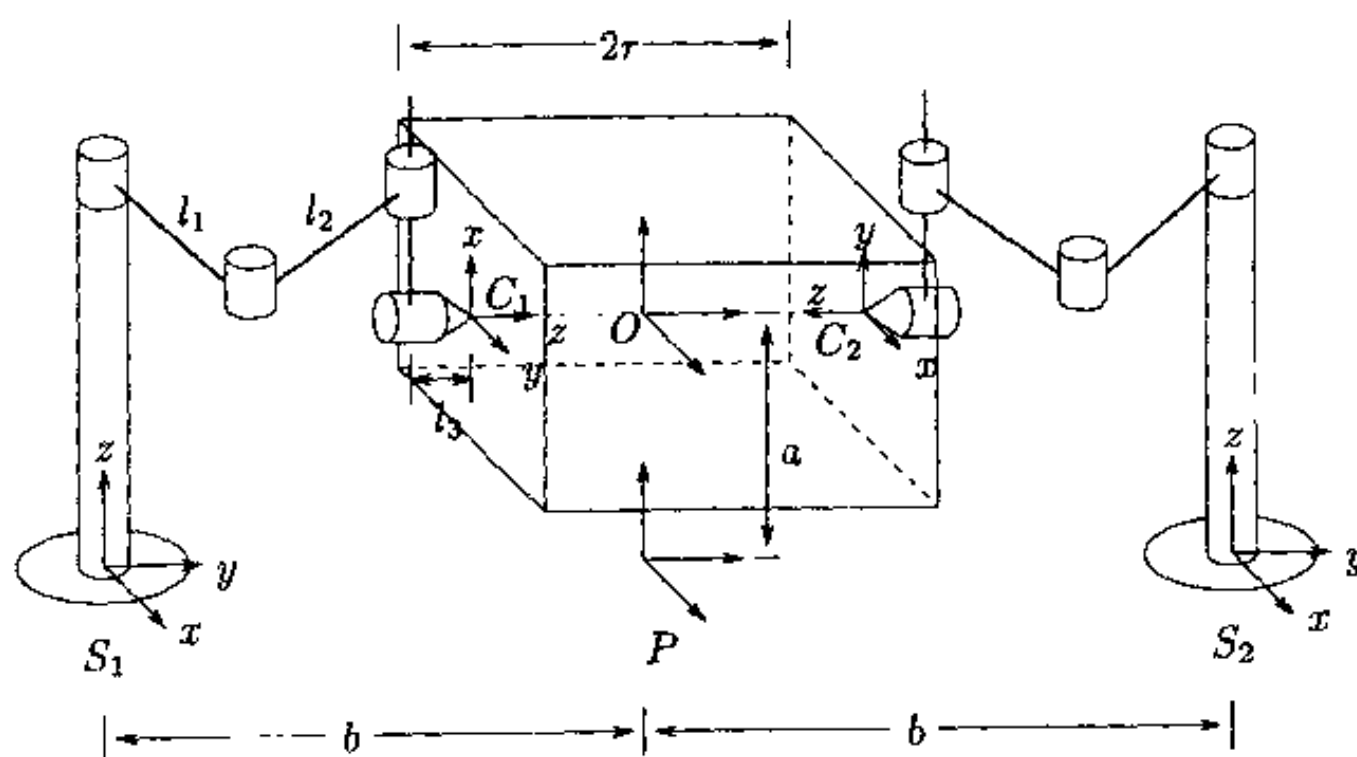


图 5.17 用 SCARA 机器人的两指抓取

用于描述抓取约束的大部分参数在前面已经计算过。例 5.2 推导的抓取映射为

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -r & 0 & 0 & 0 & 0 & +r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & +r & 0 & 0 & -r & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

基于图 5.5 所示的接触坐标系，每一手指的力螺旋基为

$$\mathbf{B}_{c_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

为简化起见, 取指端长度为 $l_3=0$, 即在 SCARA 的末端执行器处发生接触。此时的雅可比矩阵为 (见例 3.8)

$$\mathbf{J}_{s_{f_i}}^s = \begin{bmatrix} 0 & l_1 c_1 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} & 0 \\ 0 & l_1 s_1 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

如果 $l_3 \neq 0$, 那么必须重新计算雅可比矩阵以考虑额外的位移 (见习题 11)。

剩下仅仅是将运动螺旋由空间坐标系映射到给定手指接触坐标系的 $\text{Ad}_{g_{s_{f_i}}}^{-1}$ 的计算。为此可利用如下变换来构造 $\text{Ad}_{g_{s_{f_i}}}^{-1}$

$$g_{s_{f_i}}^{-1} = (g_{s_p} g_{p_0} g_{\alpha_i})^{-1} = g_{\alpha_i}^{-1} g_{p_0}^{-1} g_{s_p}^{-1}$$

由于变换 g_{α_i} 和 g_{s_p} 恒定, 所以有

$$\text{Ad}_{g_{s_{f_i}}}^{-1} = \text{Ad}_{g_{\alpha_i}}^{-1} \text{Ad}_{g_{p_0}}^{-1} \text{Ad}_{g_{s_p}}^{-1}$$

须注意只有 $\text{Ad}_{g_{p_0}}^{-1}$ 依赖于物体的当前位形 $x_0 = g_{p_0}$, 而其他变换都是定常矩阵。

为构造抓取约束, 可用适当的方式构造上述矩阵。总之, 接触约束是十分复杂的, 其计算更适合于计算机来完成, 而不能靠人工来计算。因此, 我们的工作仅限于对图 5.17 所示物体位形抓取约束的分析。也即, 令

$$\mathbf{R}_{p_0} = \mathbf{I} \quad \mathbf{p}_{p_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$$

因此 $\text{Ad}_{g_{s_{f_i}}}^{-1}$ 变成了定常矩阵。运用变换 $g_{s_{f_i}}$, 并通过观察可得

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{s_{f_i}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{p}_{s_{f_i}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ b-r \\ a \end{bmatrix} \end{aligned} \Rightarrow \text{Ad}_{g_{s_{f_i}}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{s_{f_i}}^T \begin{bmatrix} b-r & 0 & 0 \\ 0 & a & r-b \\ -a & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 0 & \mathbf{R}_{s_{f_i}}^T \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{s_2c_2} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{p}_{s_2c_2} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -b+r \\ a \end{bmatrix} \end{aligned} \Rightarrow \text{Ad}_{g_{2,2}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{s_2c_2}^T \begin{bmatrix} 0 & a & b-r \\ r-b & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 0 & \mathbf{R}_{s_2c_2}^T \end{bmatrix}$$

最后, 计算 $\mathbf{J}_h$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_h &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{c_1}^T \text{Ad}_{g_{1,1}}^{-1} \mathbf{J}_{s_1f_1}^s(\boldsymbol{\theta}_{f_1}) & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_{c_2}^T \text{Ad}_{g_{2,2}}^{-1} \mathbf{J}_{s_2f_2}^s(\boldsymbol{\theta}_{f_2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_{22} \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -b+r & -b+r+l_1c_1 & -b+r+l_1c_1+l_2c_{12} & 0 \\ 0 & l_1s_1 & l_1s_1+l_2s_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_{22} &= \begin{bmatrix} b-r & b-r+l_3c_3 & b-r+l_3c_3+l_4c_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -l_3s_3 & -l_3s_3-l_4s_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(针对图 5.17 所示特殊位形)。

下面对抓取性质作一总结。由例 5.2 可知这种抓取是力封闭的 (这并不依赖于实际施加力的手指), 但并不是可操作的。因为物体绕 y 轴的旋转将导致

$$\mathbf{G}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \notin \mathbf{R}(\mathbf{J}_h)$$

该抓取在图示位形处包含位于下列矢量所张成的矢量空间的内部运动

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{N_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dot{\boldsymbol{\theta}}_{N_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

这些由每一手指末端关节旋转而引起的内部运动, 将导致指端在接触点处的转动。对于 l_3

$\neq 0$ 且手处于任意位形的一般情况, 内部运动仍然存在, 但三个转动关节均具有非零的瞬时速度。

6 滚动接触运动学

实际情况下, 绝大多数的抓取并不是属于固定接触, 而是在接触处存在运动。人类的手指和许多机器人的手指实际上是一些曲面, 手指在对物体进行操作时存在手指在物体表面上的滚动。本节将推导一个物体在另一个物体上滚动的运动学方程, 并把有关抓取公式推广到运动接触中。这里所得到的公式适用于光滑手指与光滑物体之间的滚动情形, 它不适用于手指在物体棱边上的滚动情况, 但对这种情况再作一些扩展也是可用的。下面对曲面的参数表示作一简单说明。

6.1 曲面模型

对于在 $\mathbb{R}^3$ 中给定的物体, 可用如图 5.18 所示的局部坐标图 (local coordinate charts) $c: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 来描述物体的曲面形状, 其中 c 是将点 $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ 变换到物体表面上的一点 $x \in \mathbb{R}^3$ (在物体坐标系 O 中表示) 的映射。这样即可利用坐标 (u, v) 来局部表示曲面上的一点。通常, 需要用几个坐标图来完全描述一个物体的曲面。对于曲面 S , 如果对于其上每一点 $p \in S$, 都存在满足下列条件的一个邻域 $V \subset \mathbb{R}^3$, 一个开集 $U \subset \mathbb{R}^2$ 和一个映射 $c: U \rightarrow V \cap S$, 则称 S 是正则 (regular) 曲面:

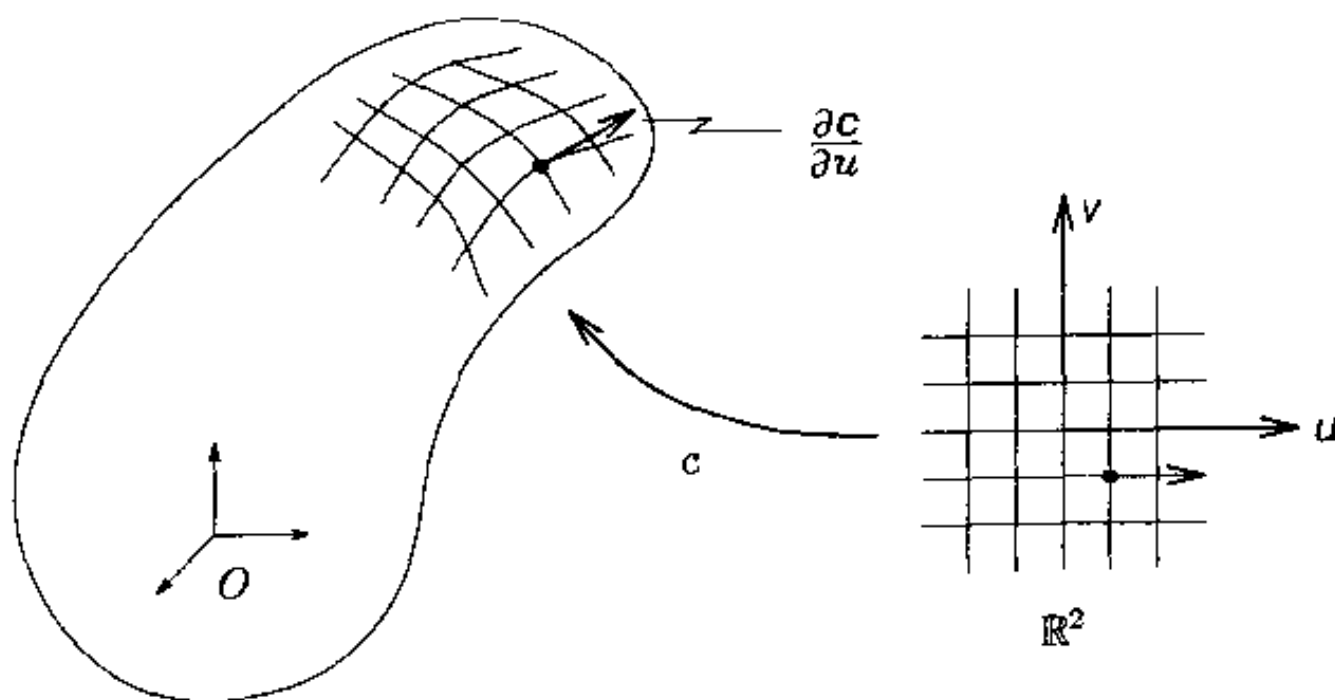


图 5.18 两维物体在 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面图

- 1) c 是可微的;
- 2) c 是从 U 到 $V \cap S$ 上的同胚, 也就是说, c 是连续的, 双射的 (一一对应的), 且存在连续的逆;

3) 对于任一 $\alpha = (u, v) \in U$, 映射 $\frac{\partial c}{\partial \alpha}(\alpha): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是单射的 (一一对应的)。

在物体上的任意点处, 定义一个由物体表面在该点的所有切矢量所构成的切平面, 该切

平面由矢量 $\mathbf{c}_u := \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial u}$ 和 $\mathbf{c}_v := \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial v}$ 张成, 也就是说, 点 $\mathbf{c}(u, v)$ 处与曲面相切的任意矢量均可表示为矢量 $\mathbf{c}_u$ 和 $\mathbf{c}_v$ 的线性组合。如果 $\mathbf{c}_u$ 和 $\mathbf{c}_v$ 是正交的, 那么此坐标图就是正交坐标图 (orthogonal coordinate chart)。

定理 5.9 所有正则曲面, 总存在一个局部正交坐标图

微分几何的任何教科书中都有关于该定理的证明。

本章的后续内容将会频繁地应用一些有关微分几何的具体概念。虽然在运用滚动方程时并不要求这些概念的知识, 但确实有必要对这些概念有更深入的理解。在此, 仅对其相关内容作一简短概述。全面的描述可参阅 DoCarmo^[27]。

为定义曲面的面积, 必须定义曲面上两切矢量的内积, 由此定义平行四边形的面积, 这样曲面的总面积就可通过对分割曲面的平行四边形微面积的积分求得。曲面的第一基本型反映了两切矢量的内积与 $\mathbb{R}^3$ 上的自然内积的关系。在局部坐标图中, 曲面的第一基本型可用点 $\mathbf{p} = \mathbf{c}(u, v)$ 处两个切矢量并取其内积的一个二次型 $\mathbf{I}_p: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 来表示。如果 $\mathbf{c}$ 是局部参数, 那么二次型可以表示为如下矩阵形式

$$\mathbf{I}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_u^T \mathbf{c}_u & \mathbf{c}_u^T \mathbf{c}_v \\ \mathbf{c}_v^T \mathbf{c}_u & \mathbf{c}_v^T \mathbf{c}_v \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

这里用符号 $\mathbf{I}_p$ 来表示二次型及其矩阵表示。注意 $\mathbf{I}_p$ 的每个元素都是 $\mathbb{R}^3$ 上矢量的内积, 并且 $\mathbf{I}_p$ 是对称和正定的。如果参数是正交的, 那么其对角线元素为非零的。

第一基本型可用于定义曲面的度量张量 (metric tensor)。度量张量由第一基本型的平方根给出, 可用于切矢量的规范化。定义 $\mathbf{M}_p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 为满足下式的正定矩阵

$$\mathbf{I}_p = \mathbf{M}_p \cdot \mathbf{M}_p$$

对于参数是正交的情况, $\mathbf{M}_p$ 的形式为

$$\mathbf{M}_p = \begin{bmatrix} \|\mathbf{c}_u\| & 0 \\ 0 & \|\mathbf{c}_v\| \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

(这里所述的度量张量是微分几何中黎曼度量的平方根。)

对于曲面 S 上的任一点, 可以用切平面内两个矢量的叉积来定义一个指向曲面外侧的单位外法矢。把 $\mathbb{R}^3$ 中的所有单位矢量的集合 (即 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球) 看作是 S^2 , Gauss 映射 $\mathbf{N}: S \rightarrow S^2$ 给出了曲面 S 上任一点处的单位法矢量, 以局部坐标表示的算式为

$$\mathbf{N}(u, v) = \frac{\mathbf{c}_u \times \mathbf{c}_v}{\|\mathbf{c}_u \times \mathbf{c}_v\|} \quad (5.19)$$

对于光滑有向曲面, Gauss 映射很好确定, 且是可微的映射。将曲面上一点处的单位法矢量记作 $\mathbf{n} = \mathbf{N}(u, v)$ 。

对 Gauss 映射直接求导即得曲面的第二基本型 (second fundamental form)。第二基本型用于度量曲面的曲率。在局部坐标图中, 第二基本型可用映射 $\mathbf{II}_p: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 来表示, 其矩阵形式为

$$\mathbf{II}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_u^T \mathbf{n}_u & \mathbf{c}_u^T \mathbf{n}_v \\ \mathbf{c}_v^T \mathbf{n}_u & \mathbf{c}_v^T \mathbf{n}_v \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

其中 $\mathbf{p} = \mathbf{c}(u, v)$, $\mathbf{n}_u := \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u}$, $\mathbf{n}_v := \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial v}$ 。该矩阵反映了法矢量在切平面上的变化率, 可

以解释如下：如果 $p(s) \in S$ 是位于 S 上的一条以弧长表示的曲线，其切矢量为 p' ，那么 $(p')^T \mathbf{II}_p p'$ 即确定了空间曲线 p 的曲率。

我们的目的是为了更方便地度量第二基本型，并定义曲面的曲率张量 (curvature tensor)。对于某一正交坐标系，曲率张量是映射 $K: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ，定义如下

$$K_p = M_p^{-T} \mathbf{II}_p M_p^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{c_u^T n_u}{\|c_u\|^2} & \frac{c_u^T n_v}{\|c_u\| \|c_v\|} \\ \frac{c_v^T n_u}{\|c_u\| \|c_v\|} & \frac{c_v^T n_v}{\|c_v\|^2} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

式中 M_p^{-1} 的因子是规范化因子，用于在局部坐标图中度量曲面。

曲率张量可以依据规范化 Gauss 坐标系来计算。如果 $c(u, v)$ 是一个正交图，那么规范化 Gauss 坐标系可以定义为

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_u}{\|c_u\|} & \frac{c_v}{\|c_v\|} & n \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

规范化 Gauss 坐标系为曲面上任一点提供了一个正交坐标系。在此坐标系中，曲率张量可表示为

$$K_p = \begin{bmatrix} x^T \\ y^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{n_u}{\|c_u\|} & \frac{n_v}{\|c_v\|} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

上式可理解为单位法向量在切平面内的变化率。若曲面是一个平面，则 $n_u = n_v = 0$ ，从而 $K_p = 0$ 。

最后定义挠率 (torsion) 公式。对于一条曲线，挠率反映了曲率沿曲线的变化率。曲面的挠率是衡量 Gauss 坐标系沿曲面运动时在切平面内的扭转率。为计算挠率，只需注意 x 或 y 的变化情况，因为它们正交的。将挠率 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$T_p = y^T \begin{bmatrix} \frac{x_u}{\|c_u\|} & \frac{x_v}{\|c_v\|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_v^T c_{uu}}{\|c_u\|^2 \|c_v\|} & -\frac{c_v^T c_{uv}}{\|c_u\| \|c_v\|^2} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

其中 x_u 、 x_v 分别为 x 关于 u 和 v 的偏导数， $c_{uu} = \frac{\partial^2 c}{\partial u^2}$ ， $c_{uv} = \frac{\partial^2 c}{\partial u \partial v}$ 。应注意挠率是用行矢量来表示的，而不是矩阵。挠率与曲面参数化法 Christoffel 符号有关 (参见 [27])。如果曲面是平面，则 $T_p = 0$ 。

对于给定的某个参数化表示法， (M_p, K_p, T_p) 的组合称为曲面的几何参数。这些参

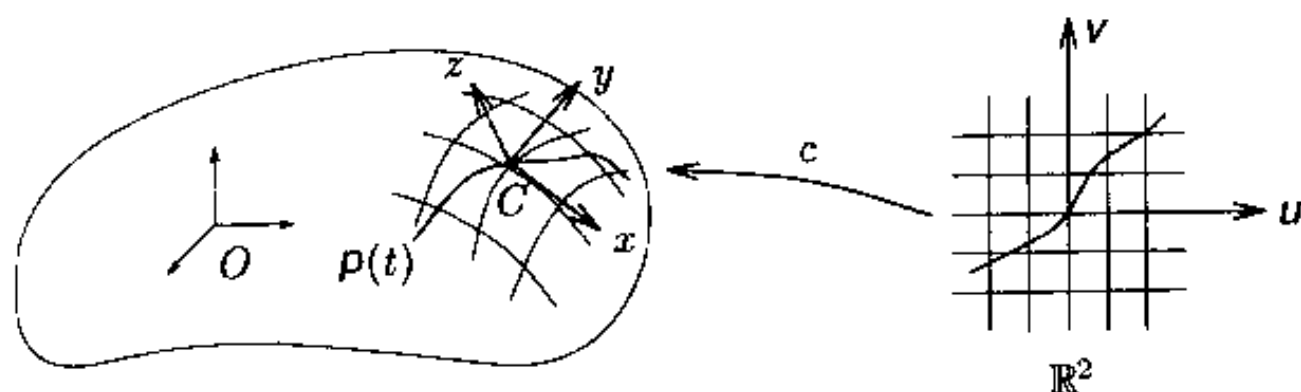


图 5.19 接触坐标系是一个沿曲线 $p(t)$ 运动的坐标系

数描述了曲面的局部几何特征,并在下一节的接触运动学中起着重要的作用。

设 $p(t) \in S$ 是物体表面上的一条曲线,并将沿曲线的接触坐标系 C 定义为在 t 时刻与 Gauss 坐标系相一致 (见图 5.19)[⊖]。我们希望接触坐标系的运动能表示为曲线的几何参数和速度的函数。如果在物体上固定一个坐标系 O ,则坐标系 C 的运动就可用刚体变换 $g_\alpha(t) \in SE(3)$ 来确定。假设 $p(t)$ 位于单坐标图 $c:U \rightarrow \mathbb{R}^3$ 内,且设 $\alpha(t) = c^{-1}(p(t))$ 为局部坐标。

引理 5.10 接触坐标系的诱导速度

接触坐标系 C 相对于物体上的参考坐标系 O 的物体速度由 $V_\alpha^b = (v_\alpha, \omega_\alpha)$ 确定,其中

$$v_\alpha = \begin{bmatrix} M\dot{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

$$\hat{\omega}_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -TM\dot{\alpha} & KM\dot{\alpha} \\ TM\dot{\alpha} & 0 & \\ -(KM\dot{\alpha})^T & & 0 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

M, K, T 都是相对于坐标图 (c, U) 的曲面几何参数。

证明:接触坐标系相对于参考坐标系的位置和姿态为

$$p_\alpha = p(t) = c(\alpha(t))$$

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_u}{\|c_u\|} & \frac{c_v}{\|c_v\|} & \frac{c_u \times c_v}{\|c_u \times c_v\|} \end{bmatrix}$$

物体速度中的移动分量为 $v_\alpha = R_\alpha^T \dot{p}_\alpha$, 由此可得

$$v_\alpha = \begin{bmatrix} x^T \\ y^T \\ z^T \end{bmatrix} \frac{\partial c}{\partial \alpha} \dot{\alpha} = \begin{bmatrix} x^T c_u & x^T c_v \\ y^T c_u & y^T c_v \\ z^T c_u & z^T c_v \end{bmatrix} \dot{\alpha} = \begin{bmatrix} M\dot{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix}$$

为说明式 (5.26), 先计算物体角速度

$$\hat{\omega}_\alpha = R_\alpha^T \dot{R}_\alpha = \begin{bmatrix} x^T \\ y^T \\ z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x^T \dot{y} & x^T \dot{z} \\ y^T \dot{x} & 0 & y^T \dot{z} \\ z^T \dot{x} & z^T \dot{y} & 0 \end{bmatrix}$$

其中的零项是由于 x, y 和 z 为单位矢量。根据 K, T, M 的定义, 可得

$$\hat{\omega}_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -TM\dot{\alpha} & KM\dot{\alpha} \\ TM\dot{\alpha} & 0 & \\ -(KM\dot{\alpha})^T & & 0 \end{bmatrix}$$

例 5.6 三维空间球的几何参数

利用球坐标可得半径为 ρ 的球的坐标图, 如图 5.20 所示。对于以 x 轴为中心线的半球, 有

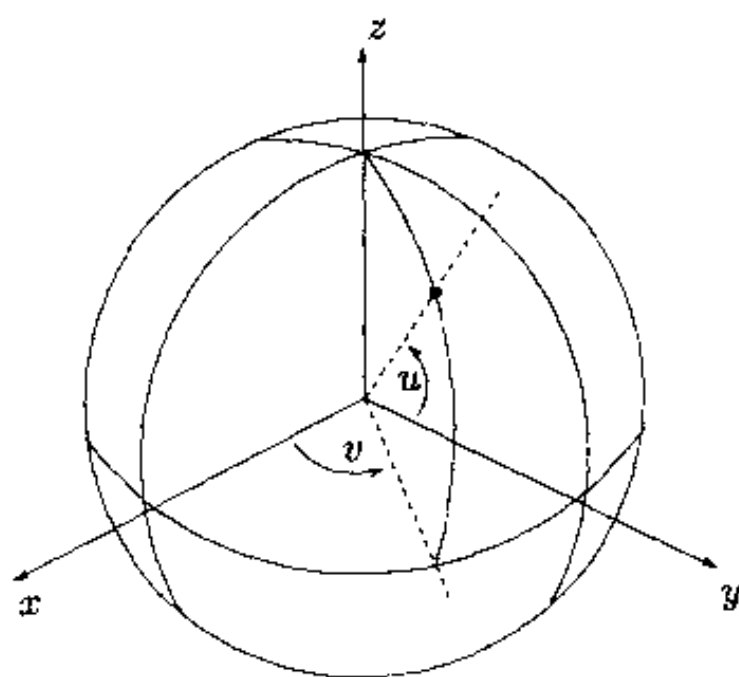


图 5.20 球面的球坐标图

⊖ 这里与前述取 z 轴为内法矢方向不同。

$$c(u, v) = \begin{bmatrix} \rho \cos u \cos v \\ \rho \cos u \sin v \\ \rho \sin u \end{bmatrix}$$

其中

$$U = \{(u, v) : -\pi/2 < u < \pi/2, -\pi < v < \pi\}$$

c 关于 u 和 v 的偏导数为

$$c_u = \begin{bmatrix} -\rho \sin u \cos v \\ -\rho \sin u \sin v \\ \rho \cos u \end{bmatrix} \quad c_v = \begin{bmatrix} -\rho \cos u \sin v \\ \rho \cos u \cos v \\ 0 \end{bmatrix}$$

由此可以看出 $c_u^T c_v = 0$, 因此该坐标图是正交的。其曲率、挠率和度量张量分别为

$$K = \begin{bmatrix} 1/\rho & 0 \\ 0 & 1/\rho \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \cos u \end{bmatrix} \quad T = [0 \quad -1/\rho \tan u]$$

6.2 接触运动学

如图 5.21 所示, 考虑曲面分别为 S_o 和 S_f 的两物体在一点的接触运动。我们感兴趣的是两物体的相对运动所产生的接触点在物体表面上的运动情况。

设 $p_o(t) \in S_o$ 和 $p_f(t) \in S_f$ 为 t 时刻接触点分别相对于两物体坐标系 O 和 F 的位置。为简化起见, 我们的讨论仅限于每一物体在单一坐标图中运动的情况。设 (c_o, U_o) 和 (c_f, U_f) 为两曲面的坐标图, $\alpha_o = c_o^{-1}(p_o) \in U_o$ 和 $\alpha_f = c_f^{-1}(p_f) \in U_f$ 为局部坐标。假设 c_o 和 c_f 为曲面的正交表示。接触角 Ψ 取为两切矢量 $\frac{\partial c_f}{\partial u_f}$ 和 $\frac{\partial c_o}{\partial u_o}$ 之间的夹角, Ψ 符号的选择应符合 $\frac{\partial c_o}{\partial u_o}$ 绕 S_o 的外法矢旋转 Ψ 角后与 $\frac{\partial c_f}{\partial u_f}$ 重合 (见图 5.21)。把所有描述接触的参数加以组合, 称 $\eta = (\alpha_f, \alpha_o, \Psi)$ 为 S_f 和 S_o 的接触坐标。

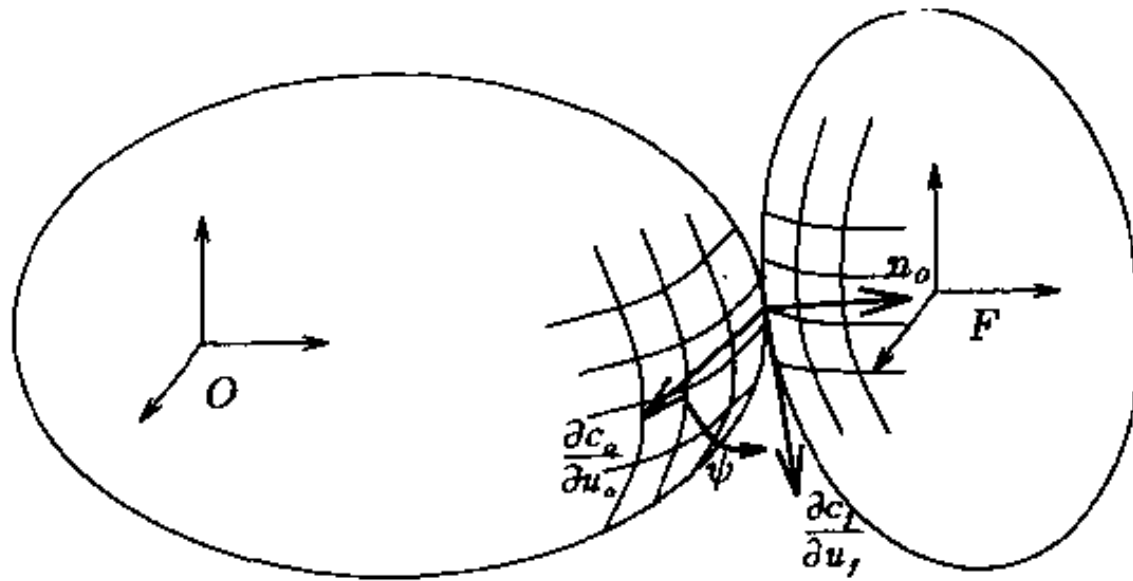


图 5.21 相互接触两物体的运动

设 $g_{of} \in SE(3)$ 表示 S_f 相对于 S_o 的位置和姿态。我们希望研究 g_{of} 与局部接触坐标系之间的关系。为此, 假设 $g_{of} \in W \subset SE(3)$, 其中 W 是两物体保持接触的所有相对位置和姿态的集合。

由坐标图 (c_0, U_0) 和 (c_f, U_f) 可导出 $c_0(U_0) \subset S_0$ 和 $c_f(U_f) \subset S_f$ 中所有点的规范化 Gauss 坐标。对于任意时刻 $t \in I$, 其中 I 为一时间间隔, 将接触坐标系 C_0 和 C_f 取为与 $p_0(t)$ 和 $p_f(t)$ 处的规范化 Gauss 坐标系重合。同时定义坐标系的一个连续族, 对于 $\tau \in I$ 的两个坐标系如下: 设局部坐标系 $L_0(\tau)$ 和 $L_f(\tau)$ 为分别与 O 和 F 保持相对固定的坐标系, 在时刻 $t = \tau$, 它们分别与 $p_0(t)$ 和 $p_f(t)$ 处的规范化 Gauss 坐标系重合 (见图 5.22)。

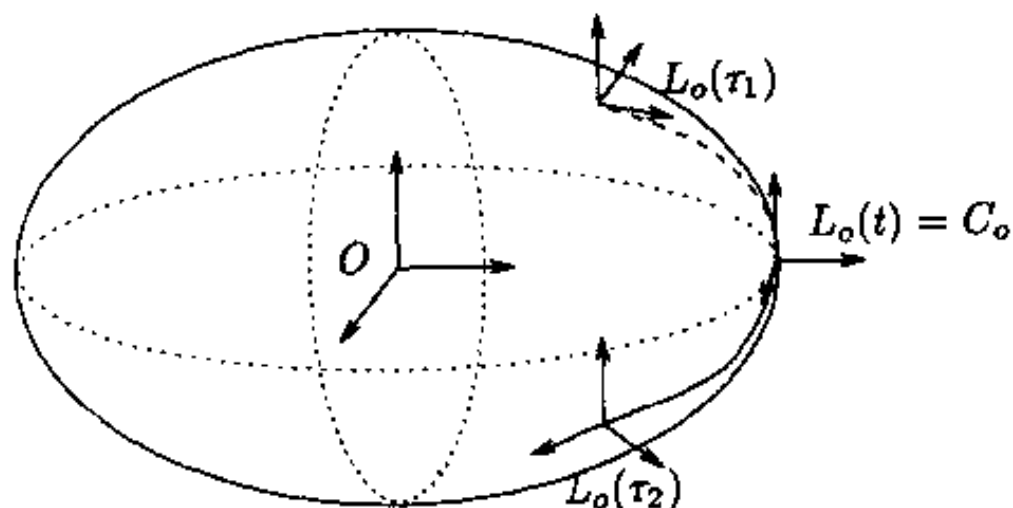


图 5.22 局部坐标系的单参数族 $L_f(t)$ 与接触坐标系 C_f 之间的关系
[在时刻 $t \in I$, $L_f(t)$ 与 C 重合]

利用局部坐标系 $L_0(t)$ 和 $L_f(t)$ 来描述 t 时刻 O 和 F 的运动。设 $v_{l_0 l_f} = (v_x, v_y, v_z)$ 为 t 时刻 $L_f(t)$ 相对于 $L_0(t)$ 的移动速度, 其中 (v_x, v_y) 为沿切平面的线速度, 即滑动速度, v_z 为接触法线方向的线速度; 类似地设 $\omega_{l_0 l_f} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ 为转动速度, 其中 (ω_x, ω_y) 为接触点处沿切平面的滚动速度, ω_z 为绕接触法线的旋转速度。只要两物体保持接触, 即有 $v_z = 0$ 。另外, 对于纯滚动接触, 有 $v_x = v_y = 0$, 且 $\omega_z = 0$; 对于纯滑动接触, $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ 。由于局部坐标系相对于各自的参考坐标系都是固定的, 根据定理 2.15, 有 $V_{l_0 l_f} = \text{Ad}_{g_{ff}}^{-1} V_{of}$, 或以分量形式表示为

$$V_{l_0 l_f}^b = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ff}^T v_{of} - R_{ff}^T \hat{p}_o \omega_{of} \\ R_{ff}^T \omega_{of} \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

设

$$R_\Psi = \begin{bmatrix} \cos \Psi & -\sin \Psi \\ -\sin \Psi & -\cos \Psi \end{bmatrix}, \quad \tilde{K}_o = R_\Psi K_o R_\Psi$$

其中 R_Ψ 表示 C_f 的 x 和 y 轴相对于 C_o 的 x 和 y 轴的姿态, 因而 $\tilde{K}_o$ 是接触点处 O 相对于 C_f 的 x 和 y 轴的曲率。称 $K_f + \tilde{K}_o$ 为相对曲率。

定理 5.11 接触运动学方程^[73]

作为相对运动的函数, 接触坐标系的运动 $\dot{\eta}$, 由下式确定

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_f &= M_f^{-1} (K_f + \tilde{K}_o)^{-1} \left[\begin{bmatrix} -\omega_y \\ \omega_x \end{bmatrix} - \tilde{K}_o \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \right] \\ \dot{\alpha}_o &= M_o^{-1} R_\Psi (K_f + \tilde{K}_o)^{-1} \left[\begin{bmatrix} -\omega_y \\ \omega_x \end{bmatrix} + K_f \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \right] \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\dot{\Psi} = \omega_z + T_f M_f \dot{\alpha}_f + T_o M_o \dot{\alpha}_o$$

$$o = v_z$$

其中 $(v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z) = \mathbf{V}_{l_o l_f}^b = \text{Ad}_{g_{l_f l_o}}^{-1} \mathbf{V}_{o f c}^b$

在给出该定理的证明之前, 应注意只有当相对曲率为非奇异时接触方程才有意义。当一个物体是凹形而另一物体是凸形, 且两者具有相同的曲率半径时, 即出现奇异的相对曲率。此时, 物体的微小运动就会产生很大的接触运动, 这样就丧失了运动的连续性。为避免这种可能性, 需假定所有的操作都位于相对曲率是可逆的开集中。

定理的证明: 因所有的计算都是基于物体速度, 所以可暂时略去角标 b 。由于坐标系 $L_f(t)$ 相对于坐标系 F 是固定不动的, $L_f(t)$ 相对于 F 的速度可利用 $\mathbf{V}_{f f_f} = 0$ 获得, 因此运用第二章中的速度关系, 可得

$$\mathbf{V}_{f c_f} = \text{Ad}_{g_{l_f f}}^{-1} \mathbf{V}_{f f_f} + \mathbf{V}_{l_f f} = \mathbf{V}_{l_f f} \quad (5.29)$$

类似地, 有

$$\mathbf{V}_{\alpha_o} = \text{Ad}_{g_{l_o c_o}}^{-1} \mathbf{V}_{\alpha o_o} + \mathbf{V}_{l_o c_o} = \mathbf{V}_{l_o c_o} \quad (5.30)$$

现通过两个中间坐标系 $L_f(t)$ 、 C_o 计算 C_f 相对于 $L_o(t)$ 的速度。

在时刻 t , C_f 相对于 $L_f(t)$ 的位置和姿态为 $\mathbf{p}_{l_f c_f} = 0$, $\mathbf{R}_{l_f c_f} = \mathbf{I}$, 因而有

$$\mathbf{V}_{l_o c_f} = \mathbf{V}_{l_o l_f} + \mathbf{V}_{l_f c_f} \quad (5.31)$$

又因 $\mathbf{p}_{c_o c_f} = 0$,

$$\mathbf{V}_{l_o c_f} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{c_o c_f}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_{c_o c_f}^T \end{bmatrix} \mathbf{V}_{l_o c_o} + \mathbf{V}_{c_o c_f} \quad (5.32)$$

将式 (5.32) 和式 (5.29) 加以组合, 得

$$\mathbf{V}_{l_o l_f} + \mathbf{V}_{f c_f} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{c_o c_f}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_{c_o c_f}^T \end{bmatrix} \mathbf{V}_{\alpha_o} + \mathbf{V}_{c_o c_f} \quad (5.33)$$

现在根据几何参数和运动参数来求式 (5.33) 中各个量的具体数值。首先, 注意到

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{c_o c_f} &= 0 & \mathbf{v}_{c_o c_f} &= 0 \\ \mathbf{R}_{c_o c_f} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\Psi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \Rightarrow & \boldsymbol{\omega}_{c_o c_f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.34)$$

由定义, $\mathbf{V}_{l_o l_f}^b = (v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z)$ 。

然后根据引理 5.10 得

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{f c_f} &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_f \dot{\alpha}_f \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hat{\boldsymbol{\omega}}_{f c_f} &= \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -T_f \mathbf{M}_f \dot{\alpha}_f & \mathbf{K}_f \mathbf{M}_f \dot{\alpha}_f \\ T_f \mathbf{M}_f \dot{\alpha}_f & 0 & \\ \hline -(K_f \mathbf{M}_f \dot{\alpha}_f)^T & & 0 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (5.35)$$

和

$$\begin{aligned} v_{fc_o} &= \begin{bmatrix} M_o \dot{\alpha}_o \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hat{\omega}_{fc_o} &= \begin{bmatrix} 0 & -T_o M_o \dot{\alpha}_o & K_o M_o \dot{\alpha}_o \\ T_o M_o \dot{\alpha}_o & 0 & \\ \hline -(K_o M_o \dot{\alpha}_o)^T & & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.36)$$

将式 (5.34) ~ 式 (5.36) 代入式 (5.33) 并使对应元素相等, 得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M_f \dot{\alpha}_f \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_\Psi M_o \dot{\alpha}_o \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} K_f M_f \dot{\alpha}_f \\ T_f M_f \dot{\alpha}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_y \\ -\omega_x \\ \omega_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_\Psi K_o M_o \dot{\alpha}_o \\ T_o M_o \dot{\alpha}_o \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.37)$$

经一些代数处理后, 可以将式 (5.37) 写成式 (5.28) 的形式。

若假设手指在物体上作无滑动的滚动, 则可简化接触运动学关系。

推论 5.11.1 滚动接触情况下接触坐标的变化满足下式

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_f &= M_f^{-1} (K_f + \tilde{K}_o)^{-1} \begin{bmatrix} -\omega_y \\ \omega_x \end{bmatrix} \\ \dot{\alpha}_o &= M_o^{-1} R_\Psi (K_f + \tilde{K}_o)^{-1} \begin{bmatrix} -\omega_y \\ \omega_x \end{bmatrix} \\ \dot{\Psi} &= T_f M_f \dot{\alpha}_f + T_o M_o \dot{\alpha}_o \end{aligned} \quad (5.38)$$

例 5.7 球在平面上的滚动

如图 5.23 所示, 一半径为 ρ 的球形手指在平面上滚动。平面的局部坐标系取为 c_o (u, v) = ($u, v, 0$)。球面需要多个坐标图来描述整个曲面, 此处仅限于下式确定的坐标图

$$c_f(u, v) = \begin{bmatrix} \rho \cos u \cos v \\ -\rho \cos u \sin v \\ \rho \sin u \end{bmatrix}$$

其中 ρ 是球的半径, 且 $-\pi/2 < u < \pi/2$, $-\pi < v < \pi$ 。曲率、挠率和度量张量分别为

$$\begin{aligned} K_o &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & K_f &= \begin{bmatrix} 1/\rho & 0 \\ 0 & 1/\rho \end{bmatrix} \\ M_o &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & M_f &= \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \cos u_f \end{bmatrix} \\ T_o &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & T_f &= \begin{bmatrix} 0 & -1/\rho \tan u_f \end{bmatrix} \end{aligned}$$

接触点的变化满足下列方程

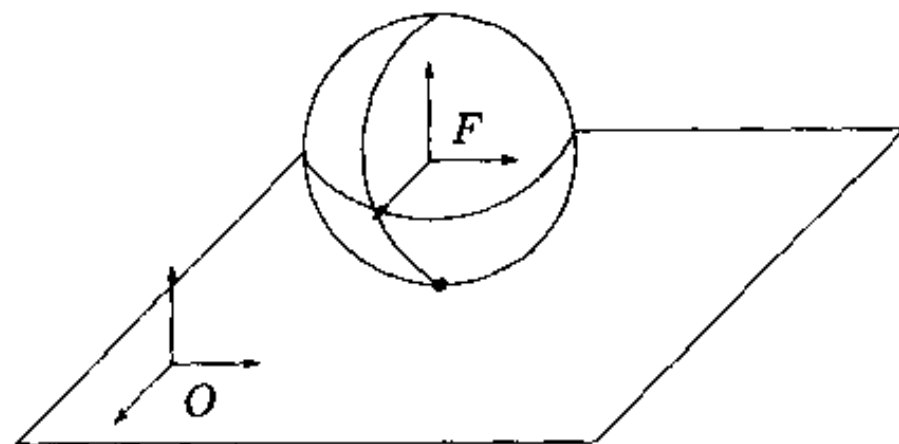


图 5.23 球形手指在平面上的滚动

[手指仅允许在物体上滚动, 面不允许滑动或扭转]

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_f \\ \dot{v}_f \\ \dot{u}_o \\ \dot{v}_o \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sec u_f \\ -\rho \sin \Psi \\ -\rho \cos \Psi \\ -\rho \tan u_f \end{bmatrix} \omega_x + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -\rho \cos \Psi \\ \rho \sin \Psi \\ 0 \end{bmatrix} \omega_y \quad (5.39)$$

6.3 滚动抓取运动学

下面研究手指在物体上滚动并可能滑动（取决于接触模型）时的抓取运动学。图 5.24 给出了所涉及的坐标系。假设手指和物体形状完全已知，且其局部正交的曲面参数已经给定。

理论上讲，除了抓取映射和手的雅可比矩阵取决于瞬时接触位置（包括 η_i 和每个手指的接触位置坐标）外，抓取运动学公式的推导与固定接触情况相同，因此接触运动方程具有以下形式

$$\begin{aligned} J_h(\theta, x_o, \eta) \dot{\theta} &= G^T(\eta) V_{po}^b \\ \dot{\eta}_i &= A_i(\eta_i) V_{of_i}^b \end{aligned} \quad (5.40)$$

式中 $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k) \in \mathcal{R}^{5k}$ 是接触坐标矢量， $A_i(\eta_i) \in \mathcal{R}^{5 \times 6}$ 是每个手指接触运动学的编码，由式 (5.28) 给出。另外需将前面的分析推广到运动接触情况： $B_{c_i}^T V_{oc_i}^b = 0$ 。该条件表明在受约束的任何方向接触点都不允许运动。其完整的推导留作习题。

式 (5.40) 利用一组常微分方程描述了抓取运动学，我们利用下述结论来分析抓取的性质，设 WCSE (3) 为两物体所有接触位形 g_{of} 的集合。

定理 5.12 g_{of} 上 η 的光滑关系

如果矩阵 $K_f + R_\Psi K_o R_\Psi^T$ 是满秩的，那么在 $\eta \in \mathcal{R}^5$ 和 $g_{of} \in W \subset SE(3)$ 之间存在一个光滑局部双射关系。

该定理的证明需要将隐含函数定理用于映射 $\eta \rightarrow g_{of} \in W$ (见 [78])。

因 η_i 是 $g_{of} = g_{po}^{-1} g_{pf_i}$ 的光滑函数， g_{pf_i} 是 θ 的光滑函数，所以约束方程可以写为

$$J_h(\theta, x_o) \dot{\theta} = G^T(\theta, x_o) V_{po}^b \quad (5.41)$$

式中 $x_o := g_{po}$ 。式 (5.41) 是式 (5.15) 对运动接触情况的直接推广，固定接触抓取时的所有定义和性质对于运动接触抓取同样成立。

对于大多数情况，建立 η 与 g_{of} 之间函数关系的计算并不可行，我们可以直接使用 η 。为清楚起见，用 $\eta_i = (\alpha_{fi}, \alpha_o, \Psi_i)$ 表示第 i 个接触的接触坐标。为计算 J_h 和 G ，必须计算随 η 而变化的变换 $Ad_{g_{fi}}^{-1}$ 和 $Ad_{g_{\alpha_i}}^{T-1}$ 。事实上，因

$$Ad_{g_{fi}}^{-1} = (Ad_{g_{sp}} Ad_{g_{po}} Ad_{g_{\alpha_i}})^{-1} = Ad_{g_{\alpha_i}}^{-1} Ad_{g_{po}}^{-1} Ad_{g_{sp}}^{-1}$$

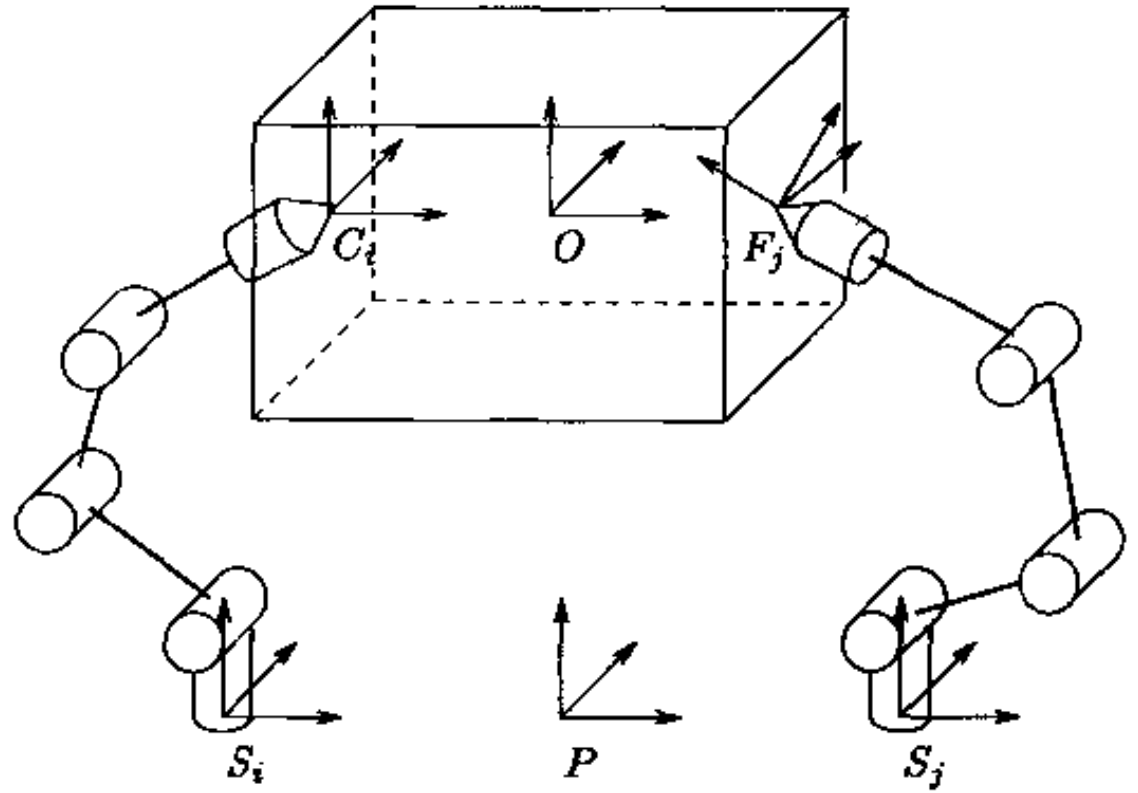


图 5.24 运动接触的抓取坐标系

所以需要计算的量仅仅是 $\text{Ad}_{g_{\alpha_i}}^{-1}$ 。

不失一般性, 假设接触坐标系与物体的规范化 Gauss 坐标系一致, 因此

$$R_{\alpha_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial c_{\alpha_i}}{\partial \mathbf{a}_{\alpha_i}} \mathbf{M}_{\alpha_i}^{-1} & \mathbf{n}_{\alpha_i} \end{bmatrix}$$

这里 $\mathbf{n}_{\alpha_i}$ 是曲面的外法矢, 而且, $\mathbf{p}_{\alpha_i}$ 就是接触位置 $c_{\alpha_i}(\alpha_i)$ 。因此

$$g_{\alpha_i} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial c_{\alpha_i}}{\partial \mathbf{a}_{\alpha_i}} \mathbf{M}_{\alpha_i}^{-1} & \mathbf{n}_{\alpha_i} \end{bmatrix} & c_{\alpha_i}(\alpha_i) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

最后, 虽然接触坐标原则上可以通过对接触运动方程的积分获得, 但实际上为了保证精度, 需要直接计算每一个 η_i (见 [7] 的实例)。所有这些以及其它的处理过程并不会改变整个结构和抓取特性, 但对系统的性能却有着惊人的影响。

7 小结

本章涉及的主要概念如下:

1. 一个接触可以通过手指对物体在接触处所施加的力与在物体坐标系中表示的合力螺旋之间的映射来描述。接触基 $\mathbf{B}_{c_i}: \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^p$ 表示手指所能施加的在接触坐标系中表示的力螺旋的集合。对于有摩擦的接触, 摩擦锥 $\text{FC}_{c_i} \subset \mathfrak{R}^m$ 给出了所施加接触力的允许范围。摩擦锥具有下列特性

- (a) FC_{c_i} 为非内空 $\mathfrak{R}^m$ 的封闭子集;
- (b) $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in \text{FC}_{c_i} \Rightarrow \alpha \mathbf{f}_1 + \beta \mathbf{f}_2 \in \text{FC}_{c_i}$, 对于 $\alpha, \beta > 0$ 。

2. 抓取是对物体施加力的若干手指的组合。纯物体力螺旋根据关系 $\mathbf{F}_o = \mathbf{G}\mathbf{f}_c$ 由接触力决定, 其中 $\mathbf{G} \in \mathfrak{R}^{p \times m}$ 是如下的抓取映射

$$\mathbf{G} = [\text{Ad}_{g_{\alpha_1}}^{-1} \mathbf{B}_{c_1} \cdots \text{Ad}_{g_{\alpha_k}}^{-1} \mathbf{B}_{c_k}]$$

$\text{Ad}_{g_{\alpha_i}}^{-1}: \mathfrak{R}^p \rightarrow \mathfrak{R}^p$ 是物体坐标系与接触坐标系之间的力螺旋变换。接触力必须全部位于摩擦锥 $\text{FC} = \text{FC}_{c_1} \times \cdots \times \text{FC}_{c_k}$ 内。

3. 当位于摩擦锥内的手指力张成物体力螺旋空间

$$\mathbf{G}(\text{FC}) = \mathfrak{R}^p$$

时, 抓取是力封闭的。抓取是力封闭的当且仅当抓取映射是满射的, 且存在内力 $\mathbf{f}_N$ 满足 $\mathbf{G}\mathbf{f}_N = 0$ 和 $\mathbf{f}_N \in \text{int}(\text{FC})$ 。

4. 基本抓取约束描述了手指速度和物体速度之间的关系

$$\mathbf{J}_h(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_0) \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{G}^T(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_0) \dot{\mathbf{x}}_0$$

这里 $\boldsymbol{\theta} \in \mathfrak{R}^n$ 是手指关节转角矢量, $\mathbf{x}_0 := g_{p_0}$ 是物体坐标系相对于手掌坐标系的位形。手的雅可比矩阵 $\mathbf{J}_h \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ 定义为

$$\mathbf{J}_h = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{c_1}^T \text{Ad}_{g_{\alpha_1}}^{-1} \mathbf{J}_{s_{f_1}}^s(\theta_{f_1}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{B}_{c_k}^T \text{Ad}_{g_{\alpha_k}}^{-1} \mathbf{J}_{s_{f_k}}^s(\theta_{f_k}) \end{bmatrix}$$

其中 $J_{s f_i}^s$ 是第 i 个手指的空间雅可比矩阵, $Ad_{g_{s f_i}}^{-1}$ 是基坐标系与接触坐标系之间的运动螺旋变换。对于非滚动接触情况, G 是定常矩阵。

5. 多指抓取时力和速度间的关系可概括为图 5.25

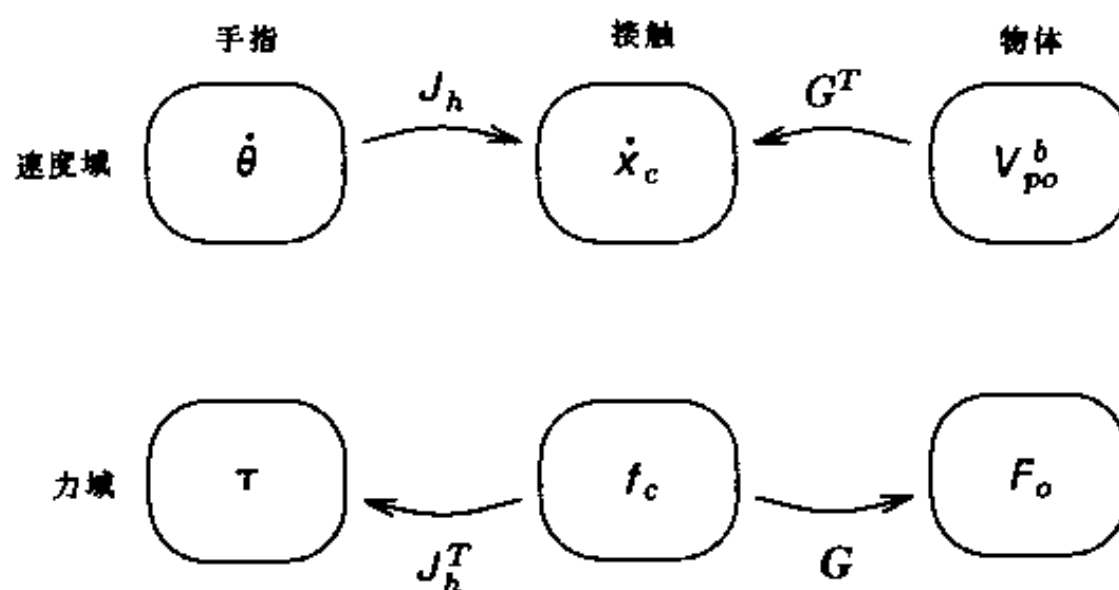


图 5.25 多指抓取的关系图

6. 当手指可产生任意运动

$$R(G^T) \subset R(J_h)$$

时, 抓取是可操作的。力封闭抓取是可操作的当且仅当 J_h 是满射的。

7. 接触运动学描述了接触点沿手指和物体表面的运动情况。对于滚动接触情况, 接触运动方程为

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_f &= M_f^{-1} (K_f + \tilde{K}_o)^{-1} \begin{bmatrix} -\omega_y \\ \omega_x \end{bmatrix} \\ \dot{\alpha}_o &= M_o^{-1} R_\Psi (K_f + \tilde{K}_o)^{-1} \begin{bmatrix} -\omega_y \\ \omega_x \end{bmatrix} \\ \dot{\Psi} &= T_f M_f \dot{\alpha}_f + T_o M_o \dot{\alpha}_o\end{aligned}$$

其中 (M_i, K_i, T_i) 为曲面关于给定坐标图的几何参数。接触运动方程允许利用 $\eta = (\alpha_f, \alpha_o, \Psi)$ 来计算 G 和 J_h , 而不是根据 g_{po} 通过求解 η 来计算。

8 文献说明

本章内容是在 1989 年 1 月于 Liouville Kentucky 召开的美国数学学会年会上由 Roger Brockett 组织的专题研究报告的基础上整理而成的。关于抓取运动学和静力学的早期研究可参考 Salisbury^[102] 和 Kerr^[49] 的论文, 本章第二节的内容主要基于这两篇文章, 另外也参考了 Nakamura^[81] 的著作。关于力封闭和抓取规划方面的资料很多, 主要的有 Nguyen^[83] 和由 Mishra, Schwartz 和 Sharir^[72] 的研究论文。手指运动学和可操作性方面的内容可参阅 Li^[63] 等的研究。

滚动接触运动学最初由 Montana^[73] 导出, 并已推广到自适应接触情况^[74]。关于滚动接触方程的其他推导方法可参阅^[78]。

9 习题

1. 对于图 5.26 所示抓取, 构造抓取映射, 并确定抓取是否力封闭。假设所有的接触都是无摩擦点接触。

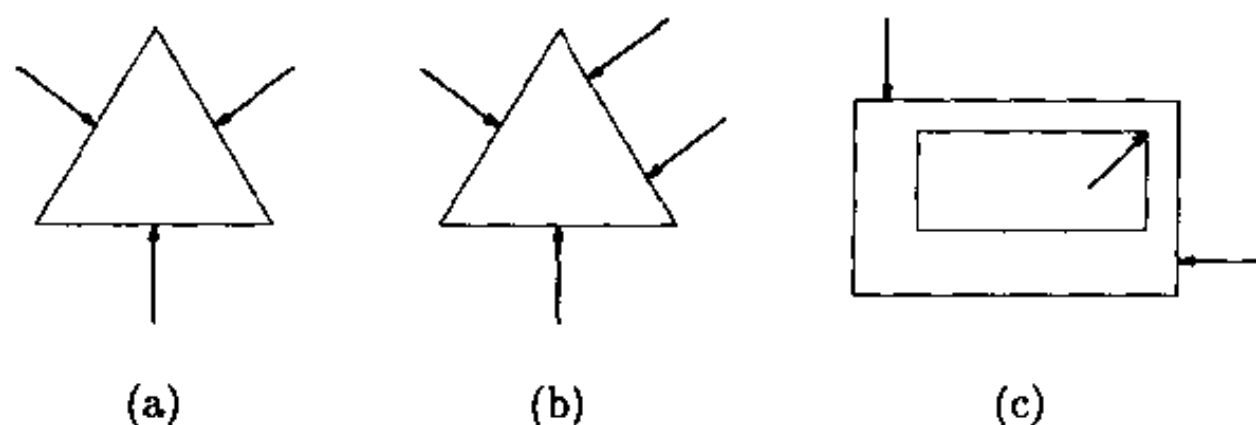


图 5.26 无摩擦点接触抓取的力封闭判断

2. 构造图 5.27 所示抓取的抓取映射, 并写出相对于所选接触基的摩擦锥条件。确定抓取是否力封闭。假设所有的接触都是有摩擦的点接触。

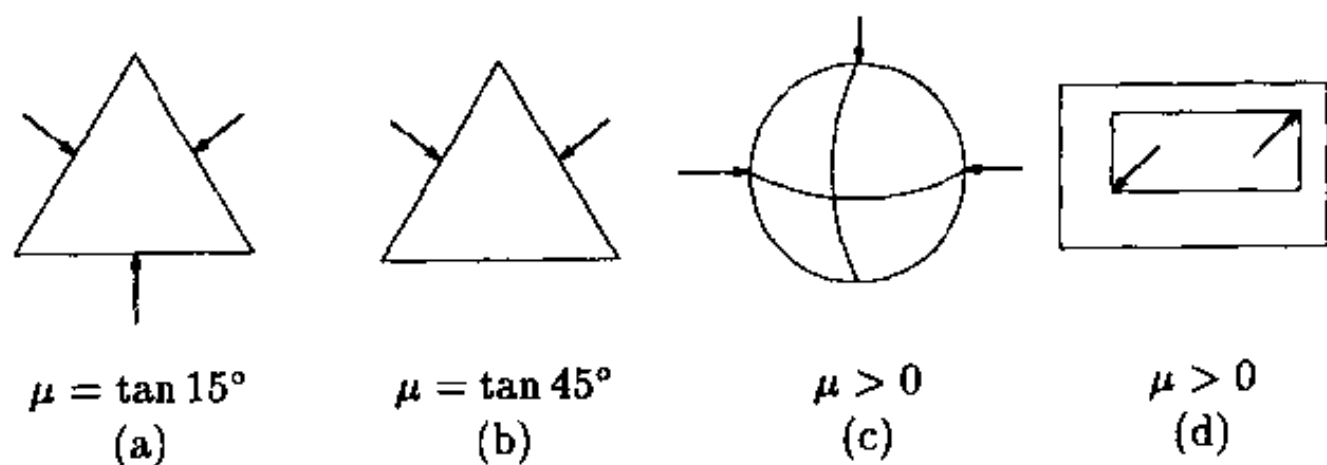


图 5.27 有摩擦点接触抓取的力封闭判断

3. 构造图 5.28 所示抓取的抓取映射, 并写出相对于所选接触基的摩擦锥条件。确定抓取是否力封闭。假设所有的接触都是软指接触。

4. 其他接触模型

导出图 5.29 所示接触模型的力螺旋基和摩擦锥, 假设滑动摩擦因数 $\mu > 0$ 。

5. 通过构造下列物体证明表 5.3 给出的下限值, 假设不允许顶点接触。

(a) 构造一不能被有摩擦点接触两指抓取的二维物体, 且 $\mu = \tan 30^\circ$, 并对物体不能被抓取作简单证明。

(b) 构造一不能被有摩擦点接触三指抓取的三维物体, 且 $\mu = \tan 15^\circ$, 并对物体不能被抓取作简单证明。

(c) 正误判断: 对任一三维凸面体, 通过三个软指在光滑点的接触能够构成一个力封闭抓取 (假设没有顶点接触)。证明或构造一个反例。

(d) (由 Canny 提出) 对于具有光滑轮廓 (非分块光滑) 的任一三维物体, 证明利用三

点有摩擦接触或两个软指接触可以构成力封闭抓取。

6. 在控制多指机器人手时, 保证接触力严格位于摩擦锥内以避免滑动是非常重要的,

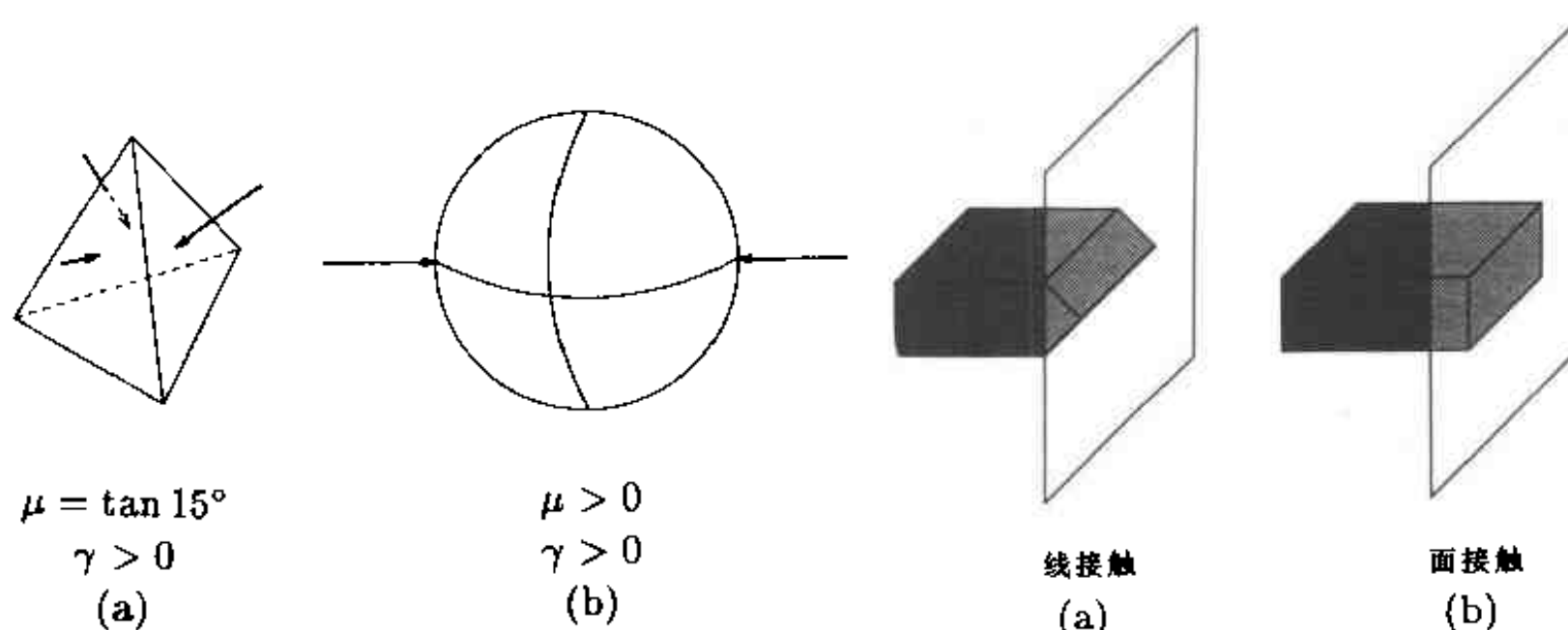


图 5.28 软指接触抓取的力封闭判断

图 5.29 线、面接触模型

也就是说, 对于任一 F_o , 要求存在 f_c 使得 $F_o = Gf_c$ 和 $f_c \in \text{int}(FC)$ 成立。这样的抓取称为可抓住的 prehensile。若用 FC 表示由本章第二节定义的摩擦锥, 试按下列步骤证明: 若 $G(FC) = \mathbb{R}^p$, 则 $G(\text{int}(FC)) = G(FC)$ 。

- 证明 $F \in \text{int}(FC) \Rightarrow \alpha F \in \text{int}(FC)$, 对于所有的 $\alpha > 0$ 。
- 证明 $F \in \text{int}(FC)$, $F' \in FC \Rightarrow F + F' \in \text{int}(FC)$ 。
- 证明存在 $f_N \in \text{int}(FC)$, 使得 $Gf_N = 0$ 。
- 证明 $G(FC) \subseteq G(\text{int}(FC))$ 。

因此, 抓取是可抓住的当且仅当抓取是力封闭的。

7. 证明定理 5.6: 证明有摩擦两点接触的平面抓取是力封闭的当且仅当两接触点连线位于两个摩擦锥内。

8. 对于图 5.30 所示物体, 找出有摩擦两点接触时的所有力封闭抓取。在每个物体上画出力封闭区域内对应于最大矩形的独立接触区域。假设所有接触处的摩擦因数为 $\mu = \tan 45^\circ$ 。

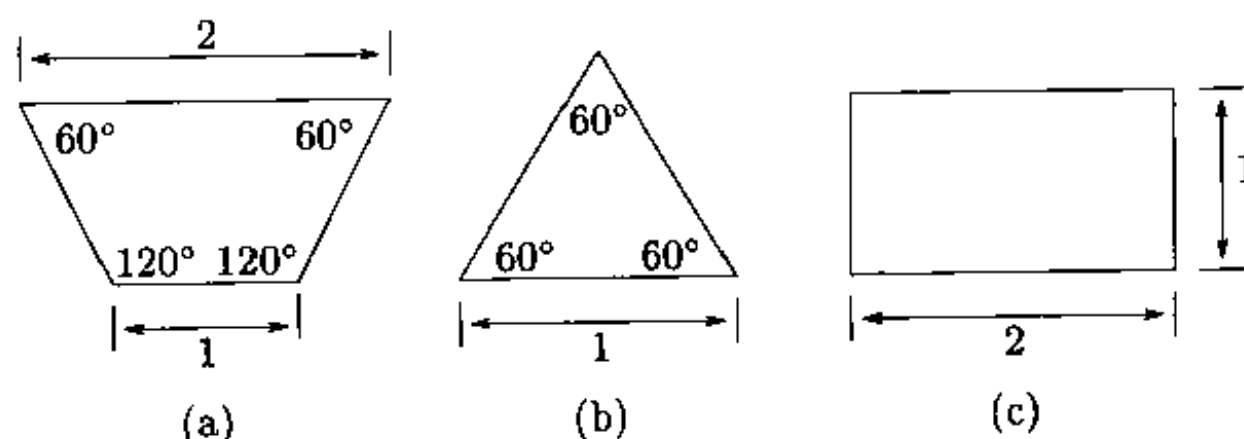


图 5.30 有摩擦两点接触抓取的力封闭判断

9. 找出有摩擦两点接触抓取一个圆的所有力封闭抓取。在圆上画出力封闭区域以及两

指位置。在圆上表示出力封闭区域内对应于最大矩形的独立接触区域。

10. 推导图 5.31 所示手的接触约束。确定图示位形的抓取是否力封闭或可操作。

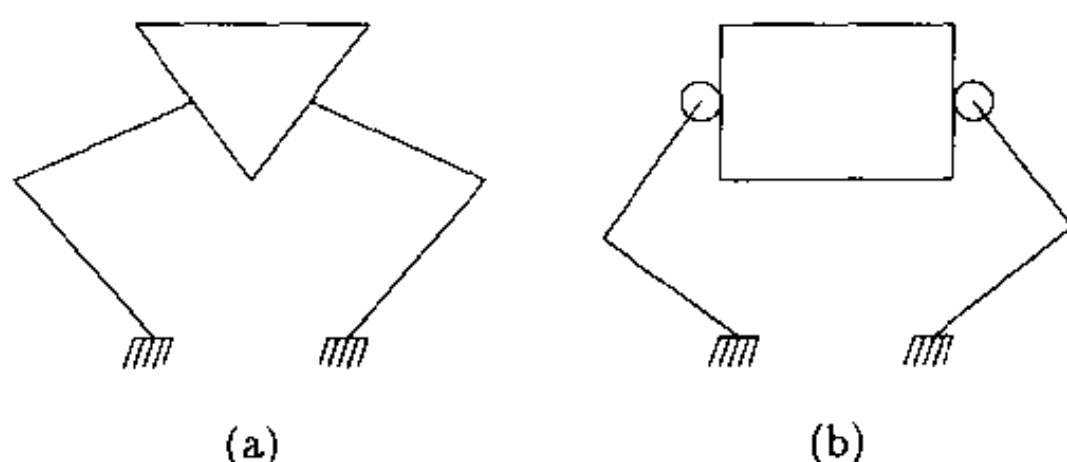


图 5.31 接触约束的确定

11. 计算图 5.17 所示 ($l_3 > 0$) 抓取的接触约束。

12. 考虑图 5.17 所示的两指抓取, 使指端上的接触位置与盒子上的接触位置相同。对该代数约束关系微分, 并说明其与第 5 节后面的实例结果等效。

13. 给出具有奇异相对曲率的两接触曲面实例。

14. 计算椭球、抛物体和环形体的几何参数。

15. 图 5.32 所示为椭球指端与平面物体的接触, 椭球的主轴长度分别为 a 、 b 和 c 。

(a) 给出图示接触点处指端的正交坐标

图。

(b) 假设指端与物体构成滚动接触, 导出接触方程。

(c) 计算相对于物体的指端速度, 要求满足滚动约束并产生接触速度 $\dot{\mathbf{a}}_o = (0, v)$, $v \in \mathcal{R}$ 。

16. 推导单位球与半径为 ρ 的球构成滚动接触时的接触方程。

17. 平面接触运动学

两平面物体的接触运动方程可通过将式

(5.28) 应用于平面得到。设 $g_{of} = (\mathbf{p}, \mathbf{R}) \in SE(2)$ 为两物体的相对位形。

(a) 设 s_o 为物体上的接触点, s_f 为手指上的接触点。假设曲面用弧长参数表示, 即有

$\left\| \frac{\partial \mathbf{c}_i}{\partial s_i} \right\| = 1$, 其中 $\mathbf{c}_i: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^2$ 为坐标图。证明接触坐标 $\boldsymbol{\eta} = (s_f, s_o)$ 满足

$$\begin{aligned} \dot{s}_f &= (\mathbf{K}_o + \mathbf{K}_f)^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{c}_o^T}{\partial s_o} \dot{\mathbf{R}} \mathbf{n}_f + \mathbf{K}_o \frac{\partial \mathbf{c}_o^T}{\partial s_o} (\dot{\mathbf{R}} \mathbf{c}_f + \dot{\mathbf{p}}) \right) \\ \dot{s}_o &= (\mathbf{K}_o + \mathbf{K}_f)^{-1} \left(-\frac{\partial \mathbf{c}_o^T}{\partial s_o} \dot{\mathbf{R}} \mathbf{n}_f + \mathbf{K}_f \frac{\partial \mathbf{c}_o^T}{\partial s_o} (\dot{\mathbf{R}} \mathbf{c}_f + \dot{\mathbf{p}}) \right) \end{aligned}$$

(b) 推导平面椭圆手指在平面物体上滚动时的接触方程。

18. 考虑图 5.33 所示协调提升问题。推导横梁速度与机器人关节速度之间的约束关系。

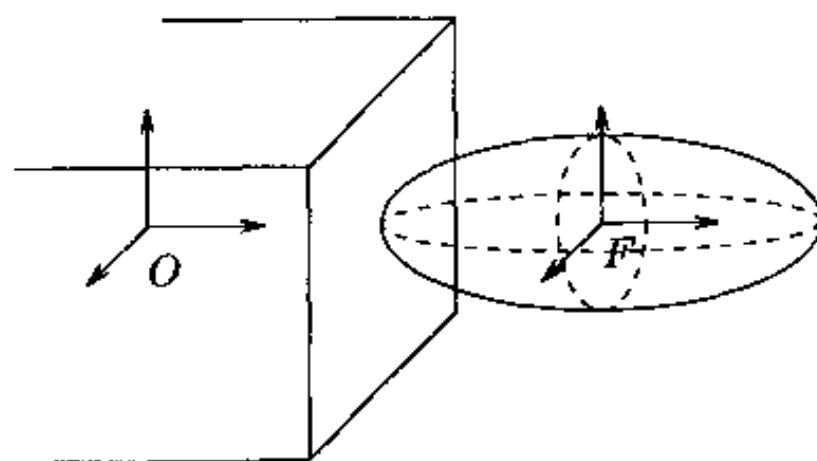


图 5.32 椭球指端与平面物体的接触

假设每个手指紧紧夹住横梁末端且通过夹持器中心将力传递给横梁。

19. 当手指和物体表面以函数 $h_f: \mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}$ 和 $h_o: \mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}$ (例如半径为 ρ 的球满足 $h_f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \rho^2 = 0$) 的集合形式给出时, 重新推导接触运动方程。针对椭球在平面上的滚动情况来检查所得结果。

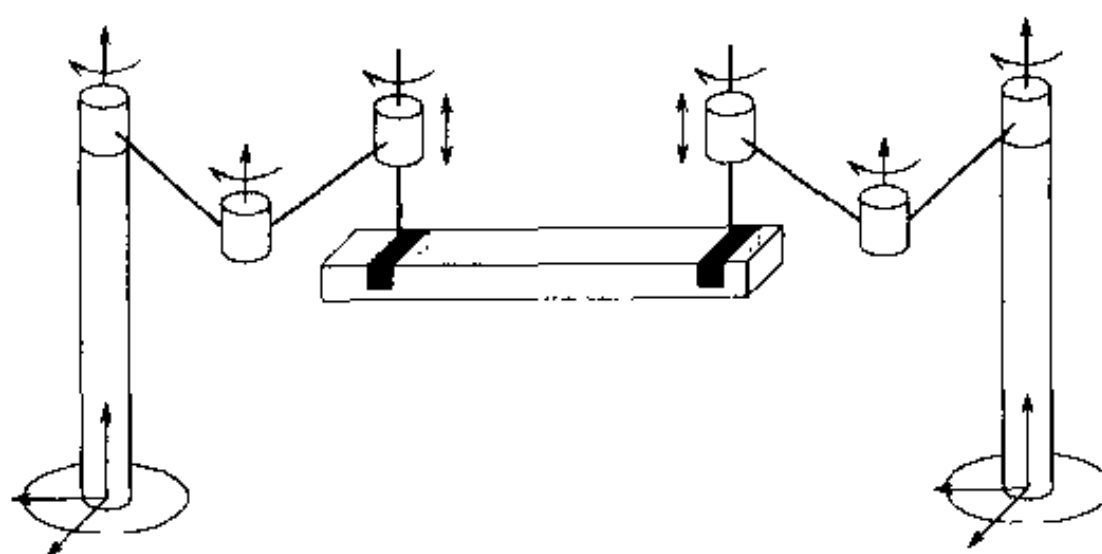


图 5.33 协调提升

第六章 机器人手的动力学及控制

本章以多指机器人手操作物体为例,研究多机器人进行协调操作时的动力学及控制问题。所给出的有关公式可以推广应用于更为一般的情况,并可建立含一组速度约束的机器人系统的统一动力学方程和控制规则。一般的处理方法见第四章。

1 有约束的拉格朗日方程

对于开链机器人,可用拉格朗日方程或其他类似方法推导其运动方程,在选择能完全表示系统位形空间的最少广义坐标后,即可建立以广义坐标和广义力表示的动力学方程。

对于多指机器人手,系统的位形由手指关节转角以及物体的位置和姿态确定。但是由于抓取约束的存在使得系统的速度之间存在一定的关系,所以上述参数不是独立的,因此就不能直接运用拉格朗日方程。此时广义坐标的选取是很困难的,在某些情况下甚至是不可能的。

为了克服这个困难,应重新建立有约束机械系统的运动方程,也就是将约束条件直接组合到运动方程中,而不是通过选取适当的坐标系来消去约束。本章后续内容简要介绍了基于这种思想的运动方程推导方法,详细的推导过程可参阅 Rosenberg^[100]或 Pars^[90]。

为简化起见,本节假设位形空间 Q 是 $\mathcal{R}^n$ 中广义坐标为 $q = (q_1, \dots, q_n)$ 的一个开子集。通过选取适当的局部坐标系,可以获得更为一般的位形空间。

1.1 Pfaffian 约束

机械系统的约束是通过限制系统运动路径来约束系统的运动的。用一个不能伸展的无质量杆将两个质点连接在一起即是存在约束的一个简单例子,其中质点的位形可用点 $p_i \in \mathcal{R}^3$ 来表示,但质点的所有轨迹必须满足如下代数约束

$$\|p_1 - p_2\|^2 = L^2 \quad (6.1)$$

其中 L 是连接两质点的杆的长度。此约束是通过施加约束力的方式起作用的,此力改变了系统的运动以保证约束总能满足。两个相连质点间的约束力就是杆上的张力,它将作用在一质点上的力传递到另一质点上,并使两质点间的距离保持不变。

式 (6.1) 所表示的约束是一种完整约束。如果约束使系统的运动限制在无约束位形空间 Q 中的某一光滑超曲面上,则称该约束为完整约束 (holonomic constraint)。完整约束可以表示为位形空间上的局部代数约束

$$h_i(q) = 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (6.2)$$

每一个 h_i 都是从 Q 到 $\mathcal{R}$ 的映射,它限制了系统的运动。假设约束都是线性独立的,那么矩阵

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_k}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial h_k}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

是行满秩的。(在经典力学中,具有式(6.2)形式的约束有时称为硬约束(scleronic constraint)。“完整”和“硬”这两个词都来自于希腊语,相应的意思分别为“所有都是合法的”和“刚性的”。 $\mathbf{q}$ 随时间变化的约束称为流变(rheonomic)约束。本书不用“硬”和“流变”这两个术语,仅用术语“完整”)。

由于完整约束确定了位形空间中的一个光滑超曲面,这就有可能通过对该曲面上坐标系的适当选取来消去约束。有了这些新的坐标系,就可以用参数来表示系统的所有可能运动,而不受其他约束的限制。这样就可以根据单一坐标系的位置和姿态来描述整个刚体的运动,而非刚体上各个点的约束运动。

以式(6.2)形式给出的完整约束所对应的约束力是约束函数 $h_i: Q \rightarrow \mathcal{R}$ 的梯度的线性组合。设 $\mathbf{h}: Q \rightarrow \mathcal{R}^k$ 表示矢量值约束函数,则约束力可写为

$$\mathbf{\Gamma} = \frac{\partial \mathbf{h}^T}{\partial \mathbf{q}} \boldsymbol{\lambda}$$

其中 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{R}^k$ 是表示约束力相对大小的矢量。这些约束力可看作是作用在约束曲面的法线方向,力的大小应能确保系统位于由式(6.2)所定义的约束曲面上。注意当系统沿所有可能的路径运动时,这些约束并不做功,这是由于

$$\mathbf{\Gamma} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\lambda}^T \frac{d}{dt}(\mathbf{h}(\mathbf{q})) = 0$$

在多指抓取过程中,存在着不同类型的约束,系统的可能运动受到如下速度约束的限制

$$\mathbf{J}_h(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_o) \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{G}^T(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_o) \mathbf{V}_{p_o}^b$$

一般情况下,对于位形空间为 Q 的系统,可将速度约束写为如下形式

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = 0$$

其中 $\mathbf{A}(\mathbf{q}) \in \mathcal{R}^{k \times n}$ 表示 k 个速度约束的集合。具有这种形式的约束称为 Pfaffian 约束。假设所有约束都是逐点线性独立的,因此 $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ 在 $\mathbf{q} \in Q$ 时为行满秩。对于多指手,矩阵 $\mathbf{A}$ 的形式为

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = [\mathbf{J}_h(\mathbf{q}) - \mathbf{G}^T(\mathbf{q})]$$

其中 $\mathbf{q} = (\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x})$ 和 $\mathbf{x}$ 为表示物体位置和姿态的一种局部坐标。

由于 Pfaffian 约束只是限制了系统的许可速度,而不是必需的位形,所以不能将其表示为位形空间的代数约束。如果存在一个矢量值函数 $\mathbf{h}: Q \rightarrow \mathcal{R}^k$, 使得

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = 0$$

则认为 Pfaffian 约束是可积的。因此可积的 Pfaffian 约束等价于完整约束。应注意并不要求

$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}}$, 而只是要求在每一个 $\mathbf{q} \in Q$, 所定义的许可速度子空间都是相同的。

不可积 Pfaffian 约束是非完整约束(nonholonomic constraint)的一种情况。当系统的瞬时速度限制在 $n - k$ 维子空间中,但可达位形的集合不限于位形空间中的某个 $n - k$ 维超曲

面时,即存在这种非完整约束。如下一章所述,并不是所有的 Pfaffian 约束都是可积的,因此在推导运动方程时应考虑这种情况。

尽管某个约束可能是非完整的,但仍可认为其是力约束。约束力是由一组 Pfaffian 约束产生的,这些力用以保证系统不能沿着由约束矩阵 $A(q)$ 中的行所确定的方向运动。在位形 $q \in Q$ 的约束力为

$$F = A^T(q)\lambda$$

其中 $\lambda \in \mathbb{R}^k$ 是表示约束力相对大小的矢量。如果约束正好是可积的,则等价于完整约束情况,这是由于 $A^T(q)$ 和 $\frac{\partial h^T}{\partial q}$ 具有相同的域空间。

Pfaffian 约束的集合所对应的约束力将阻止系统沿破坏约束的方向运动。为在动力学方程中考虑这些力,必须对约束的性质作进一步假设,即假设由约束所产生的力不作功,因而保持能量不变。该假设常称为达朗伯原理。

约束不作功的假设在许多实例中很容易得到证明。特殊情况,如果系统限定为绕一点或沿某一曲面作纯滚动,则由于纯滚动而产生的摩擦力是很小的,常可忽略不计,然而如果除了纯滚动外还有滑动,则所作之功取决于法向力的大小,并且约束作了功。在这种情况下,开始时可以先不考虑摩擦力和其他非保守力,然后在建立动力学方程时再将这些力看作是外力,并加到系统中加以考虑。

1.2 拉格朗日乘子

下面推导位形 $q \in \mathbb{R}^n$ 受一组 Pfaffian 约束的机械系统的运动方程。设 $L(q, \dot{q})$ 表示无约束系统的拉格朗日函数,并设约束为

$$A(q)\dot{q} = 0 \quad A(q) \in \mathbb{R}^{k \times n} \quad (6.3)$$

假设约束处光滑并线性独立,且约束力在系统中不作功。

在建立系统运动方程时,可将约束力看作是影响系统运动的附加力。因此矢量形式的动力学方程为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} + A^T(q)\lambda - r = 0 \quad (6.4)$$

式中 A^T 的列构成了约束力的非标准基, $\lambda \in \mathbb{R}^k$ 反映了约束力的相对大小。 r 表示非保守力和其他外力。

标量系数 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 称为拉格朗日乘子 (Lagrange multipliers), 它们保证了在约束方向不产生运动, 因此任何时候式 (6.3) 都成立。拉格朗日乘子可以通过求解式 (6.3) 和 (6.4) 中 $n+k$ 个变量 q 和 λ 确定。由于约束力随着位形、速度和所作用的力的变化而变化, 所以通常情况下 λ_i 是 q 、 $\dot{q}$ 和 r 的函数。求得这些乘子后并将其回代到运动方程, 即得系统的动力学方程。

对于形式为 $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - V(q)$ (动能减去势能) 的拉格朗日函数, 可以推得拉格朗日乘子的计算公式。利用第四章的表示方法, 运动方程可表示为

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + N(q, \dot{q}) + A^T(q)\lambda = F \quad (6.5)$$

式中 F 为外力矢量, $N(q, \dot{q})$ 包括非保守力 (nonconservative forces) 和有势力 (potential force)。对式 (6.3) 求导得

$$A(q)\ddot{q} + \dot{A}(q)\dot{q} = 0$$

由式 (6.5) 解得 $\ddot{q}$, 并代入上式有

$$(AM^{-1}A^T)\lambda = AM^{-1}(F - C\dot{q} - N) + \dot{A}\dot{q}$$

上式仅与 q 和 $\dot{q}$ 有关。如果约束是独立的, 则由矩阵 $AM^{-1}A$ 所确定的位形是满秩的, 因此拉格朗日乘子为

$$\lambda = (AM^{-1}A^T)^{-1}(AM^{-1}(F - C\dot{q} - N) + \dot{A}\dot{q}) \quad (6.6)$$

上式将拉格朗日乘子表示为当前状态 q 和 $\dot{q}$ 以及作用力 F 的函数。这样系统的运动方程就可使用式 (6.5) 表示, 其中 λ 由式 (6.6) 确定。

例 6.1 理想平面摆的动力学

考虑图 6.1 所示的理想摆, 其质量集中在端部, 并具有两个自由度。摆机构具有一个约束, 从而使质量仅作单自由度的运动。不用角度参数 θ 来表示系统的位置, 而是直接利用拉格朗日乘子来建立运动方程。

系统的位形由 $q = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ 确定。摆的长度固定不变所对应的约束可写为

$$x^2 + y^2 = l^2$$

对该约束求导并将其分为两部分, 即得 Pfaffian 约束

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}}_{A(q)} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = 0$$

无约束拉格朗日函数可简单地表示为 $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$ 。代入式 (6.5) 后, 得约束系统的拉格朗日方程为

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \lambda = 0$$

拉格朗日乘子 λ 由式 (6.6) 确定, 即

$$\begin{aligned} \lambda &= (AM^{-1}A^T)^{-1}(AM^{-1}(Q - C\dot{q} - N) + \dot{A}\dot{q}) = \\ &= \frac{m}{x^2 + y^2}(-gy - \dot{x}^2 - \dot{y}^2) = -\frac{m}{l^2}(gy + \dot{x}^2 + \dot{y}^2) \end{aligned}$$

因此运动方程为

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ mg \end{bmatrix} - \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} (mgy + m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)) = 0$$

应注意上式是以两个变量 x 和 y 表示的二阶微分方程, 即使实际系统仅有一个自由度。这样就增加了表示系统运动的变量个数。实际上还可以求得支撑质量的杆中的张力 (tension), 即

$$\text{张力} = \left\| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \lambda \right\| = \frac{mg}{l}y + \frac{m}{l}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

1.3 拉格朗日-达朗伯方程

重新推导无需求解系统瞬时约束力的运动方程是方便的, 而且也是很有用的。实际上,

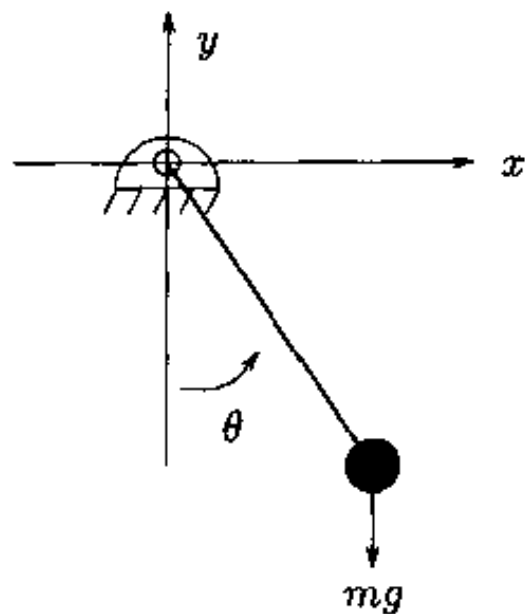


图 6.1 理想平面摆

只需将系统的运动向可行方向投影并忽略受约束的方向,即可获得适于闭环控制的简洁动力学方程。

对于给定的位形 $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, 系统允许运动方向的瞬时集合由约束矩阵 $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ 的零空间决定。采用经典的表示方法, 并称满足 $\mathbf{A}(\mathbf{q})\delta\mathbf{q} = 0$ 的矢量 $\delta\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ 为虚位移 (virtual displacement)。如果 $\mathbf{F}$ 为作用于系统上的广义力, 那么称 $\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{q}$ 为力 $\mathbf{F}$ 经虚位移 $\delta\mathbf{q}$ 所作之虚功。达朗伯原理表明约束力不作虚功, 因此

$$(\mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}) \cdot \delta\mathbf{q} = 0 \quad \text{对于 } \mathbf{A}(\mathbf{q})\delta\mathbf{q} = 0$$

应注意 $\delta\mathbf{q}$ 和 $\dot{\mathbf{q}}$ 是不一样的。广义速度 $\dot{\mathbf{q}}$ 满足速度约束和运动方程, 而虚位移仅满足约束条件。因此, 达朗伯原理认为对于满足约束的任意瞬时运动 (并不是系统的实际运动), 约束力都不做功。

为消去式 (6.4) 中的约束力, 可以将运动方程向由 $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ 的零空间生成的线性子空间投影。因 $(\mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda}) \cdot \delta\mathbf{q} = 0$, 所以式 (6.4) 变为

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{r} \right) \cdot \delta\mathbf{q} = 0 \quad (6.7)$$

式中 $\delta\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ 满足

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\delta\mathbf{q} = 0 \quad (6.8)$$

称式 (6.7) 和式 (6.8) 为拉格朗日-达朗伯方程 (Lagrange-d'Alembert equation)。注意在系统无约束的情况下, $\delta\mathbf{q}$ 是自由的, 式 (6.7) 简化为一般形式的拉格朗日方程。

为获得更为明确的动力学描述, 假设 $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ 具有如下形式

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = [\mathbf{A}_1(\mathbf{q}) \quad \mathbf{A}_2(\mathbf{q})]$$

其中 $\mathbf{A}_2(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ 是可逆的, 这一点总是可以通过调整位形空间变量的顺序给予保证。现将位形改记为 $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \in \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$, 以使

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\delta\mathbf{q} = 0 \Leftrightarrow \delta\mathbf{q}_2 = -\mathbf{A}_2^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{A}_1(\mathbf{q})\delta\mathbf{q}_1$$

其中 $\delta\mathbf{q}_1$ 是自由的 (无约束的)。在拉格朗日-达朗伯方程中采用同样的表示方法得

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{r} \right) \cdot \delta\mathbf{q} &= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_1} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_1} - \mathbf{r}_1 \right) \cdot \delta\mathbf{q}_1 + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_2} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_2} - \mathbf{r}_2 \right) \cdot \delta\mathbf{q}_2 = \\ &= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_1} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_1} - \mathbf{r}_1 \right) \cdot \delta\mathbf{q}_1 + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_2} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_2} - \mathbf{r}_2 \right) (-\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1)\delta\mathbf{q}_1 \end{aligned}$$

因 $\delta\mathbf{q}_1$ 是自由的, 那么运动方程变为

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_1} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_1} - \mathbf{r}_1 \right) - \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_2^{-T} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_2} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_2} - \mathbf{r}_2 \right) = 0 \quad (6.9)$$

式 (6.9) 是关于 $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ 的二阶微分方程。利用约束 $\dot{\mathbf{q}}_2 = -\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1\dot{\mathbf{q}}_1$ 消去 $\dot{\mathbf{q}}_2$ 和 $\ddot{\mathbf{q}}_2$, 可以进一步简化式 (6.9)。 $\mathbf{q}_2$ 可利用约束方程进行求解, 具体过程见下面的实例。

例 6.2 滚动圆盘动力学

考虑图 6.2 所示在平面上作滚动的圆盘, 圆盘的位形由平面上的 xy 坐标、进动角 (heading angle) θ 和圆盘相对于铅垂线的姿态角 ϕ 确定, 记 $\mathbf{q} = (x, y, \theta, \phi)$, ρ 为圆盘的半径。对圆盘输入转动力矩 (driving torque) τ_θ 和绕铅垂轴的转向力矩 (steering torque) τ_ϕ 。

假设圆盘作无滑动的滚动, 如同指端在物体上的纯滚动。该条件可用一组速度约束表示为

$$\begin{aligned} \dot{x} - \rho \cos \theta \dot{\phi} &= 0 \\ \dot{y} - \rho \sin \theta \dot{\phi} &= 0 \end{aligned} \quad \text{或} \quad A(q) \dot{q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\rho \cos \theta \\ 0 & 1 & 0 & -\rho \sin \theta \end{bmatrix} \dot{q} = 0 \quad (6.10)$$

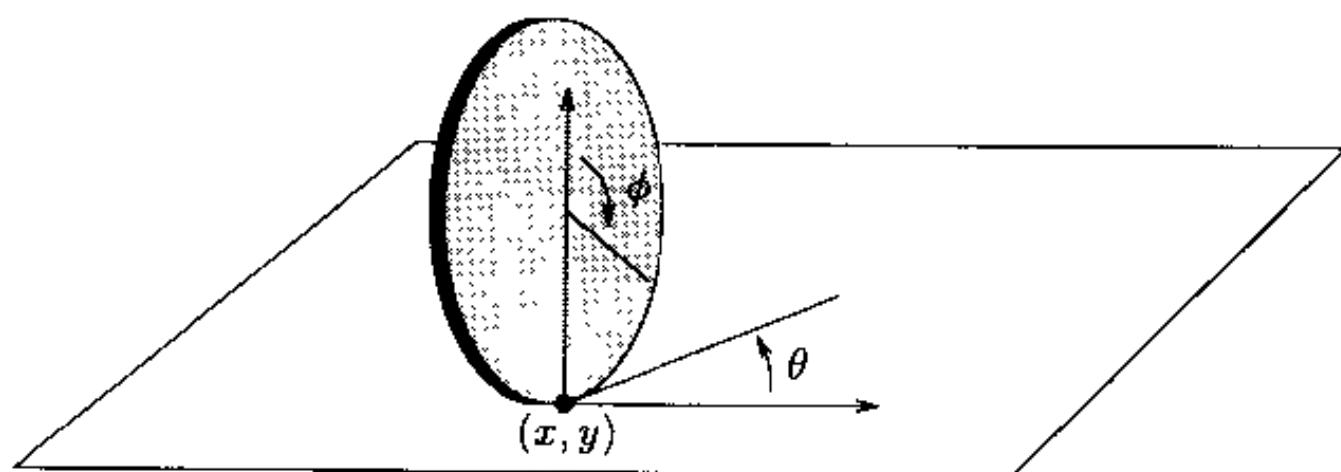


图 6.2 在平面上滚动的圆盘

这些约束要求圆盘沿滚动方向滚动，圆盘的速度必须与在平面上的滚动速度相匹配，且这些约束都是线性独立的。

该系统的拉格朗日函数就是不考虑约束时圆盘的动能。设 m 为圆盘的质量， $\mathfrak{I}_1$ 、 $\mathfrak{I}_2$ 分别为关于水平轴（滚动轴）和铅垂轴的惯量。拉格朗日函数为

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} \mathfrak{I}_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \mathfrak{I}_2 \dot{\phi}^2$$

下面推导系统的运动方程。设 $\delta q = (\delta x, \delta y, \delta \theta, \delta \phi)$ 表示系统的虚位移，拉格朗日-达朗伯方程为

$$\left[\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{I}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathfrak{I}_2 \end{bmatrix} \ddot{q} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_\theta \\ \tau_\phi \end{bmatrix} \right] \cdot \delta q = 0$$

其中

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\rho \cos \theta \\ 0 & 1 & 0 & -\rho \sin \theta \end{bmatrix} \delta q = 0$$

根据约束可求得 δx 和 δy 为

$$\begin{aligned} \delta x &= \rho \cos \theta \delta \phi \\ \delta y &= \rho \sin \theta \delta \phi \end{aligned} \quad (6.11)$$

运动方程可表示为

$$\left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ m \rho \cos \theta & m \rho \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathfrak{I}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tau_\theta \\ \tau_\phi \end{bmatrix} \right] \cdot \begin{bmatrix} \delta \theta \\ \delta \phi \end{bmatrix} = 0$$

因 $\delta \theta$ 和 $\delta \phi$ 是自由的，所以动力学方程变为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ m \rho \cos \theta & m \rho \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathfrak{I}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_\theta \\ \tau_\phi \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

再次利用约束消去 $\ddot{x}$ 、 $\ddot{y}$ 和 $\ddot{x}$ 、 $\ddot{y}$ ，可以对上式作进一步简化。对约束微分后有

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \rho \cos \theta \ddot{\phi} - \rho \sin \theta \dot{\theta} \dot{\phi} \\ \ddot{y} &= \rho \sin \theta \ddot{\phi} + \rho \cos \theta \dot{\theta} \dot{\phi} \end{aligned} \quad (6.13)$$

代入式 (6.12) 得

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{I}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{I}_2 + m\rho^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_\theta \\ \tau_\phi \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

式 (6.14) 为描述系统运动的以 θ 和 ϕ 表示的二阶微分方程。应注意以 θ 和 ϕ 表示的系统运动方程与 x 、 y 无关，但一般情况并非如此。

圆盘 x 、 y 位置的运动可表示为下列一阶微分方程

$$\dot{x} = \rho \cos \theta \dot{\phi}$$

$$\dot{y} = \rho \sin \theta \dot{\phi}$$

因此，在给定 θ 和 ϕ 变化规律的情况下，可确定圆盘在平面上的运动轨迹。运动方程可分为以较少变量表示的二阶微分方程和表示约束的一阶微分方程之和，这是非完整系统的特性。

1.4 非完整约束的性质

本节研究了机械系统受 Pfaffian 约束时动力学方程的建立方法（无需对约束方程求积分），并选择了能完全表示系统位形的最少广义坐标。对于约束是可积的情况，这些动力学方程与选择适当广义坐标时的方程是一致的。而当约束不可积时，将约束加以适当组合是很重要的。本节讨论不可积约束是如何影响系统力学性能的，并指出不加注意时将会导致什么样的错误结果。

在推导含非完整约束机械系统运动方程时的一个常见错误，就是将约束直接代入拉格朗日函数，然后运用拉格朗日方程。这样似乎消去了非独立变量，并减少了计算量。然而由此得到的系统运动方程却是错误的。本节在建立拉格朗日函数、将其代入拉格朗日-达朗伯方程以及利用约束来消去非独立变量时都是非常小心的。

下面看一下当约束被不恰当时会出现什么样的后果。考虑不受力作用的三维 Pfaffian 系统，其位形为 $q = (r, s) \in \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}$ ，约束为

$$\dot{s} + a^T(r)\dot{r} = 0 \quad a(r) \in \mathfrak{R}^2$$

拉格朗日算子为 $L(r, \dot{r}, \dot{s})$ 。为简化起见，假设拉格朗日函数和约束与变量 s 无关。定义有约束的拉格朗日函数为

$$L_c(r, \dot{r}) = L(r, \dot{r}, -a^T(r)\dot{r})$$

有约束的拉格朗日函数是系统的动能减去势能，但在计算时应考虑系统的约束。

假如将有约束的拉格朗日函数代入拉格朗日-达朗伯方程。因 s 和 $\dot{s}$ 是不相关的，所以有

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_c}{\partial \dot{r}_i} - \frac{\partial L_c}{\partial r_i} = 0 \quad i = 1, 2$$

利用 L_c 的定义将其展开得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} - a_i(r) \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \sum_j \frac{\partial a_j}{\partial r_i} \dot{r}_j \right) = 0$$

经整理得

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} - \frac{\partial L}{\partial r_i} \right) - a_i(r) \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} \right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \left(\dot{a}_i(r) - \sum_j \frac{\partial a_j}{\partial r_i} \dot{r}_j \right) \quad (6.15)$$

注意上式左侧部分就是系统的拉格朗日-达朗伯方程；右侧部分是由于将约束代入拉格朗日函数而产生的伪项。由此可以看出，在通常情况下，将 Pfaffian 约束代入拉格朗日函数，然后运用拉格朗日-达朗伯方程会得出错误的方程。

若约束在实际情况下是完整约束，为简化起见，假设约束是可积的，即存在函数 $h(\mathbf{r})$ ，使得

$$a_i(\mathbf{r}) = \frac{\partial h}{\partial r_i}$$

此时式 (6.15) 的右侧部分为

$$\frac{\partial L}{\partial s} \left(\dot{a}_i(\mathbf{r}) - \sum_j \frac{\partial a_i}{\partial r_j} \dot{r}_j \right) = \frac{\partial L}{\partial s} \left(\sum_j \frac{\partial^2 h}{\partial r_i \partial r_j} \dot{r}_j - \sum_j \frac{\partial^2 h}{\partial r_j \partial r_i} \dot{r}_j \right)$$

因混合偏微分部分可以对换，所以上式为零。因此如果约束是完整的，那么可以将约束代入拉格朗日函数，并能获得正确的运动方程。

2 机器人手的动力学

利用前一节的结果，可以推导多机器人系统进行协调操作时的运动方程。本节首先讨论多指手对物体的操作，然后将所建立的有关公式用于其他问题。

2.1 公式推导及有关性质

通过抓取约束将手指和物体的动力学方程加以组合即可获得多指手抓取物体时的动力学方程。采用前面各章的表示方法，可得手指的动力学方程

$$\mathbf{M}_f(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}_f(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{N}_f(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \boldsymbol{\tau} \quad (6.16)$$

式中 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_{f_1}, \dots, \theta_{f_k}) \in \mathbb{R}^n$ 为所有手指的关节转角矢量， $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ 为对应的关节力矩矢量。 $\mathbf{M}_f$ 、 $\mathbf{C}_f$ 和 $\mathbf{N}_f$ 由每一手指的对应量加以适当组合得到

$$\mathbf{M}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{f_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{M}_{f_k} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{f_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{C}_{f_k} \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{f_1} \\ \vdots \\ \mathbf{N}_{f_k} \end{bmatrix}$$

物体的动力学方程可由第四章的牛顿-欧拉方程得到，即

$$\begin{bmatrix} m\mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathfrak{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}^b \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}^b \times m\mathbf{v}^b \\ \boldsymbol{\omega}^b \times \mathfrak{I}\boldsymbol{\omega}^b \end{bmatrix} = \mathbf{F}^b$$

式中 $\mathbf{V}^b = (\mathbf{v}^b, \boldsymbol{\omega}^b)$ 为物体速度， $\mathbf{F}^b$ 为物体力螺旋， m 为质量， $\mathfrak{I}$ 为惯性矩阵的矩，以上所有量都是在质心坐标系中表示的。用 $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{q}, \mathbf{R})$ 表示物体的位形。如果物体只受重力作用，则动力学方程为

$$\begin{bmatrix} m\mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathfrak{I} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{V}}^b + \begin{bmatrix} m\dot{\boldsymbol{\omega}}^b & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{\omega}}^b \mathfrak{I} - \mathfrak{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}^b) \end{bmatrix} \mathbf{V}^b + \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T(m\mathbf{g}) \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (6.17)$$

这里 $\mathbf{g}$ 是重力方向矢量，通常取为 $\mathbf{g} = (0, 0, 1)$ 。

为了运用拉格朗日-达朗伯方程，有必要给出在局部坐标系中表示的牛顿-欧拉方程。设

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6$ 表示 $\mathbf{x}_o \in SE(3)$ 的局部参数, 则物体的动力学方程可写为

$$\mathbf{M}_o(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_o(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{N}_o(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = 0$$

其形式与式 (6.16) 相同。由此可知 $\mathbf{M}_o(\mathbf{x}) > 0$ 及 $\dot{\mathbf{M}}_o - 2\mathbf{C}_o$ 是反对称的 (见习题 4)。

物体和手指通过在局部坐标系中表示的抓取约束

$$\mathbf{J}_h(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x})\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{G}^T(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} \quad (6.18)$$

联系在一起。对抓取的结构作以下三点假设:

1) 抓取是力封闭且是可操作的。等价于对于所有可能位形, 有

$$\mathbf{G}(\text{FC}) = \mathbb{R}^p \quad \text{和} \quad R(\mathbf{G}^T) \subset R(\mathbf{J}_h)$$

2) 手的雅可比矩阵是可逆的。该条件保证手指无冗余运动, 即手所具有的自由度数正好就是完成任务所需要的自由度数。

3) 接触力始终位于摩擦锥内。为保证式 (6.18) 表示的抓取约束始终成立, 该条件是必要的。这是控制规则必须保证的条件, 否则物体将滑动, 或脱离抓取。

前两个假设可以放宽, 具体在下一节讨论。

组合系统的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{M}_f \dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M}_o \dot{\mathbf{x}} - V_f(\boldsymbol{\theta}) - V_o(\mathbf{x}) \quad (6.19)$$

式中 V_f 和 V_o 是重力势能。设 $\mathbf{q} = (\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x})$ 表示整个系统的位形。

下面可以用前一节的结果来导出运动方程。式 (6.18) 表示的速度约束对虚位移 $\delta\boldsymbol{\theta}$ 和 $\delta\mathbf{x}$ 产生了约束, 也就是 $\delta\boldsymbol{\theta} = \mathbf{J}_h^{-1} \mathbf{G}^T \delta\mathbf{x}$ 。利用该关系可得拉格朗日-达朗伯方程为

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \delta \mathbf{q} &= \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\tau} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\theta} \\ \delta \mathbf{x} \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\tau} \right) \cdot (\mathbf{J}_h^{-1} \mathbf{G}^T \delta \mathbf{x}) + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \delta \mathbf{x} \\ &= \mathbf{G} \mathbf{J}_h^{-T} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\tau} \right) \cdot \delta \mathbf{x} + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \delta \mathbf{x} \end{aligned}$$

为分离 $\delta\mathbf{x}$, 上式最后一步利用了内积的性质。由于 $\delta\mathbf{x}$ 是自由的, 所以

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \right) + \mathbf{G} \mathbf{J}_h^{-T} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\tau} \right) = \mathbf{G} \mathbf{J}_h^{-T} \boldsymbol{\tau} \quad (6.20)$$

式 (6.20) 以及由式 (6.18) 给出的速度约束完全描述了系统的运动。式 (6.20) 是 $n-m$ 行的二阶矢量方程, 式 (6.18) 是 m 行的一阶矢量方程。

因系统的拉格朗日函数分为独立的两个部分, 所以式 (6.20) 左边两项可分别化为物体动力学和手指动力学。利用约束消去 $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 和 $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$, 运动方程变为

$$\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{F} \quad (6.21)$$

式中 $\mathbf{q} = (\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x})$, 且

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}} &= \mathbf{M}_o + \mathbf{G} \mathbf{J}_h^{-T} \mathbf{M}_f \mathbf{J}_h^{-1} \mathbf{G}^T \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \mathbf{C}_o + \mathbf{G} \mathbf{J}_h^{-T} \left(\mathbf{C}_f \mathbf{J}_h^{-1} \mathbf{G}^T + \mathbf{M}_f \frac{d}{dt} (\mathbf{J}_h^{-1} \mathbf{G}^T) \right) \\ \tilde{\mathbf{N}} &= \mathbf{N}_o + \mathbf{G} \mathbf{J}_h^{-T} \mathbf{N}_f \\ \mathbf{F} &= \mathbf{G} \mathbf{J}_h^{-T} \boldsymbol{\tau} \end{aligned} \quad (6.22)$$

这些方程与单开链机器人方程的形式相同。 $\tilde{M}$ 称为物体的有效质量, $\tilde{C}$ 为有效哥氏矩阵, $\tilde{N}$ 为有效重力和非保守力。这些量决定了所有手指的动力学, 但每一手指的运动学和动力学信息隐含在 $\tilde{M}$ 、 $\tilde{C}$ 和 $\tilde{N}$ 中。下列引理证明这些方程也满足无约束时的结构特性。

引理 6.1 运动方程的结构特性

式 (6.21) 具有下列性质:

1. $\tilde{M}(\mathbf{q})$ 是对称且正定的;
2. $\dot{\tilde{M}}(\mathbf{q}) - 2\tilde{C}$ 是反对称矩阵。

证明: 因假设抓取是力封闭且可操作的, J_h 是可逆的。性质 1 由其定义可直接得到证明。为证明性质 2, 可进行如下计算

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{M}} - 2\tilde{C} &= (\dot{M}_o - 2C_o) + GJ^{-1}(\dot{M}_f - 2C_f)J^{-1}G^T \\ &\quad + \frac{d}{dt}(GJ^{-T})M_fJ^{-1}G^T - GJ^{-T}M_f\frac{d}{dt}(J^{-1}G^T)\end{aligned}$$

上式第一行是两个反对称矩阵之和; 通过对第二行取转置, 并利用 M_f 的对称性性质, 可得第二行也是反对称矩阵。因此整个矩阵是反对称矩阵。

式 (6.21) 是根据 $SE(3)$ 的局部参数得到的。因拉格朗日-达朗伯方程仅适用于 $\mathbf{q} \in \mathcal{R}^n$, 所以这是必要的。又因 $SE(3)$ 不是局部欧几里得空间, 所以不能直接根据 $\mathbf{x}_o \in SE(3)$ 运用拉格朗日-达朗伯方程。然而可以将在局部坐标系导出的运动方程, 转换到 $SE(3)$, 从而动力学方程可写为

$$\tilde{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{V}}_o^b + \tilde{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{V}_o^b + \tilde{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{F}^b \quad (6.23)$$

式中 $\tilde{M}$ 、 $\tilde{C}$ 和 $\tilde{N}$ 的定义同前, 采用全局惯性参数的情况除外。其证明留作习题。本节后续内容使用局部参数来表示系统, 以简化证明。

2.2 内力

由第五章已知, 如果抓取是力封闭的, 那么存在不对物体产生纯力螺旋的接触力, 此接触力称为内力。内力在动力学中对应于 $\mathbf{F} = GJ_h^T \boldsymbol{\tau}$ 项, 它将关节力矩映射为物体力。如果 $J_h^{-T} \boldsymbol{\tau} \in N(G)$, 那么不会产生纯力螺旋。

然而, 即使 $J_h^{-T} \boldsymbol{\tau}$ 不属于 $N(G)$, 内力在系统中仍然存在。这些内力是由于拉格朗日-达朗伯方程消去约束力而引起的。定义 $\mathbf{q} = (\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x})$, 则完整的运动方程可表示为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{r} = 0$$

式中 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{R}^m$ 是拉格朗日乘子矢量, $\mathbf{A}^T(\mathbf{q})$ 的列对应于约束方向。对于多指抓取, 可取

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = [-J_h(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) \quad G^T(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x})]$$

完整的运动方程具有如下形式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_f & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\theta}} \\ \ddot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_f & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{N}_f \\ \mathbf{N}_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -J_h^T \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

由式 (6.24) 不难看出拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{R}^m$ 可以理解为接触力。纯约束力起着对指端和物体上接触点施加外力的作用。如果 $\boldsymbol{\lambda}$ 存在属于 G 的零空间的分量, 那么将存在内力。

为求解运动过程中的瞬时力, 可利用 1.2 节的结果求解拉格朗日乘子。设 $\tilde{M}$ 、 $\tilde{C}$ 和 $\tilde{N}$

表示式 (6.24) 中的分块矩阵, 则

$$\lambda = (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1} \left(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{M}}^{-1} \left(\begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} - \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{N}} \right) + \dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{q}} \right) \quad (6.25)$$

将 λ 向 $\mathbf{G}$ 的零空间投影, 即可建立以当前位形、速度和力矩表示的内力计算公式。 λ 及其投影的计算显然非常复杂。事实上, 由非准静态运动 (non-quasistatic motion) 产生的内力或者忽略不予考虑, 或者通过接触处的传感器直接测量得到。

计算约束力的另一种方法是根据关节加速度进行求解。如果 $\mathbf{J}_h$ 是可逆的, 则接触力为

$$\lambda = \mathbf{J}_h^{-T} (\tau - \mathbf{M}_f \ddot{\theta} - \mathbf{C}_f \dot{\theta} - \mathbf{N}_f)$$

由上式可以看出, 若系统处于运动状态, 则存在内力, 即使 $\mathbf{J}_h^{-T} \tau$ 不属于 $\mathbf{G}$ 的零空间, 因动态项将产生内力。注意 $\lambda = f_c := \mathbf{J}_h^{-T} \tau$ 仅当系统静止时成立。

以上所有分析都是建立在抓取约束始终存在的假设基础上。即使在求解接触力时, 也应注意接触力是由约束产生的。如果接触力处于摩擦锥之外, 那么系统的速度约束也就不存在, 运动方程也不再由式 (6.24) 给出。控制系统的任务之一是保持接触力位于摩擦锥内, 以使所用的模型有效。

2.3 其他机器人系统

上述分析虽然是受抓取的启发而建立的, 但基本公式对于受如下形式约束的任何机器人系统都成立:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\theta} = \mathbf{G}^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}}$$

其中 $\mathbf{q} = (\theta, \mathbf{x})$ 。任何这样的系统都具有与开链机器相同形式和结构的动力学方程。本节讨论几个这样的例子。

协调提升

考虑图 6.3 所示由几个独立机器人提升一个物体的机器人系统。假设每个机器人紧抓物体且能施加任意力螺旋而不脱离接触。

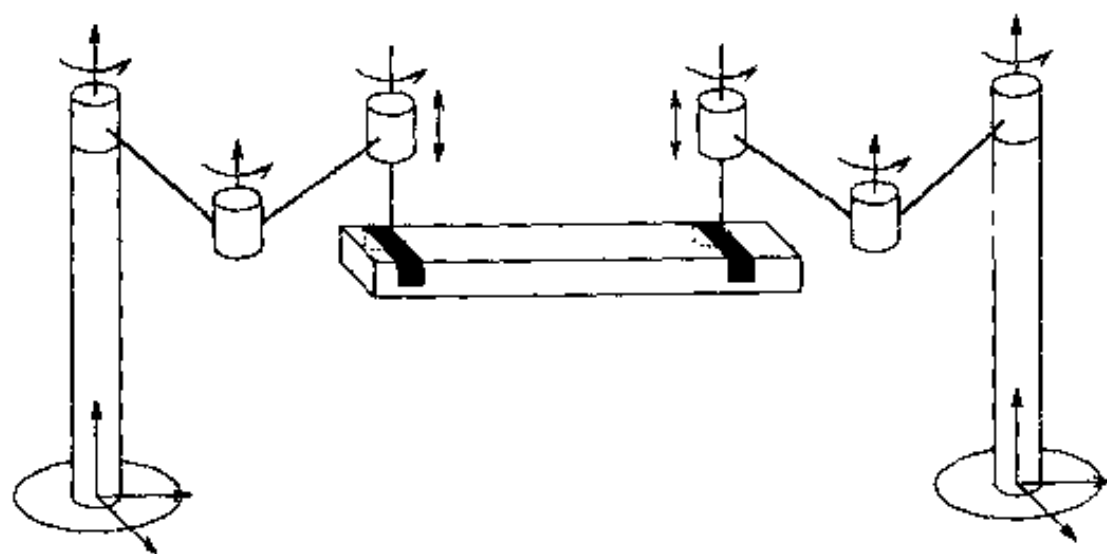


图 6.3 协调提升

为推导该系统的运动方程, 将每个机器人看作为单个手指。机器人紧抓物体的接触模型由 $\mathbf{B}_c = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 和 $\mathbf{F}_c = \mathbb{R}^p$ 给出, 这是机器人能施加任意力和力矩的数学表示。将这些关系代入抓取约束, 并标出接触坐标系和工具坐标系, 有

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \text{Ad}_{g_{s_1 t_1}}^{-1} J_{s_1 t_1}^s & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \text{Ad}_{g_{s_k t_k}}^{-1} J_{s_k t_k}^s \end{bmatrix}}_G \dot{\theta} = \underbrace{\begin{bmatrix} \text{Ad}_{g_{s_1 t_1}}^{-1} \\ \vdots \\ \text{Ad}_{g_{s_k t_k}}^{-1} \end{bmatrix}}_{G^T} V_{po}^b$$

系统的动力学方程与抓取情况相同。

工作空间动力学

多机器人所执行的任务是在工作空间坐标中描述的，而不是在关节空间坐标中描述的。例如图 6.4 所示的焊接作业，任务是由焊枪端部的位置和姿态来描述的。为了不通过运动学逆解的求解来获得相应的关节空间路径，可以直接在工作空间坐标中（本例为 $SE(3)$ ）建立动力学方程。

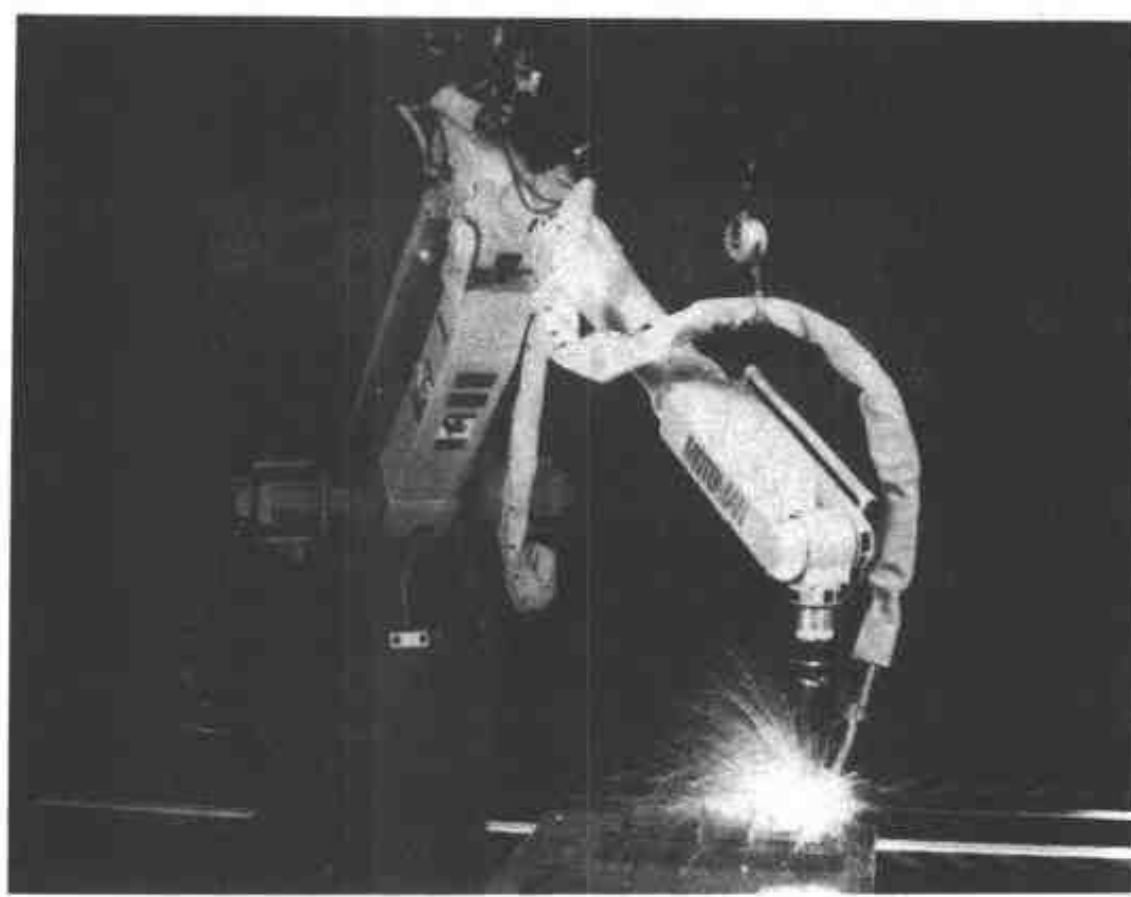


图 6.4 Motoman K10MSB 机器人进行弧焊作业

为简化起见，在局部坐标系中进行讨论。设 $g: Q \rightarrow \mathbb{R}^p$ 表示机器人的运动学正解映射， $J(\theta) = \frac{\partial g}{\partial \theta}$ 为雅可比矩

阵。假设 J 是方阵且非奇异。机器人所握物体（即焊枪）的动力学方程为

$$M_o(x)\ddot{x} + C_o(x, \dot{x})\dot{x} + N_o(x, \dot{x}) = 0$$

式中 $x \in \mathbb{R}^p$ 为工作空间坐标， M_o 和 C_o 满足通常的结构特性。

机构的运动学关系为

$$J(\theta)\dot{\theta} = \dot{x}$$

上式与 $G = I \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 的典型约束形式相同。因此可将动力学方程写为

$$\tilde{M}(q)\ddot{x} + \tilde{C}(q, \dot{q})\dot{x} + \tilde{N}(q, \dot{q}) = F \quad (6.26)$$

式中 $q = (\theta, x)$ ，且

$$\tilde{M} = M_o + J^{-T} M_f J^{-1}$$

$$\tilde{C} = C_o + J^{-T} \left(C_f J^{-1} + M_f \frac{d}{dt} (J^{-1}) \right)$$

$$\tilde{N} = N_o + J^{-T} N_f$$

$$F = J^{-T} \tau$$

（带下标 f 的量是指机器人动力学方程的量）。显然 $\tilde{M} > 0$ 和 $\tilde{M} - 2\tilde{C}$ 是反对称的。

式 (6.26) 给出的动力学方程表示相对于工作空间坐标 $x \in \mathbb{R}^p$ 的运动方程。因此 $\tilde{M}$

(q) 表示相对于物体坐标系的系统惯量。如同抓取情况, $\tilde{M}(q)$ 是物体惯量和机器人惯量 (当前位形) 的组合。如果机器人接近于奇异位形, 那么惯性矩阵就变得非常大, 这是因为较大的工作空间力仅产生较小的物体加速度, 因此有效惯量就会非常大。然而这种奇异性完全是由于动力学方程以工作空间坐标表示的结果。以关节坐标表示的机构动力学方程不存在奇异性。

此问题有几种不同的处理方法。若将 x 、 $\dot{x}$ 和 $\ddot{x}$ 分别用 x_o 、 V_o^b 和 $\dot{V}_o^b$ 代替, 可得 $x_o \in SE(3)$ 表示的动力学方程 (见 2.1 节)。通过令 M_o 、 C_o 和 N_o 为零, 也可建立无物体时的动力学方程, 它适用于只希望控制机器人以末端执行器坐标表示的轨迹情况。最后, 在某些情况下, 可以放宽 $J(\theta)$ 是方阵的假设, 详细讨论见第 3 节。

此类问题与抓取的主要区别是没有内力 (因为 $G = I$ 不存在零空间)。

位置/力混合动力学

另一种常见的操作任务是既要使机器人沿某些方向运动, 同时又要能在另一些方向施加推力。例如对于在黑板上写字的任务: 它包括在黑板平面内的运动要求和对黑板施加力的要求。第四章已对此类问题讨论过。下面利用本章前面介绍的方法对此作全面的论述。

为分析该系统的运动关系, 假设末端执行器满足下列完整约束

$$h(\theta, x) = 0 \quad (6.27)$$

式中 $x \in \mathbb{R}^p$ 表示机器人的可行运动参数。例如, 当在黑板上写字时, x 可以表示粉笔在黑板上的位置和姿态 (相对于某个局部坐标系)。更为一般的情况, $h(\theta, x)$ 表示机器人位形空间中的 p 维曲面。任务的描述包括沿此曲面的运动以及对此曲面所作用的广义力。

将式 (6.27) 对时间求导, 可转化为一般问题

$$\frac{\partial h}{\partial \theta} \dot{\theta} = - \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} \quad (6.28)$$

如前所述, 假设 J 是方阵且非奇异表明不存在内部运动, 且机器人不处于与任务有关的奇异位形。内力对应于 $GJ^{-T}\tau = 0$ 的关节力矩 τ , 由此产生作用于约束曲面上的力。

为建立机构的动力学公式, 假设机器人所抓的物体考虑在机器人动力学方程中, 因此

$$\tilde{M}(q)\ddot{x} + \tilde{C}(q, \dot{q})\dot{x} + \tilde{N}(q, \dot{q}) = F$$

式中

$$\begin{aligned} \tilde{M} &= GJ^{-T}M_fJ^{-1}G^T \\ \tilde{C} &= GJ^{-T}\left(C_fJ^{-1}G^T + M_f\frac{d}{dt}(J^{-1}G^T)\right) \\ \tilde{N} &= N_o + GJ^{-T}N_f \\ F &= GJ^{-T}\tau \end{aligned}$$

将物体动力学方程与机器人动力学方程组合在一起的原因是, 在许多应用场合 $x \in \mathbb{R}^p$ 实际上并不对应于物体的位形。例如在黑板上写字的例子中, x 仅表示两个移动速度, 如果黑板不是平面而是曲面, 那么由 x 来正确表示物体动力学就会变得更加复杂。

如抓取时的讨论, 内力并不影响运动方程, 因此只有当研究自由运动时, 才可忽略内力。如果内力无需控制或调整, 那么可由拉格朗日乘子求得。

此问题可以有几种不同的处理方法。经对速度和加速度的适当整理, 在描述约束于 SE

(3) 子群的运动时, 可以放宽使用局部坐标系的要求。另外, 任务的描述无需是完整约束的形式。对于某些问题, 可以根据 J 和 G 直接建立运动学关系。

3 冗余度机器人系统和不可操作机器人系统

为完成给定的操作任务, 机器人必须具有足够的自由度。在前面的分析中, 均假设机器人的自由度数正好等于完成任务所需要的自由度数, 也就是说, 假设每一手指能跟随物体实现任意可行的轨迹, 而手指的自由度是按接触类型确定的 (即: 无摩擦点接触时为一个自由度, 有摩擦点接触时为三个自由度, 软指接触时为四个自由度)。所以在前面推导动力学方程时, 需假设 J_h 为可逆方阵。下面将这些要求放宽, 并讨论放宽后的结果。

J_h 不是方阵或不可逆有两种情况:

1) 机器人的自由度太多。此时 J_h 中至少有两列是线性相关的, 从而在保持接触位置固定不变的情况下允许有内部运动。

2) 机器人的自由度太少。若 J_h 不是行满秩的, 手指就不可能随接触点作任意运动, 这样也就潜在地限制了物体的运动。即使抓取是可操作的, 仍可能存在这种情况。

这两种情况是截然不同的, 但机器人却可能既存在内部运动又是不可操作的。对于任何情况, 都可通过增加或减少描述任务的变量数目将问题转化为前一节讨论的基本形式。

如前所述, 本章内容不仅可用于多指手, 而且也适用于许多其它约束系统。习题中给出了几种此类例子。

3.1 冗余度机器人的动力学

与通常的机器人不同, 有约束机器人机器人在存在冗余度情况下其自由度可以不超过六个。约束本身将运动冗余引入了系统。例如, 如果一个六自由度手指与物体构成软指接触, 那么就引入了两个冗余自由度: 手指可以在两个方向上自由滚动而不会影响物体的位置。因此, 在建立有关公式时有必要考虑冗余度机构。

约束引入了两类冗余度: 运动冗余度和驱动冗余度。运动冗余度是指不影响物体运动的手指运动; 驱动冗余度是指不影响物体运动的手指作用力, 即内力。抓取约束

$$J_h(\theta, x)\dot{\theta} = G^T(\theta, x)\dot{x}$$

包含了决定这些冗余度的必要信息: J_h 的零空间描述了不影响物体运动的关节运动集合, G 的零空间就是内力空间。因前面已经讨论了内力, 所以下面仅讨论运动冗余度。

首先考虑无约束单个冗余度机器人的运动关系。如果是在关节空间控制机器人, 那么前面的动力学方程无需修改即可使用。但如果任务是用末端执行器的位形来表示的, 则必须首先选择完成该任务的关节运动轨迹。假设控制规则直接用末端执行器坐标表示。将运动关系表示为函数 $g: \mathcal{R}^n \rightarrow SE(3)$ 。此时机器人的雅可比矩阵 $J(\theta) := J_g(\theta) \in \mathcal{R}^{p \times n}$ 不是方阵, 所以不存在 J^{-1} , 不能用 V_g 来表示 $\dot{\theta}$ 。

也可以将冗余度机器人的动力学方程写成前面导出的形式。为此, 定义矩阵 $K(\theta) \in \mathcal{R}^{(n-p) \times n}$, 其各行张成 $J(\theta)$ 的零空间。假设 $J(\theta)$ 是行满秩的, 则 $K(\theta)$ 的秩为 $n-p$ 。 $K(\theta)$ 的行是不产生末端执行器运动的速度空间的基元素, 因此可用下式定义内部运动 $v_N \in \mathcal{R}^{n-p}$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ v_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ K \end{bmatrix} \dot{\theta} =: \bar{J} \dot{\theta}$$

根据定义, $\bar{J}$ 是可逆阵, 由前面的推导得

$$\tilde{M}(q) \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{v}_N \end{bmatrix} + \tilde{C}(q, \dot{q}) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v}_N \end{bmatrix} + \tilde{N}(q, \dot{q}) = \bar{J}^{-T} \tau$$

式中 $\tilde{M}$ 和 $\tilde{C}$ 根据非冗余情况确定, 但用 $\bar{J}$ 代替 J , 用 I 代替 G

$$\tilde{M} = \bar{J}^{-T} M \bar{J}^{-1}$$

$$\tilde{C} = \bar{J}^{-T} \left(C \bar{J}^{-1} + M \frac{d}{dt} (\bar{J}^{-1}) \right)$$

$$\tilde{N} = N_o + \bar{J}^{-T} N_f$$

如果选择 K 使其各行为标准正交, 并同时与 J 的行垂直, 则 $\bar{J}^{-1} = [J^+ \ K^T]$, 其中 $J^+ = J^T (JJ^T)^{-1}$ 是 J 的最小平方右 (伪) 逆。

注意是用速度而不是新变量 y 来表示系统的内部运动。因 K 的各行张成 $J(\theta)$ 的零空间, 所以不存在满足 $y = h(\theta)$ 和 $\frac{\partial h}{\partial \theta} = K$ 的函数 h 。存在这样的 h 的充分必要条件是 K 的各行满足 $\frac{\partial K_{ij}}{\partial \theta_k} = \frac{\partial K_{ik}}{\partial \theta_j}$, 这仅表明 h 的偏导数必须能交换。对此的全面处理见第七章, 下面以一实例对此作简要说明。

一般, $K(\theta)$ 的选择并不容易, 因为它是某个函数的导数。由于这个原因, 所以不能认为可以获得各种内部运动的参数表示。因此, 采用与模拟约束时利用速度关系相同的方法, 对于冗余度机器人也可用速度关系。用拉格朗日-达朗伯方程可以毫无困难地处理此类问题。

例 6.3 三连杆平面机器人

考虑图 6.5 所示各杆为单位长度的三连杆平面机器人。设 (x, y) 表示末端执行器的位置, 则有

$$x = \cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3$$

$$y = \sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \sin \theta_3$$

式中各连杆转角均相对于固定的惯性轴度量。映射 $\theta \rightarrow (x, y)$ 的雅可比矩阵为

$$J(\theta) = \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 & -\sin \theta_2 & -\sin \theta_3 \\ \cos \theta_1 & \cos \theta_2 & \cos \theta_3 \end{bmatrix}$$

$K(\theta)$ 有多种选择。若取

$$K(\theta) = [0 \ 0 \ 1]$$

那么 $K = \frac{\partial h}{\partial \theta}$ 且 $h(\theta) = \theta_3$, 它对应于表示内部运动的末端执行器角度。只有当 $\theta_1 \neq \theta_2$ 时 (即前两个连杆不能拉直共线), $K(\theta)$ 的这种选择才是有效的。另一方面, 如果取

$$K(\theta) = [\sin(\theta_2 - \theta_3) \quad -\sin(\theta_1 - \theta_3) \quad \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

则只有当三个连杆均不在同一直线上时, $K(\theta)$ 的这种选择才是有效的。此时

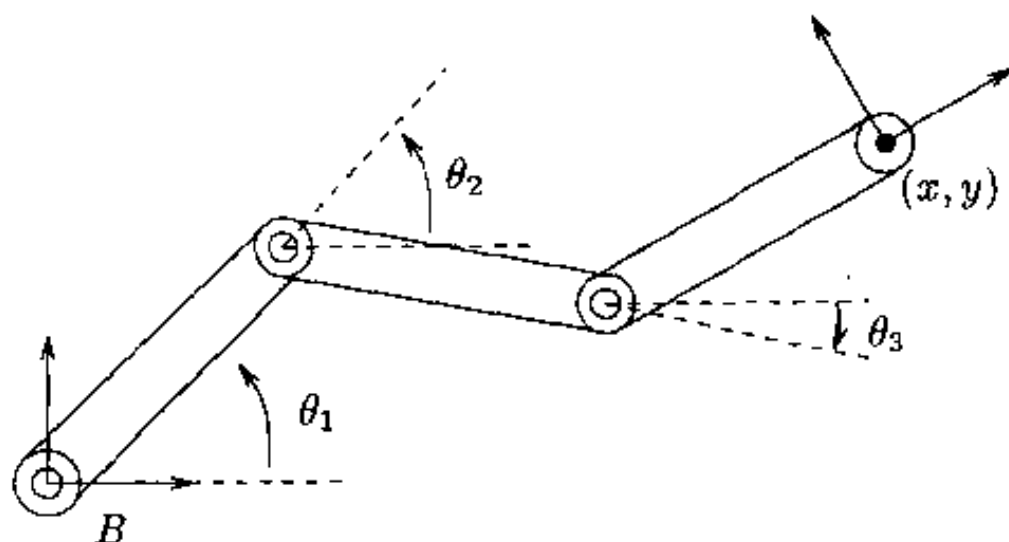


图 6.5 三连杆平面机器人
[各关节转角相对于水平轴度量]

$$\frac{\partial K_1(\theta)}{\partial \theta_2} = \cos(\theta_2 - \theta_3) \neq -\cos(\theta_1 - \theta_3) = \frac{\partial K_2(\theta)}{\partial \theta_1}$$

因此不存在满足 $\frac{\partial h}{\partial \theta} = K$ 的 h ，并且速度 $v_N = K(\theta)\dot{\theta}$ 不是变量 y 的导数

下面建立以 x 、 y 和 v_N 表示的系统运动方程。设 $M(\theta)$ 为在关节空间表示的机器人惯性矩阵， $C(\theta, \dot{\theta})$ 为相应的哥氏矩阵。为简化起见，不考虑有势力和非保守力。以末端执行器坐标表示的机构动力学方程为

$$(\bar{J}^{-T} M \bar{J}^{-1}) \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{v}_N \end{bmatrix} + \left(\bar{J}^{-T} C \bar{J}^{-1} + \bar{J}^{-T} M \frac{d}{dt} (\bar{J}^{-1}) \right) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{v}_N \end{bmatrix} = \bar{J}^{-T} \tau \quad (6.29)$$

式中

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} J(\theta) \\ K(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 & -\sin\theta_2 & -\sin\theta_3 \\ \cos\theta_1 & \cos\theta_2 & \cos\theta_3 \\ \sin(\theta_2 - \theta_3) & \sin(\theta_3 - \theta_2) & \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{bmatrix}$$

下面回到一般情况，并考虑整个抓取约束。考虑速度约束为以下形式的力封闭且可操作的抓取

$$J_h \dot{\theta} = G^T \dot{x}$$

其中 $N(J_h) \neq 0$ 。如前所述，通过选择行张成 $J_h(\theta)$ 零空间的矩阵 $K_h(\theta)$ 来扩大约束。此时抓取约束可表示为

$$\underbrace{\begin{bmatrix} J_h \\ K_h \end{bmatrix}}_{\bar{J}_h} \dot{\theta} = \underbrace{\begin{bmatrix} G^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{\bar{G}^T} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v}_N \end{bmatrix}$$

式中 $\bar{J}_h$ 和 $\bar{G}$ 分别表示手的增广雅可比矩阵和增广抓取矩阵。该约束的形式与标准（非冗余）抓取约束相同，并且 $\bar{J}_h$ 的结构决定了其是可逆的。因此可将动力学方程写为

$$\tilde{M}(q) \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{v}_N \end{bmatrix} + \tilde{C}(q, \dot{q}) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v}_N \end{bmatrix} = \bar{G} \bar{J}_h^{-T} \tau \quad (6.30)$$

式中

$$\tilde{M} = \bar{G} \bar{J}_h^{-T} M \bar{J}_h^{-1} \bar{G}^T$$

$$\tilde{C} = \bar{G} \bar{J}_h^{-T} \left(C \bar{J}_h^{-1} \bar{G}^T + M \frac{d}{dt} (\bar{J}_h^{-1} \bar{G}^T) \right)$$

由此看出，冗余度机器人可以组合成与其他机器人系统相同的基本结构。由于是采用确定系统运动的参数 x 来表示任务的，所以需扩大系统的描述。由于机构存在冗余度，所以仅有 x 是不能提供确定系统运动的足够信息的。在任务描述中增加变量 v_N 是为了能完整地表示系统的运动。

最后一个问题是冗余度抓取时关节力矩与物体力螺旋之间的关系。第五章已导出了关节力矩、接触力和物体力螺旋之间的静态关系。这些关系可用于确定如何通过手指对物体施加能抵抗外力的推力。

考虑上述一般的抓取情况。转换为运动螺旋的运动约束具有如下形式

$$\begin{bmatrix} J_h \\ K_h \end{bmatrix} \dot{\theta} = \begin{bmatrix} G^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{po}^b \\ v_N \end{bmatrix}$$

式中 $V_{po}^b \in \mathbb{R}^p$ 为物体速度, $v_N \in \mathbb{R}^{n-p}$ 为内部运动速度。有关的准静态力满足

$$\tau = \begin{bmatrix} J_h^T & K_h^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_c \\ f_N \end{bmatrix} \quad F_{po}^b = G f_c \quad (6.31)$$

其中 f_N 为与内部运动 v_N 相对应的力。如果将这些力都取为零, 那么可得关节力矩与物体力螺旋之间的通用力关系。

如果力 f_N 不取为零, 则机器人将开始执行内部运动, 该运动将导致机器人关节的加速运动, 并且此时不能再用力关系 (6.31) 来表示系统的力关系, 而且必须将系统的完整运动看作是式 (6.30)。尤其是系统的内部运动将产生约束力, 因此式 (6.31) 所表示的关系不再正确。这种情况在非冗余度系统中是不会出现的, 因为对于非冗余度系统, 如果末端执行器固定不动, 那么所有关节也就固定不动, 从而不存在动力项。

3.2 不可操作抓取

现在考虑手的雅可比矩阵不是行满秩的情况。这种情况下手指不能实现接触处的某些运动。假设手的雅可比矩阵是列满秩的, 如果不是列满秩的, 那么本小节的方法就可用于考虑包括适当内部运动速度的抓取。

在大多数情况下, 如果手的雅可比矩阵不是行满秩的, 那么抓取是不可操作的。然而对于一些特殊情况, 多指抓取既是可操作的又是非冗余的, 而且 J_h 不是方阵, 当抓取的结构使得 J_h 为 G^T 值域上的双射但不是 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 的满射时, 即出现这种情况。当然实际应用中是不会出现这种情况的, 因此下面主要讨论 J_h 为不可操作的情况。

为了处理不可操作情况, 必须将物体的运动限制在手指能适应的范围。这种限制是由手的结构力产生的, 它使得系统只能在手指的运动方向上运动。通常, 在建立公式时总假设能保持接触, 因此接触力始终位于摩擦锥内。在确定控制规则时必须始终保证此条件成立。

考虑抓取约束为如下形式的不可操作抓取:

$$J_h \dot{\theta} = G^T \dot{x}$$

设 $W(\theta, x)$ 表示物体可行的速度空间, 即

$$W(\theta, x) = \{ \dot{x} \in \mathbb{R}^p : \exists \dot{\theta} \in \mathbb{R}^m, J_h \dot{\theta} = G^T \dot{x} \}$$

假设 $W(\theta, x)$ 的维数 $l > 0$ 固定, 并光滑变化, 取矩阵 $H(\theta, x) \in \mathbb{R}^{p \times l}$, 其各列张成 $W(\theta, x)$, 因此可将抓取约束表示为

$$J_h \dot{\theta} = G^T H w \quad (6.32)$$

$$\dot{x} = H w$$

式中 $w \in \mathbb{R}_l$ 是由 H 的列为基表示的物体速度。

为建立运动方程, 以速度 $w \in \mathbb{R}_l$ 表示动力学方程。由 J_h 的结构可知, J_h 是 $\bar{G}^T := G^T H$ 值域上的满射, 因此可以根据给定的 w 求得 $\dot{\theta}$ 。然而未要求 J_h 是方阵, 所以必须用伪逆 $J_h^+ = (J_h^T J_h)^{-1} J_h^T$ 代替 J_h^{-1} 。由此得如下动力学方程。

$$\tilde{M}(q) \dot{w} + \tilde{C}(q, \dot{q}) w + \tilde{N}(q, \dot{q}) = F \quad (6.33)$$

其中 $q = (\theta, x)$, 且

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{M}} &= \mathbf{M}_o + \bar{\mathbf{G}}\mathbf{J}_h^{+T}\mathbf{M}_f\mathbf{J}_h^+\bar{\mathbf{G}}^T \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \mathbf{C}_o + \bar{\mathbf{G}}\mathbf{J}_h^{+T}(\mathbf{C}_f\mathbf{J}_h^+\bar{\mathbf{G}}^T + \mathbf{M}_f\frac{d}{dt}(\mathbf{J}_h^+\bar{\mathbf{G}}^T)) \\ \tilde{\mathbf{N}} &= \mathbf{N}_o + \bar{\mathbf{G}}\mathbf{J}_h^{+T}\mathbf{N}_f \\ \mathbf{F} &= \bar{\mathbf{G}}\mathbf{J}_h^{+T}\boldsymbol{\tau}\end{aligned}$$

式中 $\mathbf{J}_h^{+T}$ 是 $\mathbf{J}_h^+$ 的转置。式 (6.33) 为包含一阶约束式 (6.32) 的二阶动力学方程, 它给出了系统运动的完整描述。

3.3 实例: 两个 SCARA 手指的抓取

为说明本节的结论, 考虑图 6.6 所示两个 SCARA 手指抓取一个盒子的动力学。每个手指为软指接触。系统的基本抓取约束为

$$\underbrace{8}_{\substack{\left[\begin{array}{cc} \mathbf{J}_{h1} & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_{h2} \end{array} \right]}} \dot{\boldsymbol{\theta}} = \underbrace{\left[\begin{array}{c} \mathbf{G}_1^T \\ \mathbf{G}_2^T \end{array} \right]}_{\substack{8}} \mathbf{V}_{po}^b$$

虽然 $\mathbf{J}_h(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$ 是方阵, 但却是不可逆的。第五章第 5.3 节已证明这种抓取是不可操作的, 并含有内部运动。导致不可操作的原因是由于绕接触点连线的转动破坏了软指接触约束。与每一手指前三个关节运动相对应的内部运动使指端的 xy 位置固定不变。

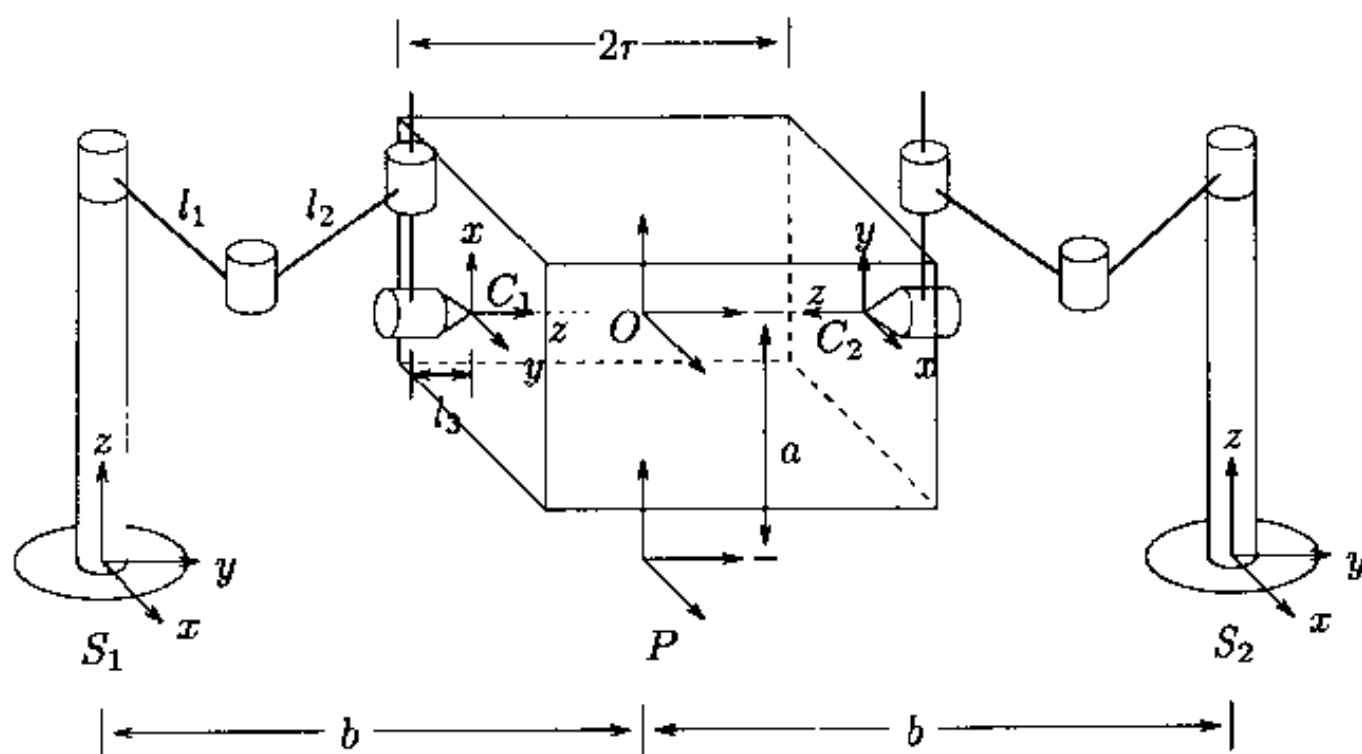


图 6.6 采用两个 SCARA 机器人的两指抓取

为表示系统的内部运动, 利用手指最后一个关节角度将系统扩大, 如例 6.3。设 $\mathbf{y} = (\theta_{11} + \theta_{12} + \theta_{13}, \theta_{21} + \theta_{22} + \theta_{23})$, 则接触约束为

$$\underbrace{10}_{\substack{\left[\begin{array}{cc} \mathbf{J}_{h1} & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_{h2} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]}} \dot{\boldsymbol{\theta}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} \mathbf{G}_1^T & 0 \\ \mathbf{G}_2^T & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{array} \right]}_{\substack{8}} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{po}^b \\ \dot{\mathbf{y}} \end{bmatrix}$$

注意本例可以选择实际变量来表示内部运动而不单是速度。

内部变量的增加并不能改变抓取的不可操作特性,这是因为 J_h 还不能张成 G^T 的值域空间。由于物体绕接触点连线的转动是困难之所在,所以应从系统的可行速度中消去这些方向。取

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H' & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

接触方程为

$$10 \underbrace{\begin{bmatrix} J_{h1} & 0 \\ 0 & J_{h2} \\ K_1 & K_2 \end{bmatrix}}_8 \dot{\theta} = \underbrace{\begin{bmatrix} G_1^T H' & 0 \\ G_2^T H' & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_7 \begin{bmatrix} w' \\ y \end{bmatrix}$$

式中 $V_{pc}^b = H'w'$ 位于物体的可行速度集合。详细的计算表明此约束是可操作的,并且不存在内部运动。下面可以求解以工作空间变量 $w = (w', y) \in \mathcal{R}^7$ 表示的系统动力学方程,因 J_h 是 G^T 的值域上的满射且不是方阵,所以必须使用 $\bar{J}_h$ 的伪逆。

4 腱驱动的运动学和静力学

在机器人的许多应用中,由于驱动器(actuators)尺寸的原因,难以直接用于控制关节处的力矩。一种切合实际的方法是利用传动链将驱动器的动力传至适当的关节处。这样的传动链通常由连杆、腱、齿轮和滑轮组成。

本节考虑较为常用的一种传动系统——腱络传动。腱具有重量轻和柔韧性好的优点,但却使机构的运动学关系复杂化。下面研究的基本问题是建立腱端部的作用力与关节力矩之间的关系,同时也考虑不太常用的由位置控制驱动器(如步进电动机)驱动的弹性腱。

4.1 无弹性腱

考虑由一组无弹性腱(inelastic tendons)驱动的手指,如图6.7所示。每个腱由与力发生器(如直流电动机)相联的不可伸长的绳索组成。为简化起见,假设每个“腱/驱动器对”联接

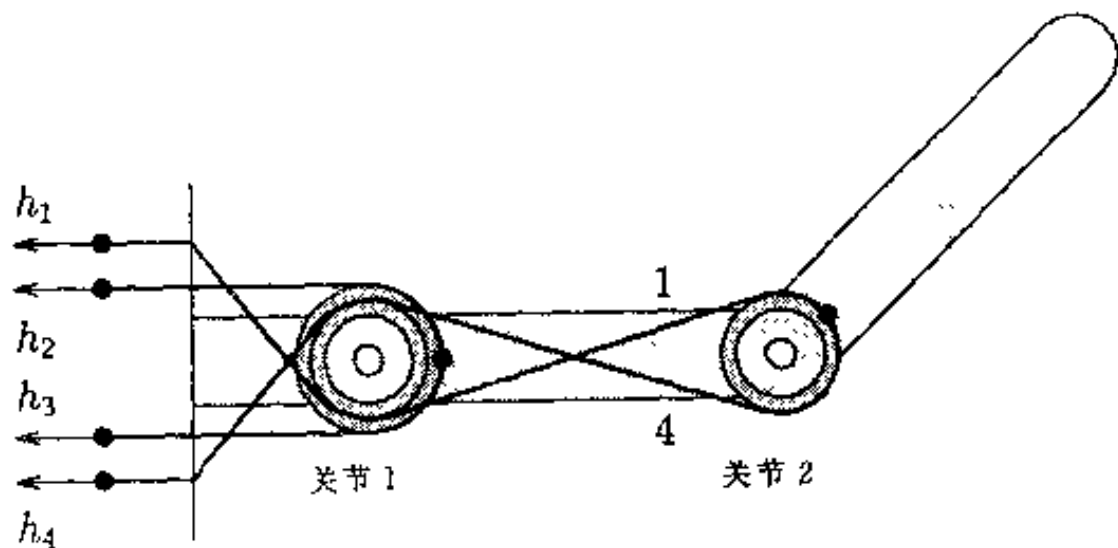


图 6.7 腱驱动手指

在手的基座与手指的连杆之间，或者是手指的两个连杆之间。腱与腱之间不允许相互联接。希望建立腱端部的作用力与关节力矩之间的关系。

应注意虽然每个腱仅与一个连杆相联，但拉动腱时可能会对多个关节产生作用力，这是因为在拉动腱时，沿腱的整个长度上都作用有力，并且传至对腱起支撑作用的零件上。若没有合适的腱传输路径，这种耦合是难以消除的。

用位移函数 $h_i: Q \rightarrow \mathcal{R}$ 来表示每个腱的工作状态。位移函数 extension function 是度量腱端部的位移与手指关节转角之间关系的函数。对于由滑轮组成的简单腱，如图 6.7 所示，腱的位移量为关节转角的线性函数

$$h_i(\theta) = l_i \pm r_{i1}\theta_1 \pm \cdots \pm r_{in}\theta_n$$

式中 l_i 是 $\theta = 0$ 时的基本位移量， r_{ij} 为第 j 个关节处滑轮的半径。当角度为正时，式中的符号取决于腱是伸长还是缩短。

更为复杂的腱驱动含有关节转角的非线性函数。例如对于图 6.8 所示的关节，位于上方的腱的位移函数为

$$h_1(\theta) = l_1 - 2\sqrt{a^2 + b^2} \cos\left(\arctan\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{\theta}{2}\right) - 2b \quad \theta > 0$$

而下方的腱满足

$$h_2(\theta) = l_2 + R\theta \quad \theta > 0$$

当 $\theta < 0$ 时，上下方腱的位移关系互换。

一旦求得腱位移函数，即可根据能量守恒确定腱力和关节力矩之间的关系。设 $e = h(\theta) \in \mathcal{R}^p$ 表示具有 p 个腱的系统中腱的位移矢量，并定义矩阵 $P(\theta) \in \mathcal{R}^{n \times p}$ 为

$$P(\theta) = \frac{\partial h^T}{\partial \theta}(\theta)$$

那么

$$\dot{e} = \frac{\partial h}{\partial \theta}(\theta) \dot{\theta} = P^T(\theta) \dot{\theta}$$

因腱所作之功必须等于手指所作之功（在无摩擦和其它损失的情况下），所以可利用能量守恒推得

$$\tau = P(\theta)f$$

式中 $f \in \mathcal{R}^p$ 为腱端部的作用力矢量。矩阵 $P(\theta)$ 称为耦合矩阵 (coupling matrix)，其作用类似于第五章定义的抓取映射。

将腱传动的运动学关系与机构的动力学关系加以组合，即得

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + N(\theta, \dot{\theta}) = p(\theta)f$$

上式是在忽略驱动器和腱动力学的前提下得到的，因此腱端部的作用力通过耦合矩阵立即传

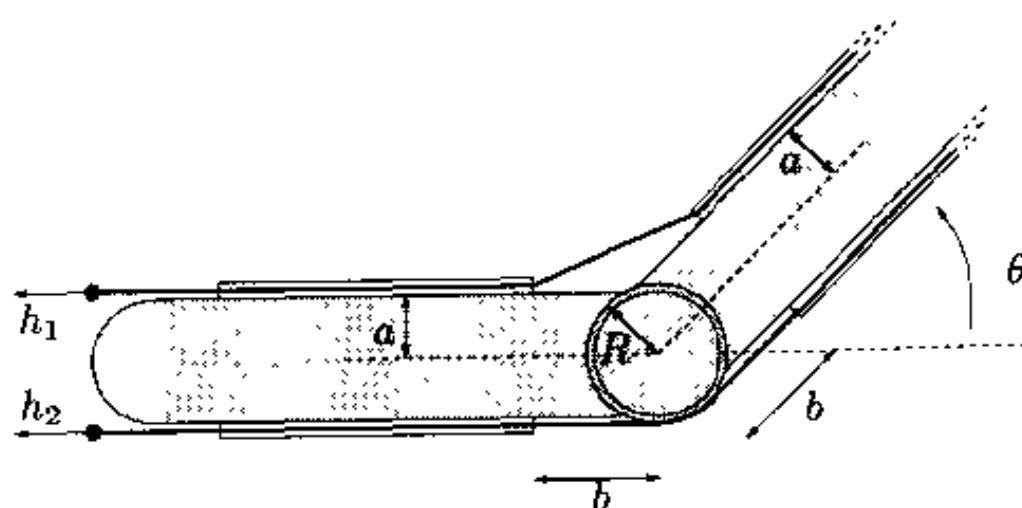


图 6.8 具有非线性位移函数的腱实例

递至关节。

例 6.4 二杆腱驱动手指

作为一个实例, 考虑图 6.9 所示的平面手指, 它包括由四个腱驱动的两个转动关节。腱穿过固定于连杆侧面的套管。与第一个关节相联的两个腱穿过半径为 R_1 的滑轮, 因此位移函数为

$$h_2 = l_2 - R_1 \theta_1$$

$$h_3 = l_3 + R_1 \theta_1$$

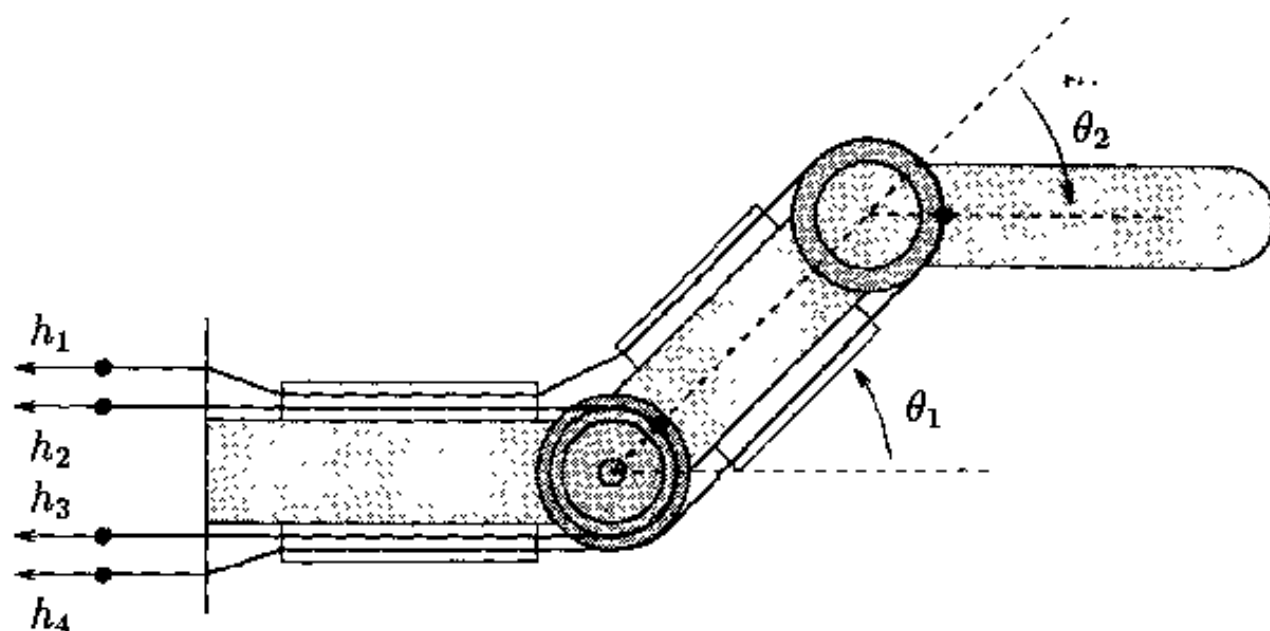


图 6.9 平面腱驱动手指

由于远端连杆的腱需穿过套管, 所以腱的运动关系较复杂。其位移函数为

$$h_1 = l_1 + 2\sqrt{a^2 + b^2} \cos(\arctan\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{\theta_1}{2}) - 2b - R_2 \theta_2 \quad \theta_1 > 0$$

$$h_4 = l_4 + R_1 \theta_1 + R_2 \theta_2$$

当 $\theta_1 < 0$ 时, 上述 h_1 、 h_4 的关系互换。

手指的耦合矩阵可直接由位移函数计算。当 $\theta_1 > 0$ 时,

$$\mathbf{P}(\theta) = \frac{\partial \mathbf{h}^T}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{a^2 + b^2} \sin(\arctan(a/b) + \theta_1/2) & -R_1 & R_1 & R_1 \\ 0 & 0 & -R_2 & R_2 \end{bmatrix}$$

注意当拉动经过外关节的腱 (腱 1 和腱 4) 时, 将对第一个关节和第二个关节均产生力矩。

4.2 弹性腱

上述运动学的分析过程也可推广用于弹性腱 (elastic tendons)。假设腱可以在手指上自由滑动, 这样可以将腱的弹性综合为位于腱根部的一个弹簧元件, 如图 6.10 所示。进一步假设腱是无质量的, 从而也就不存在动力学问题。实际上, 由于腱传动的速度通常要比相应机器人快得多, 所以作上述近似是可行的。

由于腱是一维系统, 针对无弹性腱导出的力关系在弹性腱情况下也是适用的。为说明为什么可以这样考虑, 现分析腱端部作用力的瞬时效应。假设腱的质量可以忽略不计, 当腱因位移而产生的力与腱上所作用的外力相等时, 即达到了力平衡。但同时腱也对机构作用同样大小的力。因此, 前面的分析成立。

当用弹性腱时,可以对腱末端的位置进行控制,并可将腱的弹性变形量转换为力。设 e_i 表示由驱动器控制的腱位移, $h_i(\theta)$ 表示由于机构而产生的腱位移。假设当 $\theta = 0$ 和 $e_i = 0$

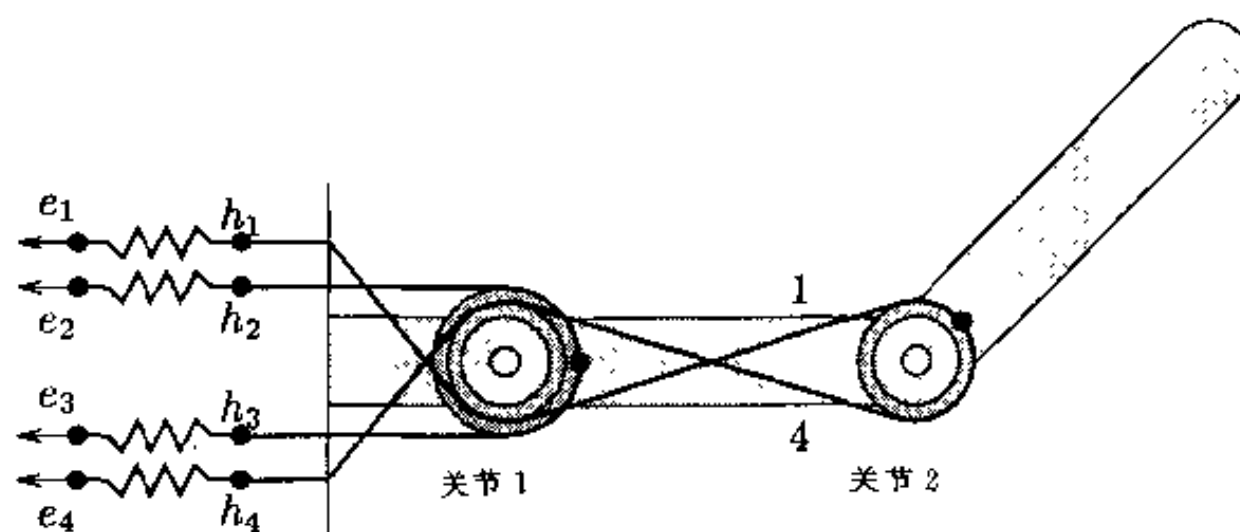


图 6.10 具有位置控制弹性腱的平面手指

时腱的位移为零,则作用于腱上的力为

$$f_i = k_i(e_i + h_i(0) - h_i(\theta))$$

式中 k_i 为腱的刚度。

设 K 为腱的对角刚度矩阵,则对于变形为 e 的弹性腱传动系统,有

$$f = K(e + h(0) - h(\theta))$$

动力学方程为

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + N(\theta, \dot{\theta}) + PK(h(\theta) - h(0)) = PKe$$

其中函数 $S(\theta) := PK(h(\theta) - h(0))$ 表示腱传动系统的刚度, $Q := PK$ 为腱位移与对应关节力矩之间的新的耦合矩阵。如果输入位移恒定,那么 $S(\theta)$ 即为因手指弯曲偏离平衡位置而产生的恢复力。

关于腱的力和位置混合控制见习题。

例 6.5 弹性腱手指的耦合矩阵

考虑图 6.10 所示例子,位移函数为

$$h_1 = l_1 + r_{11}\theta_1 - r_{12}\theta_2$$

$$h_2 = l_2 - r_{21}\theta_1$$

$$h_3 = l_3 + r_{31}\theta_1$$

$$h_4 = l_4 - r_{41}\theta_1 + r_{42}\theta_2$$

式中 r_{ij} 是第 j 个关节的第 i 个腱处滑轮的半径。耦合矩阵为

$$P(\theta) = \frac{\partial h^T}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} r_{11} & -r_{12} & r_{31} & -r_{41} \\ -r_{12} & 0 & 0 & r_{42} \end{bmatrix}$$

因所有位移函数都是线性的,所以耦合矩阵是定常矩阵。

为建立驱动器位移与关节力矩之间的关系,利用刚度矩阵。

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$$

式中 k_i 为第 i 个腱的刚度。总刚度为

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{PK}(\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{h}(0))$$

$$= \begin{bmatrix} k_1 r_{11}^2 + k_2 r_{21}^2 + k_3 r_{31}^2 + k_4 r_{41}^2 & -k_1 r_{11} r_{12} - k_4 r_{41} r_{42} \\ -k_1 r_{11} r_{12} - k_4 r_{41} r_{42} & k_1 r_{12}^2 + k_4 r_{42}^2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta}$$

驱动器位移与关节力矩之间的耦合转矩为

$$\mathbf{Q} = \mathbf{PK} = \begin{bmatrix} k_1 r_{11} & -k_2 r_{21} & k_3 r_{31} & -k_4 r_{41} \\ -k_1 r_{12} & 0 & 0 & k_4 r_{42} \end{bmatrix}$$

4.3 腱驱动手指的分析与控制

采用腱传动的一个特征是所有腱的位移必须是严格正的，因此 $\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})$ 的列正张成所能施加的所有力矩的集合，这类似于无摩擦点接触时的抓取，并且同样的方法可用于腱传动系统运动学特性的分析。

腱驱动机器人的控制规则就是计算因腱上所作用的力而产生的关节力矩 $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ 。如果对于任意的 $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ ，都存在满足下式的力的集合 $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^p$ ，

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{f} = \boldsymbol{\tau} \quad f_i > 0, i = 1, \dots, p \quad (6.34)$$

则认为腱传动是力封闭的。与抓取时的情况类似，腱传动为力封闭的充分必要条件是 $\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})$ 为满射，并且存在严格正的内力矢量 $\mathbf{f}_N \in \mathbb{R}^p$ ， $f_{N,i} > 0$ ，使得 $\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{f}_N = \mathbf{0}$ 成立。

根据第五章第4节的 Caratheodory 定理和 Steinitz 定理，可以确定构成力封闭腱传动所需腱的数目。Caratheodory 定理认为对于具有 n 个连杆的机器人，至少需要 $n+1$ 个腱来驱动它；而 Steinitz 定理认为超过 $2n$ 的腱都是多余的。事实上，这两种腱数目的界限对应于两种最常见的腱传动，分别称为“ $N+1$ ”腱结构和“ $2N$ ”腱结构。 $N+1$ 腱结构通常是用一个腱来驱动所有关节沿一个方向运动，另外用 n 个腱产生相反方向的力矩，分别驱使各关节沿相反方向运动。本节所有实例都是采用 $2N$ 结构，也就是在每个关节上联接有两个腱，分别沿相反两个方向运动。

对于由力控制装置驱动的腱传动，产生给定关节力矩矢量的腱力为

$$\mathbf{f} = \mathbf{P}^+(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\tau} + \mathbf{f}_N$$

式中 $\mathbf{P}^+ = \mathbf{P}^T(\mathbf{P}\mathbf{P}^T)^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 为耦合矩阵的伪逆， $\mathbf{f}_N \in N(\mathbf{P}) \cap \mathbb{R}_+^p$ 为保证所有腱位移为正的内力。在大多数情况下， $\mathbf{f}_N$ 应取得尽可能小，以使腱始终处于张紧状态，不受额外内力的影响。

可以采用同样的方法来处理带有位移控制驱动器的弹性腱情况，只是必须求解下列方程

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{K}\mathbf{e} = \boldsymbol{\tau} \quad e_i + h_i(0) - h_i(\boldsymbol{\theta}) > 0, i = 1, \dots, p \quad (6.35)$$

因 $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 是可逆刚度矩阵，如果腱传动是力封闭的，则存在位移矢量 $\mathbf{e}_N \in \mathbb{R}^p$ ，使得 $e_{N,i} > 0$ 和 $\mathbf{P}\mathbf{K}\mathbf{e}_N = \mathbf{0}$ 。通过选择具有足够大 $\mathbf{e}_N$ 的

$$\mathbf{e} = (\mathbf{PK})^+ \boldsymbol{\tau} + \mathbf{e}_N$$

则可保证满足约束式 (6.35)。

上述方法可推广用于刚性腱和弹性腱混合传动情况，也可用于机器人两连杆间的腱传动。此类应用见习题。

5 机器人手的控制

本节主要讨论多指机器人手的控制问题,并说明如何将第四章介绍的控制规则推广用于抓取和其他协调操作任务的控制。另外,受生物驱动控制系统控制机理的启发,给出复合控制器 (complex controllers) 的一些设计思想。

5.1 扩展的控制规则

对于有约束的操作问题,可以将控制问题分为两个主要方面:

- 1) 跟踪给定的物体 (或工作空间) 轨迹;
- 2) 维持期望的内力。

假设所有物体和连杆都是刚性的,并已知其几何形状。上述两个方面的问题可以分开解决,首先计算满足轨迹跟踪要求的关节力矩,然后加上足够的内力使得接触力位于摩擦锥内,或者满足某些其它的力要求。

假设有约束机器人系统的动力学方程为如下形式

$$M(q)\ddot{x} + C(q, \dot{q})\dot{x} + N(q, \dot{q}) = F = GJ^{-T}\tau$$

其中 $q = (\theta, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ 。由本章前面内容可知,大多数系统可以用 $GJ^{-T}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ 为满射的上述方程来描述。此时 $x \in \mathbb{R}^p$ 代表位置变量, G 的零空间对应于内力 (假设 J 是可逆的)。除具有动力学的一般形式外,并可假设对于所有的 q , 有 $M(q) > 0$, 且 $\dot{M} - 2C$ 为反对称矩阵。对于本章所介绍的所有系统以及所定义的 J 和 G , 都具有这些性质。

轨迹跟踪问题就是求解使系统渐近跟踪给定工作空间轨迹 $x_d(\cdot)$ 的关节力矩。为解决该问题,可以将 F 直接看作是系统的输入。因 GJ^{-T} 是满射的,所以总可以求得实现该虚拟输入的一组力矩 τ 。又因 M 和 C 满足引理 6.1 的性质,所以可用开链机器人的任何一种控制规则来渐近跟踪轨迹 $x_d(t)$ 。

作为一个例子,可将有约束机器人系统的计算力矩控制规则表示为

$$F = M(q)(\ddot{x}_d - K_v\dot{e} - K_p e) + C(q, \dot{q})\dot{x} + N(q, \dot{q})$$

式中 $e := x - x_d$ 。注意此控制规则中的 $M(q)$ 与 (θ, x) 有关。在系统约束为完整约束的特殊情况下,可以忽略 $M(q)$ 对 θ 的依赖关系。但因收敛性的证明仅要求 $M(q)$ 是正定的, $\dot{M} - 2C$ 是反对称的,所以前面的所有证明这里都可以直接使用。

一旦 F 已经确定,那么关节力矩 τ 的选择应满足 $GJ^{-T}\tau = F$ 。由于 GJ^{-T} 是满射,所以总可求得这样的 τ , 但 GJ^{-T} 不必是单射的,因此存在能产生 F 的多个 τ 值。实际上因 J 是可逆的,多出的 τ 值与系统存在的内力相对应。 $GJ^{-T}\tau = F$ 解的一般形式为

$$\tau = J^T G^+ F + J^T f_N$$

式中 $G^+ = G^T (GG^T)^{-1}$ 是 G 的伪逆, $f_N \in N(G)$ 。因 $Gf_N = 0$, 所以 f_N 可任意选择而不会影响控制规则的轨迹跟踪特性。

多出的 τ 值可用于满足控制问题的第二个方面,即调整内力的大小。对于抓取问题, f_N 的选择必须满足接触力位于摩擦锥 FC 之内,这是一个非常重要的条件,因为全部公式都是建立在假设手指与物体保持接触的基础上 (在接触模型所决定的方向上)。对于其它类型问题,如协调提升,内力的调整并不是问题的关键,因为机械结构始终起着保证约束的作

用。在这种情况下,常取 $f_N=0$,以减小内力。

对于需要调整内力的情况,由于由驱动器产生的接触力并不是简单地由 G^+F+f_N 给出,因此使问题复杂化。系统的动态因素可能会产生附加的接触力,如 2.2 节的讨论。为确保接触力始终位于摩擦锥内,必须完整地考虑系统的动态因素,通过约束力的计算或测量可以做到这一点。

幸运的是对于许多问题,没有必要进行详细的内力分析。如果非准静态运动产生的约束力相对于期望的内力而言是比较小的话,则往往可以忽略不计。可以假设希望加以控制的期望内力已知为 $f_{N,d}(\cdot)$,约束的动态力忽略不计。这样最终的控制规则具有如下形式

$$\tau = J_h^T G^+ F + J_h^T f_{N,d}$$

式中 F 为满足轨迹跟踪要求的虚拟力 (virtual force)。

控制内力的第二种方法是测量内力,并利用第二种反馈控制规则来调整 f_N 。对于刚性机器人系统来说,由于进行着力的瞬时传递,并且与动力学无关,所以这样处理时要仔细,代数环 algebraic loop 的存在可能会导致控制问题出现病态 (ill-posed)。例如,考虑仅施加力的机器人,设 f 为所施加的力, f_d 为期望力,则调整力的比例控制规则为

$$f = \alpha(f - f_d)$$

对于 $\alpha \neq 0$,如果 $f = f_d = 0$,则该控制规则仅满足 $f = f_d$ 。对于其他的 f_d ,存在不满足要求的代数环。

克服该问题的一个常用方法是采用积分器。再设 f_d 为期望力,并取

$$f = f_d + \alpha \int (f - f_d) dt$$

此控制规则由一个前反馈 f_d 和一个积分补偿量组成。取 $f = (\text{integrator-wind up}) f_d$ 并不产生矛盾,因此该控制规则是良态的 (well-posed)。需注意的是,为避免因测量噪声 (measurement noise) 和积分漂移而产生的系统不稳定,积分器的增加应小心谨慎。这些问题的详细讨论可参阅控制工程方面的教材组,如 [3] 和 [34]。

5.2 多级控制结构

多指机器人手可看作是相互间以及与被操作物体间存在一组速度约束的多机器人系统。利用本章最前面给出的分析方法,可以将这些机器人与约束组合起来考虑,从而构成一个新的动力学系统。实际上,此过程可以自动实现:只要规定机器人与物体间的接触约束,利用符号算法程序即可导出复合机器 (composite robot) 的新的运动方程。

此类机器人系统控制器的设计是一个较为复杂的问题。尽管从概念上来说简单的,多指机器人手的控制器必须能够控制具有大量传感数据和多个控制目标的多自由度复杂系统。一个典型的手可以有 10~20 个驱动器,10~15 个约束,以及 30 维或更多维的状态空间。对于这样的一个系统,控制规则需具有 500Hz 或更高的运行频率才能获得可接受的结果。如果将此系统看作是一个单独的复合动力学系统,要做到计算控制力矩的时间在 2ms 以下常常是不可能的。

多自由度系统控制方面的困难也已引起生物力学领域的关注。人类生物驱动控制机理的研究使俄国心理学家 Bernstein 提出这样一个问题^[41]:大脑是如何按这样的复杂方式来控制具有如此多自由度的系统的!如此复杂的问题在机器人系统中也同样存在,由此限制了多指

手和其它机器人系统的应用。

本节后续内容将提出一种控制器设计可行方法,用于解决多自由度有约束机器人系统的控制问题,给出以多级控制方式来设计复合机器人控制器的基本思想,并讨论相应的控制结构。本节内容最初发表于 [76],更详细的过程可参阅此文。

定义机器人

整个系统由若干机构组成,下面利用机构间的几何约束来建立复合控制规则 (complex control laws)。将所有机构看作是一个广义物体 (generalized), 并称之为机器人。作为一个动力学系统,机器人的运动方程具有如下形式

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + N(q, \dot{q}) = F$$

式中 M 、 C 和 N 完全反映了机构的动力学性能。

除参数 (M , C , N) 外,机器人还有一组输入和输出参数。输入参数包括机器人的期望位置 x_d 和作用于机器人上的力 f_d 。输出参数是机构的实际位置 x 以及所测得的力 F 。某些机器人的输入、输出参数可以仅是其中的一部分。

各参数之间的关系取决于机器人本身的结构。例如,可用下列关系来描述一个待驱动开链机构

$$F = F_d$$

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + N(q, \dot{q}) = F$$

因此在给定作用于机器人上的力的情况下,机器人将按此方程运动。这里忽略不受控制机器人的期望轨迹输入 (在下面讨论控制器与机器人联接时,将用到此输入)。

除能描述待驱动机构 (actuated mechanisms) 外,机器人还能描述无动力输入的被动物体 (inanimate object)。此时忽略机器人的所有输入,而机器人的输出提供了物体当前位置和作用于其上力的信息。惯性参数 (M , C , N) 可用于表示物体的动力学性能。

利用所定义的称为机器人的广义物体,可以定义具有一个或多个广义机器人的操作,并构成一个新的广义机器人。下面定义两种这样的操作。为定义新的物体,必须定义惯性特性以及输入、输出的描述。这样循环定义的目的是使复合机器人能根据输入和输出的要求查询和控制其下级系统。

联接机器人

第一种操作定义为联接操作 (attach operation), 它反映了两个或多个机器人之间的几何约束,并根据其下级的属性构成一个新的机器人物体。这种定义是受到多个手指与物体相联接的启发,但其应用更为广泛。

有关联接操作的讨论主要是机器人(称之为手指)与物体(称之为负载)之间的联接关系问题。另外,给定手指位形参数与物体位形参数之间的约束。为简化起见,取约束的形式为 $h(\theta, x) = 0$, 其中 $\theta = (\theta_{f_1}, \dots, \theta_{f_k}) \in \mathbb{R}^n$ 是手指关节转角矢量, $x \in \mathbb{R}^p$ 是负载的位形。

为构造一个新的机器人,利用拉格朗日-达朗伯方程建立以负载变量 $x \in \mathbb{R}^p$ 表示的动力学方程。设 (M_f, C_f, N_f) (块对角) 为手指参数, (M_p, C_p, N_p) 为负载参数。有约束机器人的动力学参数为

$$\tilde{M} = M_p + GJ^{-T}M_fJ^{-1}G$$

$$\tilde{\mathbf{C}} := \mathbf{C}_p + \mathbf{G}\mathbf{J}^{-T}\mathbf{C}_f\mathbf{J}^{-1}\mathbf{G} + \mathbf{G}\mathbf{J}^{-T}\mathbf{M}_f \frac{d}{dt} (\mathbf{J}^{-1}\mathbf{G})$$

$$\tilde{\mathbf{N}} := \mathbf{N}_p + \mathbf{G}\mathbf{J}^{-T}\mathbf{N}_f$$

其中 $\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\theta}}$, $\mathbf{G}^T = -\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}$, 并假设 $\mathbf{J}$ 是可逆的。注意为计算当前位形的 $\tilde{\mathbf{M}}$, 可以先求出负载和每一手指的当前惯性矩阵, 然后利用约束将它们加以组合。

为获得复合机器人的位形, 应先求所有子机器人的状态, 然后通过对完整约束方程 $\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) = 0$ 的求解, 获得当前的负载位形。另外, 如果负载装有传感器 (可以是跟踪负载的外部摄象机), 则可利用由传感器获得的数据, 采用类似的计算或测量, 可以确定作用于物体上的力, 包括手指施加的接触力和环境施加的外力。

在对机器人进行期望位置和力控制时, 可以利用约束方程将有关信息分配给手指和负载。如果所有手指都是不受控制的待驱动机构, 那么期望力将加在驱动器上, 而期望位置不予考虑。

由联接操作构成的机器人中的数据流如图 6.11 所示。联接操作除可反映抓取约束外, 还可用于表示第 2.3 节所介绍的其他情况, 例如, 可将关节空间坐标变换为工作空间坐标, 或者增加一些变量来表示冗余度机器人的内部运动。

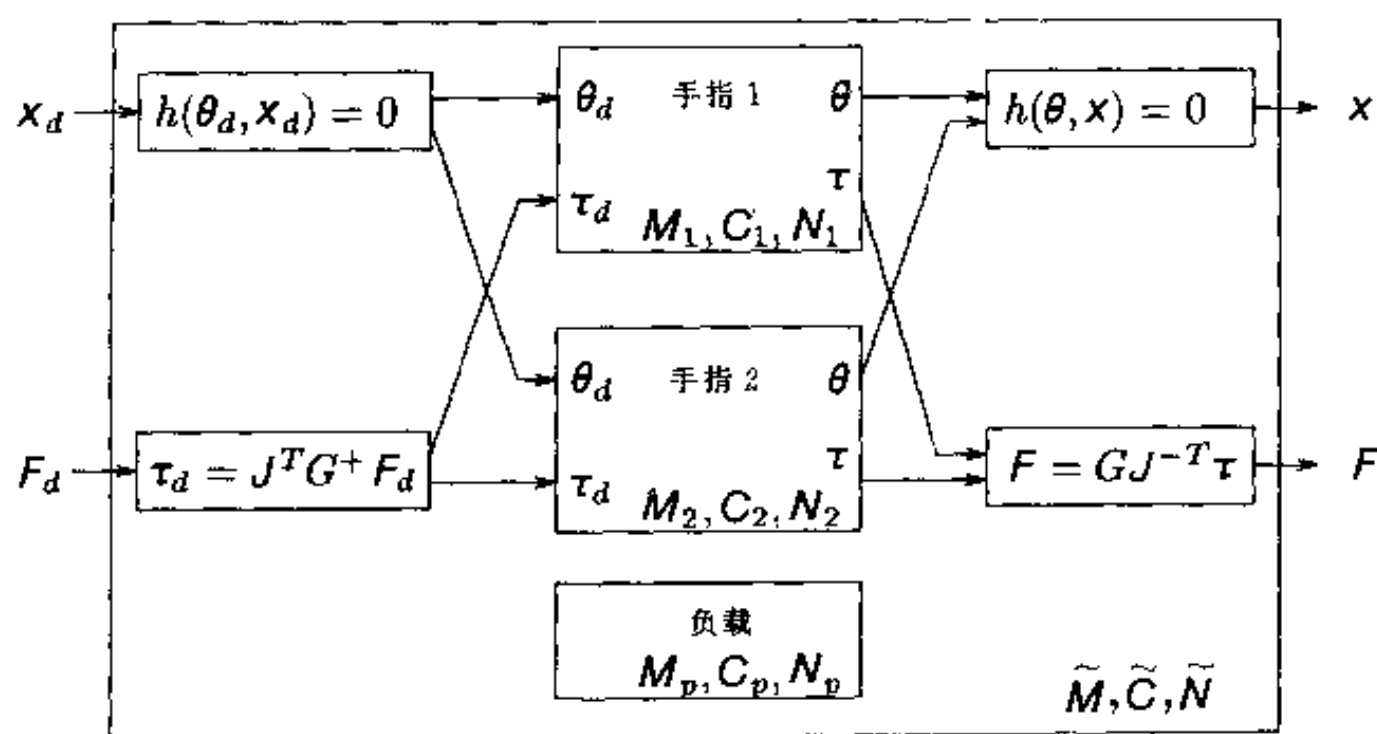


图 6.11 与负载相联的两个机器人之间的数据流

控制机器人

控制操作 (control operation) 的任务是将控制规则分配给机器人, 并构成一个具有受控机器人属性的新的机器人。新机器的属性完全由各控制规则决定。对于大多数控制规则, 受控机器人的当前状态就是不受控制的机器人的当前状态。当期望轨迹传送给受控机器人时, 将使控制器隔离数据并跟踪此轨迹。图 6.12 为典型多控机器人的数据流。

新构成的机器人的动力学属性 $\tilde{\mathbf{M}}$ 、 $\tilde{\mathbf{C}}$ 和 $\tilde{\mathbf{N}}$ 由控制器确定。作为一种极端情况, 补偿机器人惯量的控制器将使受控机器人的动力学属性为零。这并不意味着机器人不再是一个动态物体, 而是指较高级的控制器可以不考虑机器人的动力学特性。这是因为机器人的动力学特性是由较低级的控制器来补偿的。对于其他情况, 控制器可以不补偿机器人的惯量, 而将动力学特性留给下一个高级控制器来考虑。中间级的控制器起着对机器人动力学部分解耦的作

用，而不完全是用于补偿。

建立多级控制规则

利用上而介绍的操作可以建立机器人系统的复合多级控制规则 (complex hieracchical control laws)。由于一个控制器接收一个机器人物体并构成一个机器人物体,所以可将其加到有约束机器人系统描述中的任何一级。因此可以容易地定义反映系统几何结构的多级控制规则。下面的例子将阐明此问题。

例 6.6 生物驱动控制

图 6.13 为人类手指的多级控制框图。作为最高级控制器，人脑由传感和驱动皮层 (sensory

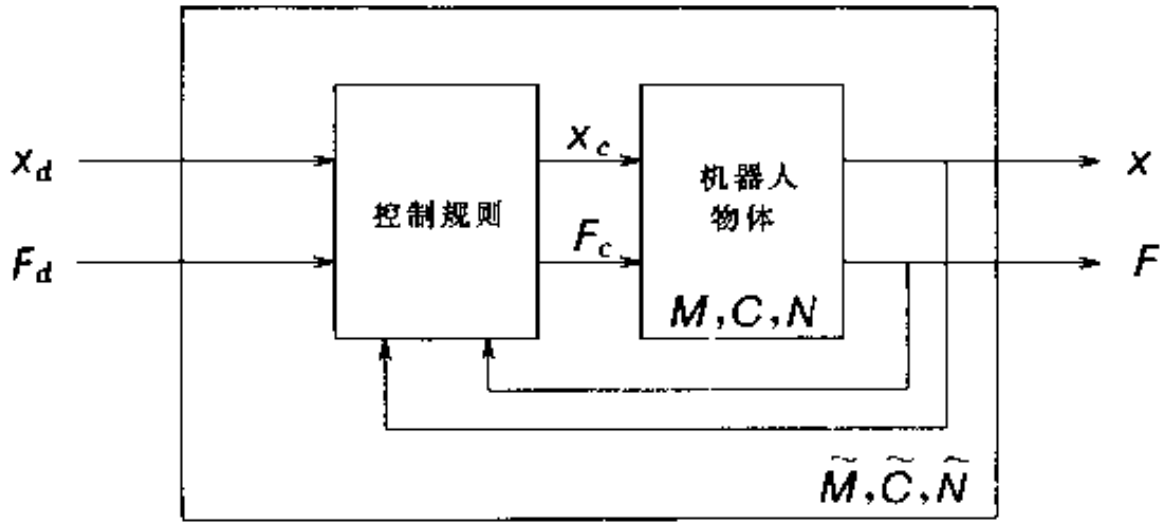


图 6.12 典型受控机器人中的数据流

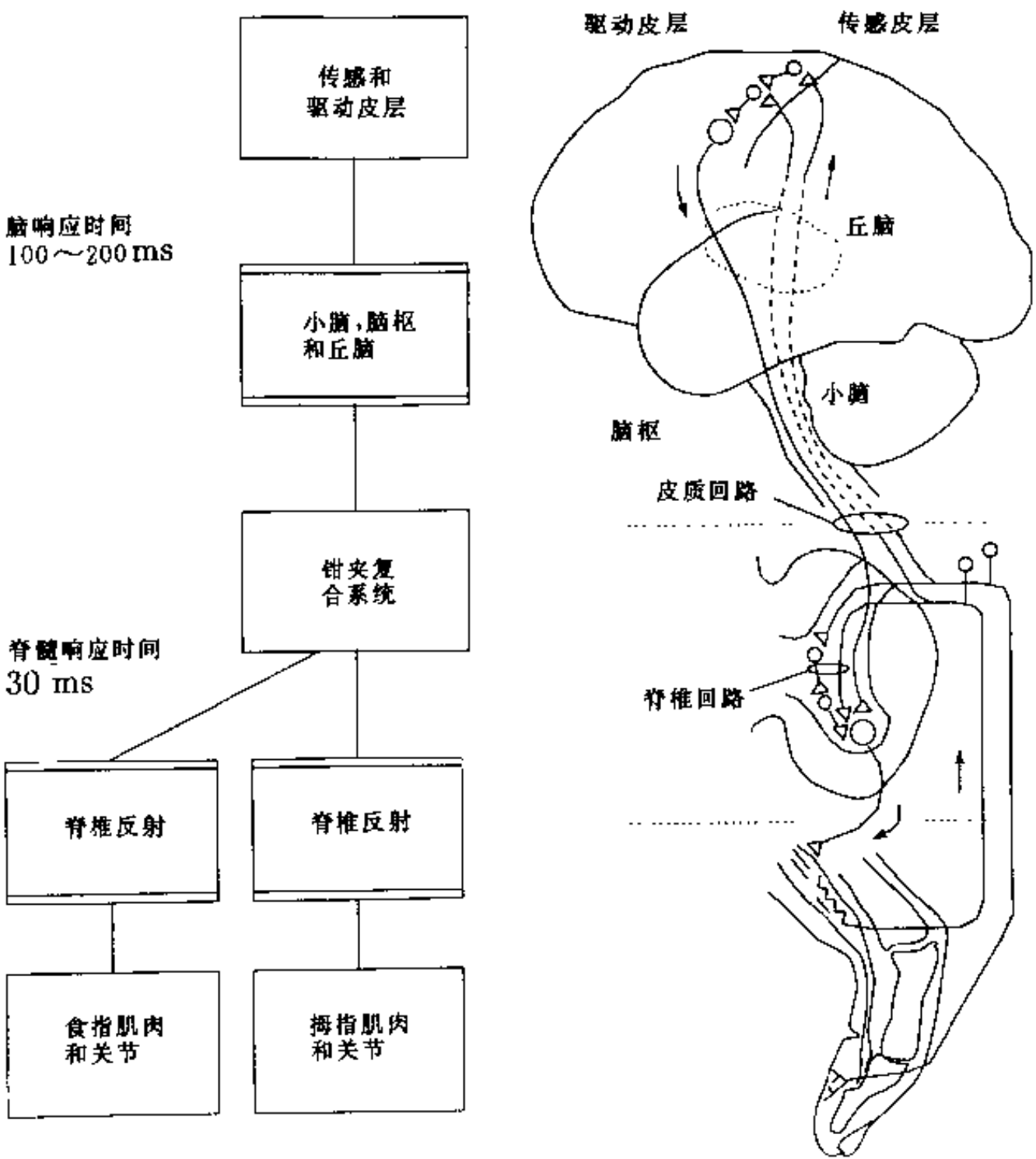


图 6.13 人类手指的多级控制框图

and motor control) (感知传感信息和发出有意识的驱动命令) 以及脑干和小脑 (brainstem and cerebellar) (将驱动命令加以综合并传给脊髓) 组成。一双手构成了一个汇集在脊髓 (spinal cord) 这一级的复合抓取系统。手指的肌肉和传感器构成了低级的脊髓反射回路 (spinal reflex loops)。这些低级回路对各种干扰的反应速度比传至大脑并返回的传感驱动速度要快。大脑和脊髓反馈控制器在图中用双线框表示。

图 6.13 中的框图部分是利用上述操作构造机器人系统在生物学方面的例子。从底部开始：定义了两个手指 (机器人)；每个手指由肌肉腱/韧带和脊髓反射加以控制；手指组合在一起构成一个复杂的手；脑干和小脑帮助控制和协调驱动命令及传感信息；最后，在皮层级，手指可以看作是钳子，它能完成高级的任务，如拣摘动作。

例 6.7 两指平面手的多级控制

作为第二个例子，考虑图 6.14 所示更为实际的平面手。描述手指和物体动力学以及相互间约束的参数很容易计算，在前面的例子中已经给出。下面建立与上例生物控制器类似的多级控制器。控制结构如图 6.15 所示。

作为低级控制，每一手指采用简单的 PD 控制器。PD 控制器模拟生物学系统中的肌肉韧带。另外，该低级控制规则也起着脊髓反射的作用。手指与高级控制规则相联，并作为一个具有复杂动力学属性和笛卡尔坐标位形的独立单元。该高级控制规则采用前馈 (无误差校正的计算力矩) 来简化动力学特性，起着大脑的高级控制作用。在高级控制规则中，两个手指就象是笛卡儿坐标中的两个力发生器，尤如是一个单独的复合机器人。

至此，在参数表示和控制策略中尚未涉及负载物体——盒子。故将力发生器 (手指) 与盒子相联，由此得到一个包含有盒子动力

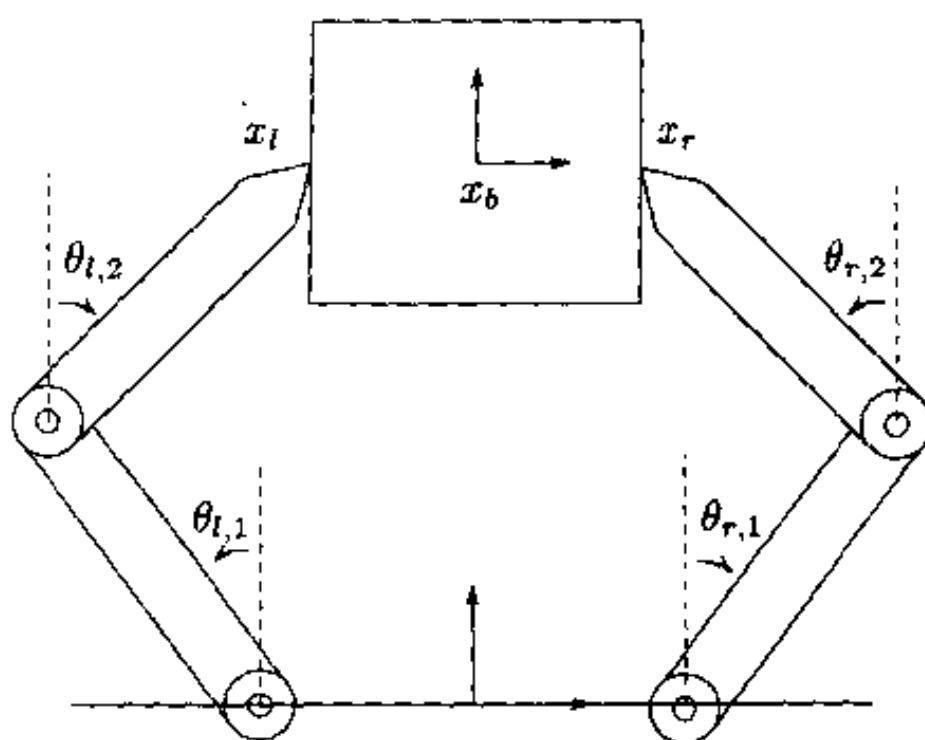


图 6.14 平面两指手和多级控制规则

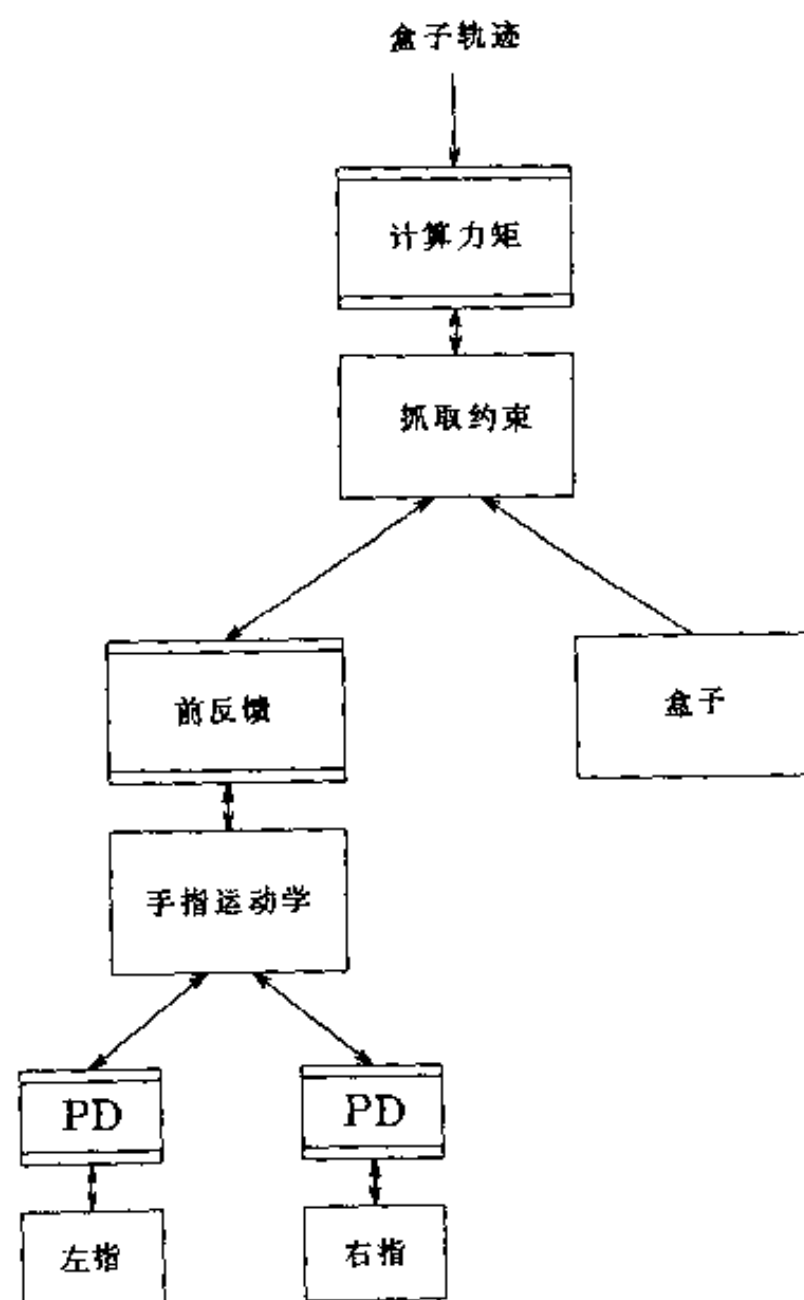


图 6.15 多指抓取的多级控制器

学特性的机器人, 并且物体能随手指的运动而运动。最后, 在最高级控制规则中采用计算力矩控制器来控制盒子的运动, 而无需具体了解肌肉的驱动作用。该控制器将小脑和脑枢的作用模拟为坐标运动, 并能校正误差。

给出传至最高级控制规则的信息流是有帮助的。在确定盒子当前位形和轨迹 $x_b, \dot{x}_b$ 中, 存在如下顺序的操作:

手: 询问当前状态 $x_b, \dot{x}_b$

手指: 询问当前状态 $x_f, \dot{x}_f$

左: 读取当前状态 $\theta_l, \dot{\theta}_l$

右: 读取当前状态 $\theta_r, \dot{\theta}_r$

手指: $x_f, \dot{x}_f \leftarrow f(\theta_l, \theta_r), J(\dot{\theta}_l, \dot{\theta}_r)$

手: $x_b, \dot{x}_b \leftarrow g(x_f), G^T \dot{x}_f$

手作用力的确定过程与上类似。

从传统的控制观点来看, 图 6.15 的结构具有一些有趣的特性。低级 PD 控制器能在较高的伺服速度下运行 (由于其简单), 可以调节系统的响应来抑制高频干扰。笛卡儿前反馈控制器可以将非线性补偿量的计算工作分配给不同级的控制器, 从而使其本身成为多级处理器的计算工具。最后, 最高级的计算力矩控制器提供了实现任务空间控制器设计的灵活性, 并构成了具有线性误差的动力学系统。

6 小结

本章涉及的主要概念如下:

1. 对于拉格朗日函数为 $L(q, \dot{q})$, Pfaffian 约束为

$$A(q)\dot{q} = 0 \quad A(q) \in \mathbb{R}^{k \times n}$$

的机械系统, 其动力学方程为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} + A^T(q)\lambda = r = 0$$

式中 $\lambda \in \mathbb{R}^k$ 为拉格朗日乘子矢量, 其值为

$$\lambda = (AM^{-1}A^T)^{-1}(AM^{-1}(F - C\dot{q} - N) + \dot{A}\dot{q})$$

2. 拉格朗日-达朗伯动力学方程是通过将运动方程向许可运动子空间投影来表示系统的运动的。如果 $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^{(n-k) \times k}$, 约束为

$$\dot{q}_2 = A(q)\dot{q}_1$$

那么运动方程可写为

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} - r_1 \right) + A^T \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_2} - r_2 \right) = 0$$

在约束为可积的特殊情况下, 上述方程与将约束代入拉格朗日函数、然后利用无约束拉格朗日方程所得结果是一致的。

3. 对于关节变量为 $\theta \in \mathbb{R}^n$ 、物体变量为 $x \in \mathbb{R}^p$ 、抓取约束为

$$J_h(\theta, x)\dot{\theta} = G^T(\theta, x)\dot{x}$$

的多指机器人手, 其动力学方程为

$$\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{F}$$

式中 $\mathbf{q} = (\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x})$, 且

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M}_o + \mathbf{G}\mathbf{J}_h^{-T}\mathbf{M}_f\mathbf{J}_h^{-1}\mathbf{G}^T$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_o + \mathbf{G}\mathbf{J}_h^{-T}(\mathbf{C}_f\mathbf{J}_h^{-1}\mathbf{G}^T + \mathbf{M}_f \frac{d}{dt}(\mathbf{J}_h^{-1}\mathbf{G}^T))$$

$$\tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{N}_o + \mathbf{G}\mathbf{J}_h^{-T}\mathbf{N}_f$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{G}\mathbf{J}_h^{-T}\boldsymbol{\tau}$$

通过适当选取 $\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{J}_h$, 上述方程可用于许多其它机器人系统。

4. 对于冗余度或不可操作机器人系统, 手的雅可比矩阵是不可逆的。因此运动方程的推导是复杂的。对于冗余度系统, 约束可表示为如下形式

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{J}_h \\ \mathbf{K}_h \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_h} \dot{\boldsymbol{\theta}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{G}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}^T} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{v}_N \end{bmatrix}$$

式中 $\mathbf{K}_h$ 的行张成 $\mathbf{J}_h$ 的零空间, $\mathbf{v}_N$ 表示系统的内部运动。对于不可操作系统, 取矩阵 $\mathbf{H}$ 张成物体许可轨迹空间, 并将约束写为

$$\mathbf{J}_h \dot{\boldsymbol{\theta}} = \underbrace{\mathbf{G}^T \mathbf{H} \mathbf{w}}_{\mathbf{G}^T}$$

其中 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{w}$ 表示物体速度。对于冗余度和不可操作两种情况, 可用约束的扩展形式来推导运动方程, 并将其代入上面所给的标准形式中。

5. 腱驱动系统的运动关系可用一组位移函数 $h_i: \mathbf{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ 来表示, 位移函数反映了腱的位移与系统关节转角之间的关系。如果作用于腱端部的力矢量为 $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^k$, 由此得到的关节力矩为

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{f}$$

其中 $\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ 为耦合矩阵

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \mathbf{h}^T}{\partial \boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta})$$

对于每一关节力矩矢量 $\boldsymbol{\tau}$, 如果存在产生此力矩的腱力, 则称该腱系统在点 $\boldsymbol{\theta}$ 处是力封闭的。

6. 有约束机器人系统的运动方程可以用参数 $\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{q})$, $\tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 和 $\tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 来描述。

这些参数满足下列性质:

(a) $\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{q})$ 是对称且正定的;

(b) $\dot{\tilde{\mathbf{M}}}(\mathbf{q}) - 2\tilde{\mathbf{C}}$ 是反对称矩阵。

利用这些性质, 可以将第四章给出的控制器加以扩展用于本章讨论的更为一般的系统。对于多指手, 扩展控制规则的一般形式为

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F} + \mathbf{J}^T \mathbf{f}_N$$

式中 $\mathbf{F}$ 为在物体坐标系中表示的广义力 (由控制规则确定), $\mathbf{f}_N$ 为内力。内力的选择应保证所有接触力均位于摩擦锥内, 以使手指能始终满足基本的抓取约束。

7 文献说明

非完整约束系统运动方程的推导是经典的, 而近期的一些著作中仅讨论了完整约束的情

况。本章的推导过程部分基于 Rosenberg^[100]更为详细而有价值的分析。将非完整系统动力学方程分为一阶项和二阶项的工作基于 Bloch 等的著作^[8]。

多指手动力学方程的推导和标准机器人控制规则的扩展应用可参阅文献 [63]、[76]、[78]。本章的推导参考了著作 [78]。有必要提一下 Khatib^[51]在空间运动算法方面的工作，本章内容与其紧密相关，并受其启发。关于腱运动学方面的内容参考了 Deno 等^[26]的著作，在该著作中还考虑了具有柔顺性和内部回路的一般驱动系统。

8 习题

1. 利用拉格朗日-达朗伯方程推导球摆的动力学方程，并检查是否与例 6.1 得出的结果一致。

2. 对于例 6.2 的滚动圆盘，证明将关于 $\dot{x}$ 、 $\dot{y}$ 的约束代入拉格朗日函数，然后利用无约束的拉格朗日方程将得出错误的运动方程。

3. 计算例 6.2 中滚动硬币的约束力。

4. 牛顿-欧拉方程的结构特性

考虑刚体运动的牛顿-欧拉方程

$$\begin{bmatrix} m\mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathfrak{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}^b \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}^b \times m\mathbf{v}^b \\ \boldsymbol{\omega}^b \times \mathfrak{I}\boldsymbol{\omega}^b \end{bmatrix} = \mathbf{F}^b$$

设 $\mathbf{x}_o = (\mathbf{p}, \mathbf{R}) \in SE(3)$ 表示刚体的位形， $\mathbf{V}^b = (\mathbf{v}^b, \boldsymbol{\omega}^b) = (\mathbf{x}_o^{-1}\dot{\mathbf{x}}_o)^v \in \mathfrak{R}^6$ 为刚体速度。

(a) 证明牛顿-欧拉方程可写为

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}_o)\dot{\mathbf{V}}^b + \mathbf{C}(\mathbf{x}_o, \dot{\mathbf{x}}_o)\mathbf{V}^b = \mathbf{F}^b$$

式中 $\mathbf{M}(\mathbf{x}_o) > 0$ ， $\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C}$ 是反对称矩阵；

(b) 设 $\mathbf{x}_o = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})$ ， $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^6$ 为 $\mathbf{x}_o$ 的局部参数（例如，用欧拉角表示旋转），假设矩阵

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \left(\boldsymbol{\phi}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial x_1} \right)^v & \cdots & \left(\boldsymbol{\phi}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial x_6} \right)^v \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$$

是非奇异的。证明运动方程为

$$\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}^T(\mathbf{x})\mathbf{F}^b$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}} &= \mathbf{J}^T \mathbf{M} \mathbf{J} \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \mathbf{J}^T \mathbf{C} \mathbf{J} + \mathbf{J}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{J}} \end{aligned}$$

5. 对于图 6.16 所示四连杆机构，试推导以曲柄转角 $\theta_1 \in S^1$ 表示的动力学方程。

6. 对于图 6.17 所示腱传动系统，试推导其传动运动学方程，考虑刚性腱和弹性腱两种情况。

7. 考虑图 6.18 所示两杆平面机器人。

(a) 建立系统的运动约束方程。

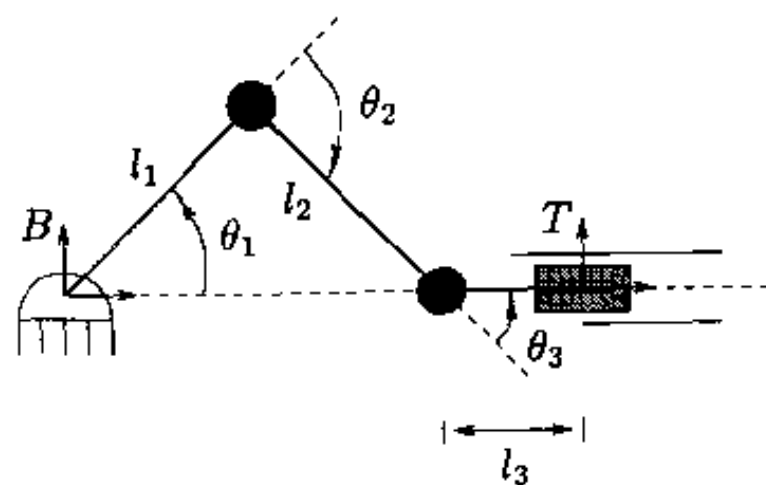


图 6.16 四连杆机构

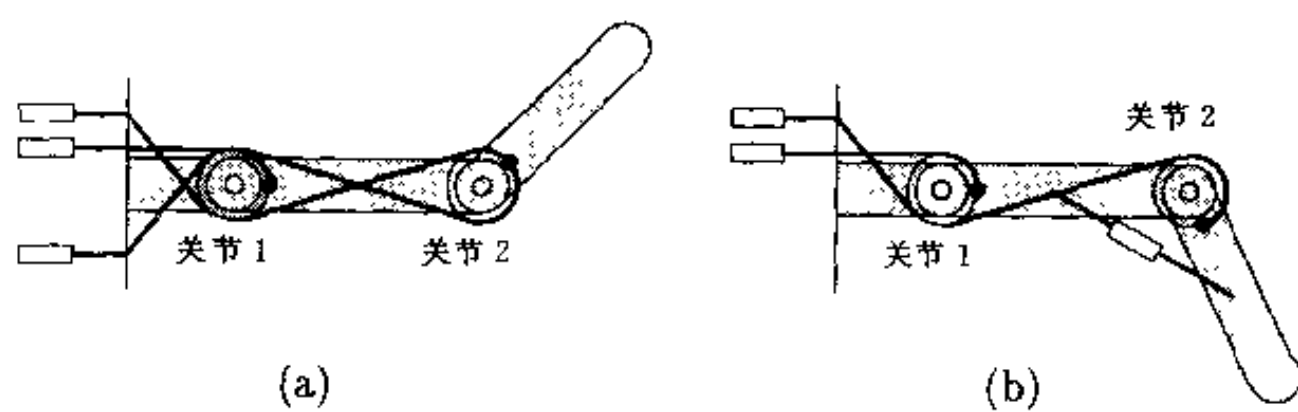


图 6.17 腱传动系统

(b) 假设机器人端部始终与 $x=c$ 处的墙面接触，将杆的质量分布看作是质心位于杆中点的集中质量，推导机器人的动力学方程。

(c) 计算机器人的内力。

(d) 设计一个 PD 控制器，实现 y 方向运动的渐进轨迹跟踪，并保证在 x 方向具有恒定的推力 $f_d > 0$ 。

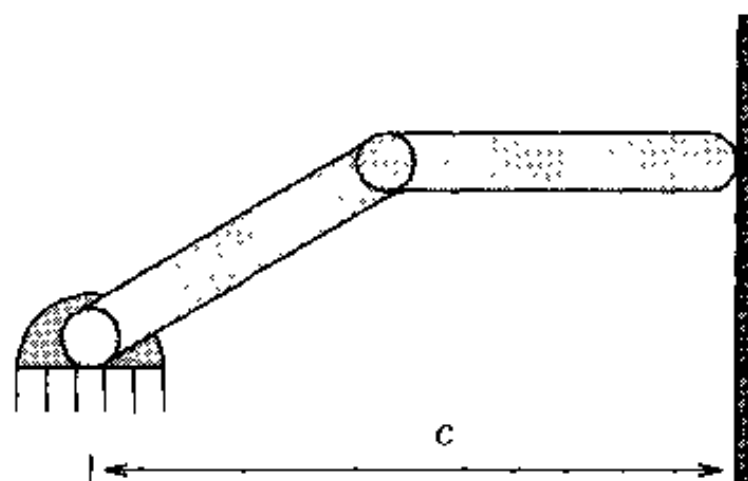


图 6.18 两杆平面机器人

第七章 机器人系统的非完整约束

本章研究非完整约束 (nonholonomic constraints) 对机器人系统特性的影响。非完整约束存在于含有滚动接触的系统 (如多指机器人手和轮式移动机器人) 以及角动量守恒的系统。本章讨论机器人系统位形变量的速度约束何时可积的问题, 重点放在非完整系统分析的基本方法以及这些方法在机器人操作中的应用上。这些方法取自于微分几何的一些基本定理和非线性控制理论。

1 概述

上一章推导了含有运动约束的机器人系统的运动方程, 其中的约束仅限于如下形式的 Pfaffian 约束

$$J(\theta, x)\dot{\theta} = G^T(\theta, x)\dot{x} \quad (7.1)$$

式中 $q = (\theta, x) \in \mathcal{R}^n$ 为系统的位形。如前所述, 这种形式的方程可用于表示多种机器人系统, 如多指机器人手, 与环境接触的机器人, 以及冗余度操作器。上述约束可改写为

$$\omega_i(q)\dot{q} = 0 \quad i = 1, \dots, k \quad (7.2)$$

式中 $\omega_i(q)$ 为行矢量。假设对于所有点 $q \in \mathcal{R}^n$, ω_i 都是线性独立的, 因为如不独立, 就可以消去线性相关的约束。每一个 ω_i 反映了 $\dot{q}$ 允许取值方向上的一个约束。

由第六章已知, 如果约束将系统的运动限制在位形空间的一个光滑超曲面上, 则该约束就称为是完整的。采用微分几何的术语和表示方法, 可将该光滑超曲面称为流形 (manifold)。从局部来说, 完整约束可表示为位形空间中的一组代数约束

$$h_i(q) = 0, i = 1, \dots, k \quad (7.3)$$

系统运动流形的维数为 $n - k$ 。

如果存在一组函数 $h_i: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$, $i = 1, \dots, k$, 使得

$$h_i(q(t)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_i(q)\dot{q} = 0 \quad i = 1, \dots, k$$

那么, 具有式 (7.2) 形式的 k 个 Pfaffian 约束是可积的 (integrable)。如果一组 Pfaffian 约束与一组完整约束等价, 则此 Pfaffian 约束是可积的。通常将可积的 Pfaffian 约束称为完整约束 (holonomic constraint), 但严格地说, 前者由一组速度约束来描述, 而后者则由一组函数来描述。当 Pfaffian 约束与完整约束不等价时, 则称其是非完整的。

正如第六章所知, 如果存在非完整约束, 那么在推导系统运动方程时要特别小心。在这一章, 采用不同的分析观点, 弄清楚什么时候能利用约束的非完整性来实现不同位形之间的运动, 并解决如下问题: 当给定两点 q_0 和 q_f 时, 什么时候存在一条始终满足约束 (7.2) 并连接 q_0 和 q_f 的路径 $q(t)$? 通过一条满足约束的路径与点 q_0 相连的所有点的集合称为关于 q_0 的可达集合 (reachable set)。为此, 希望了解在什么条件下该可达集合将是整个位形空间。这与约束的非完整性密切相关, 因为如果约束是完整的, 系统的运动就限定在由 $h_i(q) = h_i(q_0)$, $i = 1, \dots, k$ 确定的能级集合 (level sets) 中。因此, 对于完整约束, 可

达集合就是能级集合 $h_i(\mathbf{q}) = h_i(\mathbf{q}_0)$ 内位形空间中的某个子集, 并且不能在不同能级集合的位形之间自由运动。

汽车即是具有此类运动特性的一个很好的实例。汽车的运动是受约束的, 它的前后轮只允许滚动和自转, 而不允许侧向滑动。所以, 汽车本身是不能侧向移动或原地转动的。尽管如此, 经验表明汽车是可以停泊在任何位置和方向的。由于系统运动是不受限制的, 因此这些约束不是完整的。寻找两位形之间的实际路径属于非完整运动规划问题, 这是下一章的内容。

考察一个约束是完整的还是非完整的, 既不容易也不明显。首先考虑具有如下单一速度约束的情况

$$\omega(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \sum_{j=1}^n \omega_j(\mathbf{q})\dot{q}_j = 0$$

如果存在一个函数 $h: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$, 使得

$$\omega(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h(\mathbf{q}) = 0$$

则该约束是可积的。将 $h(\mathbf{q}) = 0$ 对时间求导, 若 Pfaffian 约束是完整的, 那么

$$\sum_{j=1}^n \omega_j(\mathbf{q})\dot{q}_j = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial h}{\partial q_j} \dot{q}_j = 0$$

这意味着存在某个函数 $\alpha(\mathbf{q})$, 称为积分因子 (integrating factor), 使得

$$\alpha(\mathbf{q})\omega_j(\mathbf{q}) = \frac{\partial h}{\partial q_j}(\mathbf{q}) \quad j = 1, \dots, n \quad (7.4)$$

因此, 某个 Pfaffian 约束是完整的当且仅当存在一个积分因子 $\alpha(\mathbf{q})$, 使得 $\alpha(\mathbf{q})\omega(\mathbf{q})$ 为某个函数 h 的导数。

从可积性来考虑, 式 (7.4) 在结构上并不是很好的, 因为它包含未知函数 $h(\mathbf{q})$ 。但利用下列关系则可解决此问题

$$\frac{\partial^2 h}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i}$$

由此可得

$$\frac{\partial(\alpha\omega_j)}{\partial q_i} = \frac{\partial(\alpha\omega_i)}{\partial q_j} \quad i, j = 1, \dots, n \quad (7.5)$$

式 (7.5) 表明, 如果存在某个积分因子 $\alpha(\mathbf{q})$, 使得式 (7.5) 成立, 那么上述约束就等价于 $h(\mathbf{q}) = 0$ 。这并不奇怪, 因为对任何光滑函数 $\alpha(\mathbf{q})$, 有

$$\omega(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(\mathbf{q})\omega(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0$$

当然, 最终还是要寻找一个满足式 (7.5) 的函数 α 。

在存在多个 Pfaffian 约束时, 可积性问题变得相当困难。在给定 k 个具有式 (7.2) 形式的约束时, 不仅要检查其中每个约束是否可积, 而且还要检查其中哪些约束的线性独立组合

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i(\mathbf{q})\omega_i(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

是可积的。也就是说, 即使给定的约束每一个都不可积, 它们仍然含有一组可积的约束。因此, 存在函数 h_i , $i = 1, \dots, p$ ($p \leq k$), 使得对所有的 $\mathbf{q}$, 有

$$\text{span}\left\{\frac{\partial h_1}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}), \dots, \frac{\partial h_p}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q})\right\} \subset \text{span}\{\omega_1(\mathbf{q}), \dots, \omega_k(\mathbf{q})\}$$

如果能够找到这些函数, 系统的运动就限制在 h 的能级曲面上, 即限制在如下集合内

$$\{q: h_1(q) = c_1, \dots, h_p(q) = c_p\}$$

如果 $p = k$, 那么所有约束是完整的。若 $p < k$, 则约束并不都是完整的 (因为它们并不完全等价于一组完整约束), 但系统的可达点仍受到限制。因此, 这些约束是“部分完整的” (Partially holonomic)。在此感兴趣的主要是约束不限制可达位形的情况, 这一情况称为是完全非完整的 (completely nonholonomic)。

为方便起见, 可将非完整约束的问题变换成另一种形式。粗略地说, 不从约束的观点 (即不能运动的方向), 而是从可以自由运动的方向来考虑系统。首先为约束的零空间选一个基, 记为 $g_j(q) \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n - k =: m$ 。通过构造, 该基满足

$$\omega_i(q)g_j(q) = 0 \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, k \\ j = 1, \dots, n - k \end{matrix}$$

因而, 系统的允许轨迹可写成控制系统的可能解

$$\dot{q} = g_1(q)u_1 + \dots + g_m(q)u_m \quad (7.6)$$

也就是说, 对于某种控制 $u(t) \in \mathbb{R}^m$, 当且仅当 $q(t)$ 满足式 (7.6) 时, $q(t)$ 是系统的可行轨迹。

在这里, 如果相应的控制系统能够实现任何两点之间的运动, 那么约束是完全非完整的, 系统的可达位形是不受限制的。相反, 如果约束是完整的, 那么系统的所有运动都必须位于一个适当的约束曲面内, 相应的控制系统就只能在给定流形的两点之间运动。因此, 可以通过研究式 (7.6) 的可控性特点来研究 Pfaffian 约束的特性。

非完整约束存在于各种应用领域。除多指手的滚动约束外, 非完整约束在移动机器人系统和太空机器人系统 (此时角动量守恒起着非完整约束的作用) 的研究中也起着很重要的作用。对于这些应用领域, 首要的问题是可达性问题: 什么时候能够找到两任意位形之间的一条路径, 以及如何计算这条路径?

本章内容概括如下: 第二节介绍微分几何和非线性控制的一些基本方法; 第三节列举一些具有速度约束的系统实例; 第四节探讨非完整系统的结构, 并对第三节给出的实例进行分析。下一章将研究非完整约束的路径规划方法。

本章和下一章的内容要比前几章更深入一些, 并介绍机器人领域的一些最新研究成果。非完整特性在几何力学的许多问题中也起很大的作用, 这些仅在例题和习题中加以论述。在经典力学中, 非完整特性与哈密尔顿或拉格朗日系统中群对称的几何状态密切相关。有关这方面概念的介绍可参阅文献 Marsden^[68]。

2 可控性和 Frobenius 定理

上一节已指出确定系统的约束是否完整 (或可积) 是很困难的。如果约束不是完整的, 则不能确定它们何时是完全非完整的。本节将研究非完整系统的分析方法, 特别是解决 Pfaffian 约束什么时候是完整的这个问题。

本节所用的方法来源于微分几何和非线性控制理论的一些结论, 主要是 Frobenius 定理和非线性可控性。为使所涉及的数学知识尽可能少, 所有的计算都是在空间 $\mathbb{R}^n$ 内进行的, 并将问题限于无漂移控制系统 (即当输入关掉后状态保持固定的控制系统)。本节中的许多证明依赖于流形的一些特性, 具体讨论从略, 但这并不影响内容叙述的连续性。Isidori^[44]及

Nijmeijer 和 Schaft^[84]对非线性控制理论以及相关的微分几何概念作了很好的介绍。

2.1 矢量场和矢量流

下面的讨论仅限于空间 $\mathcal{R}^n$ 。首先区分空间及其在给定点的切空间之间的差别。这里认为 $\mathcal{R}^n$ 中的点和矢量是有区别的, 具体在于点后加一个 1, 矢量后加一个 0。记 $T_q\mathcal{R}^n$ 为 $\mathcal{R}^n$ 在点 $q \in \mathcal{R}^n$ 的切空间。 $\mathcal{R}^n$ 上的矢量场 (vector field) 是一个光滑映射, 它给出了每一个点 $q \in \mathcal{R}^n$ 的切矢量 $f(q) \in T_q\mathcal{R}^n$ 。在局部坐标系中, 将 f 表示为列矢量, 其元素依赖于 q , 即

$$f(q) = \begin{bmatrix} f_1(q) \\ \vdots \\ f_n(q) \end{bmatrix}$$

如果每一个 $f_i(q)$ 都是光滑的, 那么矢量场就是光滑的。

微分方程

$$\dot{q} = f(q) \quad (7.7)$$

的右边可认为是矢量场光滑函数 $V: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$ 沿 f 流的变化率为

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial q} f(q) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_i} f_i$$

V 沿流 f 的时间导数称为 V 沿 f 的李导数, 并记为 $L_f V$

$$L_f V := \frac{\partial V}{\partial q} f(q)$$

现定义一个矢量场的流, 与矢量场一起来表示微分方程 (7.7) 的解。特别用 $\phi_t^f(q)$ 表示时刻 t 时微分方程 (从时刻 0 时的 q 开始) 的状态。因此, $\phi_t^f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$ 满足

$$\frac{d}{dt} \phi_t^f(q) = f(\phi_t^f(q)) \quad q \in \mathcal{R}^n$$

如果矢量场的流对任何 t 都存在, 那么该矢量场是完全的。由常微分方程的存在性及唯一性定理知, 对于每个固定的 t , ϕ_t^f 是 $\mathcal{R}^n$ 对自身的局部微分同胚 (local diffeomorphism), 而且对所有的 t 和 s , 它满足如下群特性

$$\phi_t^f \circ \phi_s^f = \phi_{t+s}^f$$

式中 $\circ$ 表示两个流的组合, 即 $\phi_t^f(\phi_s^f(q))$ 。

2.2 李括号和 Frobenius 定理

给定两矢量场 g_1 及 g_2 , 映射 $\phi_t^{g_1} \circ \phi_s^{g_2}$ 表示 g_2 经 s 的流与 g_1 经 t 的流的组合。一般情况下, $\phi_t^{g_1} \circ \phi_s^{g_2}$ 与 $\phi_s^{g_2} \circ \phi_t^{g_1}$ 是不同的, 后者代表相反顺序的组合。考虑图 7.1 所示起始于 q_0 的矢量流, 它由沿 g_1 经 ϵ 的矢量流和沿 g_2 经 ϵ 、沿 $-g_1$ 经 ϵ 及沿 $-g_2$ 经 ϵ 的矢量流组成。对于很小的 ϵ , 微分方程的状态在时刻 ϵ 的泰勒级数为

$$\begin{aligned} q(\epsilon) &= \phi_\epsilon^{g_1}(q(0)) = \\ &= q(0) + \epsilon \dot{q}(0) + \frac{1}{2} \epsilon^2 \ddot{q}(0) - O(\epsilon^3) = \end{aligned}$$

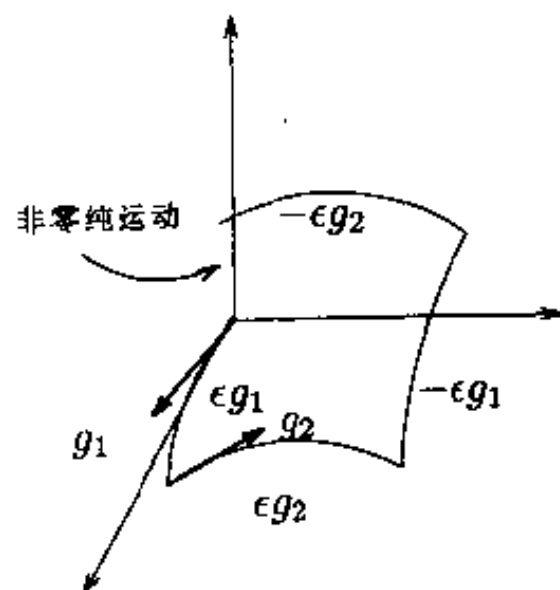


图 7.1 李括号运动

$$q_0 + \varepsilon g_1(q_0) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{\partial g_1}{\partial q} g_1(q_0) + O(\varepsilon^3)$$

式中 $O(\varepsilon^k)$ 为 ε 的 k 阶项, 并且在 q_0 处计算 g_1 的偏导数。

现计算 2ε 时刻的泰勒级数

$$q(2\varepsilon) = \phi_{\varepsilon}^{g_2} \circ \phi_{\varepsilon}^{g_1}(q_0) =$$

$$\phi_{\varepsilon}^{g_2}(q_0 + \varepsilon g_1(q_0) + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial g_1}{\partial q} g_1(q_0) + O(\varepsilon^3)) =$$

$$q_0 + \varepsilon g_1(q_0) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{\partial g_1}{\partial q} g_1(q_0) +$$

$$\varepsilon g_2(q_0 + \varepsilon g_1(q_0)) + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial g_2}{\partial q} g_2(q_0) + O(\varepsilon^3) =$$

$$q_0 + \varepsilon(g_1(q_0) + g_2(q_0)) +$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon^2 (\frac{\partial g_1}{\partial q} g_1(q_0) + \frac{\partial g_2}{\partial q} g_2(q_0) + 2 \frac{\partial g_2}{\partial q} g_1(q_0)) + O(\varepsilon^3)$$

这里使用了泰勒级数展开式 $g_2(q_0 + \varepsilon g_1(q)) = g_2(q_0) + \varepsilon \frac{\partial g_2}{\partial q} g_1(q_0) + O(\varepsilon^2)$ 。进一步可推得 (请读者自己推导)

$$q(3\varepsilon) = \phi_{\varepsilon}^{-g_1} \circ \phi_{\varepsilon}^{g_2} \circ \phi_{\varepsilon}^{g_1}(q_0) =$$

$$q_0 + \varepsilon g_2(q_0) + \frac{\varepsilon^2}{2} (\frac{\partial g_2}{\partial q} g_1(q_0) + 2 \frac{\partial g_2}{\partial q} g_1(q_0) - 2 \frac{\partial g_1}{\partial q} g_2(q_0)) + O(\varepsilon^3)$$

最后推得

$$q(4\varepsilon) = \phi_{\varepsilon}^{-g_2} \circ \phi_{\varepsilon}^{-g_1} \circ \phi_{\varepsilon}^{g_2} \circ \phi_{\varepsilon}^{g_1}(q_0)$$

$$= q_0 + \varepsilon^2 (\frac{\partial g_2}{\partial q} g_1(q_0) - \frac{\partial g_1}{\partial q} g_2(q_0)) + O(\varepsilon^3) \quad (7.8)$$

受上述计算的启发, 定义两个矢量场 f 和 g 的李括号为

$$[f, g](q) = \frac{\partial g}{\partial q} f(q) - \frac{\partial f}{\partial q} g(q)$$

因此, 李括号表示的是由沿着两个矢量场 f 和 g 所定义的矩形流动时所产生的无穷小运动 (实际是 ε^2 阶的)。若 $[f, g] = 0$, 则可证明式 (7.8) 的右边恒等于 q_0 , 并称 f 和 g 是对易的 (Commute)。李积是一组嵌套的李括号, 例如

$$[[f, g], [f, [f, g]]]$$

例 7.1 线性矢量场的李括号

考虑两个线性矢量场 $f(q) = Aq$ 和 $g(q) = Bq$ 。这两个线性矢量场的李括号还是一个线性矢量场

$$[f, g](q) = (AB - BA)q$$

此即为两个矩阵 A 、 B 的对易算子 (Commutator)。

由李括号的定义可得如下性质, 其证明留作习题。

定理 7.1 李括号的性质

对于给定的 $\mathbb{R}^n$ 上的矢量场 f, g, h 及光滑函数 $\alpha, \beta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 李括号具有如下性质:

1. 反对称性:

$$[f, g] = -[g, f]$$

2. 雅可比恒等式:

$$[f, [g, h]] + [h, [f, g]] + [g, [h, f]] = 0$$

3. 链规则:

$$[\alpha f, \beta g] = \alpha \beta [f, g] + \alpha (L_f \beta) g - \beta (L_g \alpha) f$$

式中 $L_f \beta$ 和 $L_g \alpha$ 表示 β 和 α 分别沿矢量场 f 和 g 的李导数。

定义两矢量场 f 和 g 的李括号的另一个方法, 是要求对所有光滑函数 $\alpha: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ 满足

$$L_{[f, g]} \alpha = L_f (L_g \alpha) - L_g (L_f \alpha)$$

读者应仔细分析上述方程, 以证实该结论。

所谓分布 (distribution) 是将切空间的子空间以光滑方式分配给 $\mathfrak{R}^n$ 中的每一个点。由一组光滑矢量场 $g_1, \dots, g_m$ 定义的分布是一个特例, 该分布定义为

$$\Delta = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\}$$

这是由 $\mathfrak{R}^n$ 上光滑实值函数集合所张成的空间。任意点 $q \in \mathfrak{R}^n$ 的分布定义了切空间的一个线性子空间

$$\Delta_q = \text{span}\{g_1(q), \dots, g_m(q)\} \subset T_q \mathfrak{R}^n$$

如果子空间 Δ_q 的维数不随 q 变化, 则该分布称为是规则的 (regular)。如果在李括号下分布是封闭的, 即

$$\Delta \text{ 对合} \Leftrightarrow \forall f, g \in \Delta, [f, g] \in \Delta$$

则该分布是对合的 (involutive)。对于一个有限维的分布, 只要检查基元素的李括号包含在该分布内就够了。分布的对合封闭 (involutive closure) 是指在括号下 Δ 的封闭, 记为 $\bar{\Delta}$, 即 $\bar{\Delta}$ 是包含 Δ 的最小分布, 使得若 $f, g \in \bar{\Delta}$, 则 $[f, g] \in \bar{\Delta}$ 。

定义 7.1 李代数

对于矢量空间 V ($\mathfrak{R}$ 上的), 如果存在一个双线性算子 $V \times V \rightarrow V$, 记为 $[\cdot, \cdot]$, 满足 (i) 反对称和 (ii) 雅可比恒等式, 则该矢量空间 V 是一个李代数。

具有李括号的 $\mathfrak{R}^n$ 上的光滑矢量场的集合就是一个李代数, 记为 $\mathfrak{X}(\mathfrak{R}^n)$ 。设 $g_1, \dots, g_m$ 是一组光滑矢量场, Δ 是由 $g_1, \dots, g_m$ 定义的分布, $\bar{\Delta}$ 是 Δ 的对合封闭。那么, $\bar{\Delta}$ 是一个李代数 (事实上是包含 $g_1, \dots, g_m$ 的最小李代数), 称为由 $g_1, \dots, g_m$ 生成的李代数, 并常记为 $L(g_1, \dots, g_m)$ 。取 $g_1, \dots, g_m$ 元素的所有线性组合及其李括号, 再取其所有线性组合, 如此进行下去, 即得 $L(g_1, \dots, g_m)$ 的元素。作为一个分布, $L(g_1, \dots, g_m)$ 在点 $q \in \mathfrak{R}^n$ 的秩定义为 Δ_q 的维数。

对于任一点 $q \in \mathfrak{R}^n$, 如果存在一组光滑函数 $h_i: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, $i = 1, \dots, n - k$, 使得行矢量 $\partial h_i / \partial q$ 在点 q 是线性独立的, 并且对于任一 $f \in \Delta$ 有

$$L_f h_i = \frac{\partial h_i}{\partial q} f(q) = 0 \quad i = 1, \dots, n - k \quad (7.9)$$

则认为维数为 k 的分布 Δ 是可积的。由能级集合

$$\{q: h_1(q) = c_1, \dots, h_{n-k}(q) = c_{n-k}\}$$

定义的超曲面称为分布的可积流形。如果将一个可积流形当作是 $\mathfrak{R}^n$ 上的一个光滑曲面, 则式 (7.9) 要求分布等于曲面在 q 的切空间。

可积流形通过如下著名的定理与对合分布联系起来。

定理 7.2 (Frobenius) 规则分布是可积的当且仅当它是对合的

因此, 如果 Δ 是 k 维的对合分布, 那么局部存在 $n - k$ 个函数 $h_i: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, 使得 Δ 的可

积流形由 $h = (h_1, \dots, h_{n-k})$ 的能级曲面确定。这些能级曲面构成 $\mathfrak{R}^n$ 的叶丛 (foliation), 单个能级曲面称为一叶。

与切空间 $T_q \mathfrak{R}^n$ 相联系的是对偶空间 $T_q^* \mathfrak{R}^n$, 即 $T_q \mathfrak{R}^n$ 上线性函数的集合。如 $\mathfrak{R}^n$ 上矢量场的定义, 1-形式可定义为一个映射, 它给每一个点 $q \in \mathfrak{R}^n$ 分配一个余矢量 (covector) $\omega(q) \in T_q^* \mathfrak{R}^n$ 。在局部坐标系中, 一个光滑的 1-形式可表示为一个行矢量

$$\omega(q) = [\omega_1(q) \quad \omega_2(q) \quad \cdots \quad \omega_n(q)]$$

光滑函数的微分就是 1-形式 (one-form)。例如, 若 $\beta: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, 则 1-形式 $d\beta$ 为

$$d\beta = \left[\frac{\partial \beta}{\partial q_1} \quad \frac{\partial \beta}{\partial q_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial \beta}{\partial q_n} \right]$$

注意, 并非所有的 1-形式都是光滑函数的微分 (不是某个函数微分的 1-形式称为是正合的 (exact))。

通过对行矢量 ω 和列矢量 f 取内积

$$\omega \cdot f = \sum_i \omega_i f_i$$

作用于矢量场的 1-形式给出了 $\mathfrak{R}^n$ 上的一个实值函数。余分布 (codistribution) 是将 $T_q^* \mathfrak{R}^n$ 的子空间光滑地分派给每个 $q \in \mathfrak{R}^n$ 。一组 1-形式所张成的余分布

$$\Omega = \text{span} \{ \omega_1, \dots, \omega_m \}$$

是余分布的特例, 它由一组光滑函数张成。余分布的秩就是 Ω_q 的维数。如果余分布 Ω 的秩是定值的话, 称该余分布是规则的。

为研究非完整系统的运动规划, 先要将以 1-形式表示的约束转换为等价的控制系统。为此, 在给定点 q_0 和 q_f 之间, 构造一个满足约束

$$\omega_i(q) \dot{q} = 0 \quad i = 1, \dots, k$$

的路径 $q(t) \in \mathfrak{R}^n$, 其中 ω_i 是 $\mathfrak{R}^n$ 的切空间上的线性函数, 即 1-形式。假设关于 ω_i 的函数是光滑且线性独立的。下列定理是对本章概述的一个规范论述。

定理 7.3 分布零化约束

对于给定的一组 1-形式 $\omega_i(q)$, $i = 1, \dots, k$, 存在光滑且线性独立的矢量场 $g_j(q)$ ($j = 1, \dots, n-k$), 使得对于所有的 i 和 j , 有 $\omega_i(q) \cdot g_j(q) = 0$ 。

证明: ω_i 构成 $\mathfrak{R}^n$ 中一个 k 维余分布。可选择局部坐标, 使 1-形式的集合为

$$\tilde{\omega}_i = [0 \quad \cdots \quad 1 \quad \cdots \quad 0 \quad \alpha_{i,k+1} \quad \cdots \quad \alpha_{in}]$$

式中的 1 是第 i 个项值, 函数 $\alpha_{i\ell}: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ 是光滑函数。定义

$$g_j := \begin{bmatrix} -\alpha_{1,(j+k)} \\ \vdots \\ -\alpha_{k,(j+k)} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

式中的 1 是第 $j+k$ 个项值。 g_j 是线性独立的, 并零化 (annihilate) 约束, 因为

$$\tilde{\omega}_i \cdot g_j = \alpha_{i(j+k)} - \alpha_{i(j+k)} = 0$$

这就证明了对所有的 $i=1, \dots, k$ 和 $j=1, \dots, n-k$, 有 $\omega_i \cdot g_j = 0$ 。

用分布和余分布的语言, 上述定理的结论可表述为: 定义余分布

$$\Omega = \text{span}\{\omega_1, \dots, \omega_k\}$$

和分布

$$\Delta = \text{span}\{g_1, \dots, g_{n-k}\}$$

有

$$\Delta = \Omega^\perp$$

此即说明分布 Δ 零化了余分布 Ω 。与分布 Δ 有关的控制系统具有如下形式

$$\dot{q} = g_1(q)u_1 + \dots + g_{n-k}(q)u_{n-k}$$

其中 u_i 可随意确定。

本节的结论可用于确定一组 Pfaffian 约束是不是完整的。

定理 7.4 Pfaffian 约束的可积性

一组光滑的 Pfaffian 约束是可积的当且仅当零化约束的分布是对合的。

2.3 非线性可控性

定理 7.3 得到了一组与给定的一次型集合正交的矢量场。由此可以看出, 运动规划问题等价于控制系统的调节。因此, 下面主要讨论具有如下形式的控制系统

$$\Sigma: \quad \dot{q} = g_1(q)u_1 + \dots + g_m(q)u_m \quad \begin{matrix} q \in \mathcal{R}^n \\ u \in U \subset \mathcal{R}^m \end{matrix} \quad (7.10)$$

该系统认为是无漂移的 (drift-free), 也就是说, 当控制量设为零时, 系统的状态不发生漂移。假设 g_j 是 $\mathcal{R}^n$ 上光滑的、线性独立的矢量场, 并且对所有时间它们的流是存在的 (即 g_j 是完备的)。希望确定在什么条件下可通过选择恰当的 $u(\cdot)$, 从 $q_0 \in \mathcal{R}^n$ 运动到任意的 $q_f \in \mathcal{R}^n$ 。

如果对于任意的 $q_0, q_f \in \mathcal{R}^n$, 存在 $T > 0$ 和 $u: [0, T] \rightarrow U$, 使得 Σ 满足 $q(0) = q_0$ 和 $q(T) = q_f$, 则称系统 Σ 是可控的。如果一个系统能在任意少的时间内到达 q_0 的邻近点, 并始终位于 q_0 的附近, 则称该系统在 q_0 是最少时间局部可控的 (Small-time locally controllable)。对于给定的一个开集 $V \subseteq \mathcal{R}^n$, 定义 $R^V(q_0, T)$ 为状态 q 的集合, 使得存在 $u: [0, T] \rightarrow U$, 将 Σ 从 $q(0) = q_0$ 运动到 $q(T) = q_f$, 并且对于 $0 \leq t \leq T$ 满足 $q(t) \in V$ 。再定义

$$R^V(q_0, \leq T) = \bigcup_{0 \leq \tau \leq T} R^V(q_0, \tau)$$

为时刻 T 前可达状态的集合。对于 q_0 的所有邻域 V 和 $T > 0$, 如果 $R^V(q_0, \leq T)$ 包含 q_0 的一个邻域, 则系统是最少时间局部可控的 (简称局部可控的)。

设 $\bar{\Delta} = L(g_1, \dots, g_m)$ 是由 $g_1, \dots, g_m$ 构成的李代数, 称为可控性李代数。由上一小节李代数的定义可知, 利用以下输入顺序

$$\begin{array}{lll} u_1 = +1 & u_2 = 0 & \text{对于 } 0 \leq t < \epsilon \\ u_1 = 0 & u_2 = +1 & \text{对于 } \epsilon \leq t < 2\epsilon \\ u_1 = -1 & u_2 = 0 & \text{对于 } 2\epsilon \leq t < 3\epsilon \end{array}$$

$$u_1=0 \quad u_2=-1 \quad \text{对于 } 3\epsilon \leq t < 4\epsilon$$

可得李括号 $[g_1, g_2]$ 方向的运动。如果按此顺序迭代, 可以产生沿着由 g_i 的所有其他李积所确定的方向的运动。因此, 可以使系统沿着 $L(g_1, \dots, g_m)$ 表示的所有方向运动。下面的定理将对此作严格的阐述, 该定理最初由 W. L. Chow 于 1940 年采用不同的方式给予证明。

定理 7.5 (Chow) 若 $\bar{\Delta}_q = T_q \mathbb{R}^n$, 则控制系统式 (7.10) 在 $q \in \mathbb{R}^n$ 是局部可控的。

该定理认为, 如果可控性李代数的秩为 n , 则无漂移系统 Σ 是可控的。Chow 定理的条件包含有对可控性李代数秩的检查, 因此称之为可控性秩条件。

为证明 Chow 定理, 可以证明给定系统 Σ 在点 q 邻域中的下列推论

$$\bar{\Delta}_q = T_q \mathbb{R}^n \Rightarrow \text{int} R^V(q, \leq T) \neq \{\} \Leftrightarrow \Sigma \text{ 是局部可控的}$$

式中 $\bar{\Delta} = L(g_1, \dots, g_m)$, $\{\}$ 表示空集。

定理 7.6 可控性秩条件

如果对于 q_0 的某个邻域中的所有 q , 有 $\bar{\Delta}_q = T_q \mathbb{R}^n$, 那么对于所有 $T > 0$ 和 q_0 的邻域 V , $R^V(q_0, \leq T)$ 是非空的。

证明: 用递推法证明。取 $f_1 \in \Delta$, 对于足够小的 $\epsilon_1 > 0$,

$$N_1 = \{\phi_{t_1}^{f_1}(q_0) : 0 < t_1 < \epsilon_1\}$$

是维数为 1 的一个光滑曲面 (流形), 它包含了与 q_0 任意接近的所有点。不失一般性, 取 $N_1 \subset V$, 并假设 $N_k \subset V$ 是一个 k 维流形。若 $k < n$, 则存在 $q \in N_k$ 和 $f_{k+1} \in \Delta$, 使得 $f_{k+1} \notin T_q N_k$ 。如果不是这样的话, 那么对开集 $W \subset N_k$ 内的任意 q 就有 $\Delta_q \subset T_q N_k$, 意味着 $\bar{\Delta}|_W \subset TN_k$ 。由于 $\dim \bar{\Delta}_q = n > \dim N_k$, 这是不可能的。对足够小的 ϵ_{k+1} ,

$$N_{k+1} = \{\phi_{t_{k+1}}^{f_{k+1}} \circ \dots \circ \phi_{t_1}^{f_1}(q_0) : 0 < t_i < \epsilon_i, i = 1, \dots, k+1\}$$

是一个 $k+1$ 维流形。由于 ϵ 可以是任意小的, 可假设 $N_{k+1} \subset V$ 。

若 $k = n$, 通过构造 $N_k \subset R^V(q_0, \leq \epsilon_1 + \dots + \epsilon_n)$, $N_k \subset V$ 是一个 n 维流形。因此, $R^V(q_0, \epsilon)$ 包含一个开集。通过限制 $\epsilon_i \leq T/n$, 对任何 $T > 0$ 可以找到这样一个开集。其证明见图 7.2。

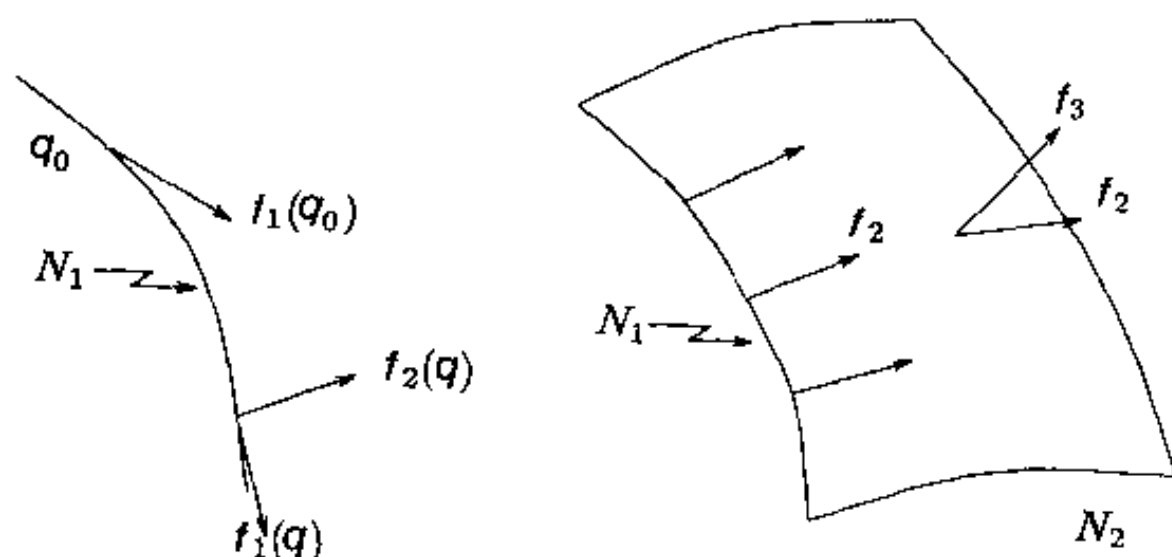


图 7.2 局部可控性的证明

[每一步都可求得不属于 N_k 的矢量场]

在建立了集合 $\text{int} R^V(q, \leq T)$ 非空的条件后, 可确定是否可选择该集合, 使 q_0 在其

内部。这是下一个定理的内容。

定理 7.7 局部可控性

对于 q_0 的所有邻域 V 及 $T > 0$, 集合 $R^V(q_0, \leq T)$ 的内部是非空的当且仅当 Σ 在 q_0 是局部可控的。

证明: 充分性可直接由局部可控的定义得以证明。为证明必要性, 须证明 $R^V(q_0, \leq T)$ 包含 q_0 的一个邻域。选择一个分段常数输入 $u: [0, T/2] \rightarrow U$, 通过 u 将 q_0 运动到某个 $q_f \in R^V(q_0, \leq T/2)$, 且 $q(t) \in V$ 。设 ϕ_t^u 是与该输入对应的流 (已在前一个定理的证明中给出)。由于 Σ 是无漂移的, 可用 $u'(t) = -u(T/2 - t)$, $t \in [0, T/2]$ 从 q_f 回流到 q_0 。与 u' 对应的流为 $(\phi_t^u)^{-1}$ 。根据流的连续性, 存在 $W \subset R^V(q_0, T/2)$ 使得对所有时间 t 有 $q_f \in W$ 和 $(\phi_t^u)^{-1}(W) \subset V$ 。进而可知 $(\phi_{T/2}^u)^{-1}(W)$ 是 q_0 的一个邻域, 即 $R^V(q_0, \leq T)$ 包含 q_0 的一个邻域, 因为可将从 q_0 运动到具有 u' 的 $q_f \in W$ 的输入串联起来, 得到一个包含 q_0 的开集, 图 7.3 说明了此过程。

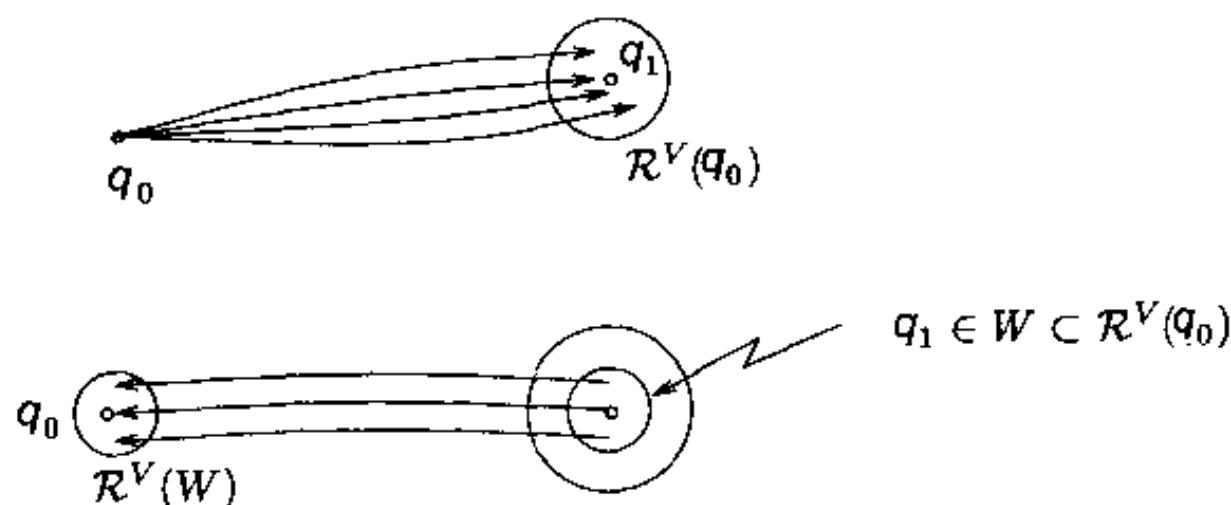


图 7.3 局部可控性的证明

[为证明 $R^V(q_0)$ 包含有原点的邻域, 先运动到任一点 q_f , 然后通过反向路径将 q_f 的邻域映射为 q_0 的邻域]

原则上已有方法解决满足可控性秩条件的系统运动规划问题。对于给定的起点 q_0 和终点 q_f , 通过点 $q_1, q_2, \dots, q_p \in \mathbb{R}^n$ 和邻域 V_i , 求得有限数目的中间集合, 使得

$$\bigcup_{i=1}^p R^V(q_i, \leq T)$$

包含连接 q_0 到 q_f 的直线段, 如图 7.4 所示。那么存在一个由 q_0 到 q_f 的 p 段控制规则。使

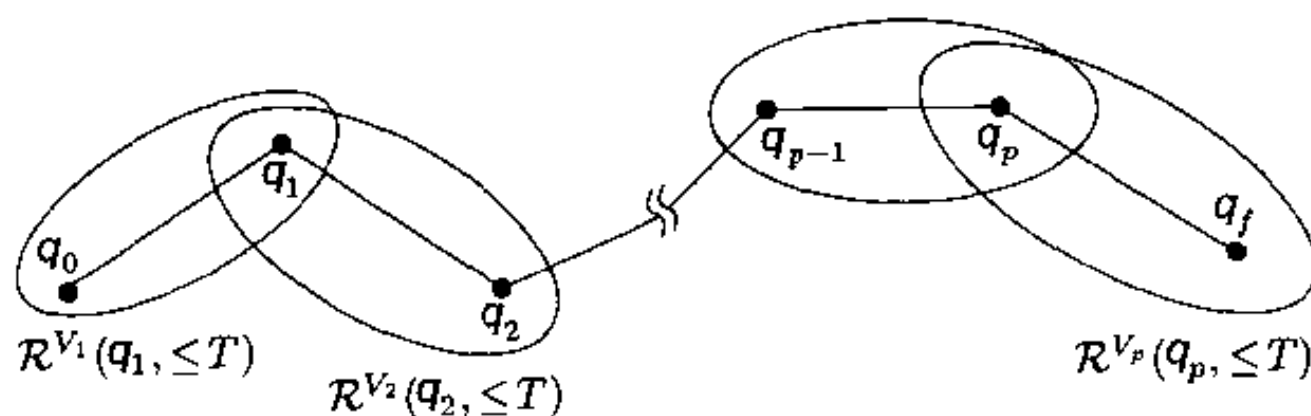


图 7.4 q_0 至 q_f 的运动规划

用这种方法和本节定理的困难, 在于它们是非结构化的 (non-constructive)。对于给定的一组约束

$$\omega_i(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}=0 \quad i=1,\cdots,k$$

和任意的 $\mathbf{q}_0$ 与 $\mathbf{q}_f$ ，假如相应的控制系统

$$\dot{\mathbf{q}} = g_1(\mathbf{q})u_1 + \cdots + g_{n-k}(\mathbf{q})u_{n-k}$$

存在一个满秩可控性李代数，则原则上可以解决运动规划问题。然而，上述定理并没有给出一个生成连接 $\mathbf{q}_0$ 和 $\mathbf{q}_f$ 的路径的具体方法。这种结构化的可控性将是下一章研究的目标。

3 非完整系统实例

下面给出一些具有非完整约束的系统实例，这一章和下一章将反复运用这些例子来说明不同的概念。以下两种情况存在非完整约束：

- 1) 刚体间的接触为无滑动的滚动。
- 2) 角动量守恒的多体系统。

多指机器人手灵巧操作问题即属第一种情况，手指在被抓物体上作无滑动的滚动构成了非完整约束。移动机器人或汽车（轮子作无滑动的滚动）的轨迹规划问题也属此类情况。带有机器人的卫星运动即是第二种情况的例子，其中角动量是守恒的。半空中的跳水员或体操运动员也属于第二种情况。

下面将描述几个非完整系统。非完整性（即不存在是可积约束的位形变量函数）的证明安排在第四节中介绍。

例 7.2 跳跃机器人

作为第一个例子，讨论图 7.5 所示处于运动状态的跳跃机器人的动力学。该机器人有一条能转动并能伸缩的可驱动腿，系统的“约束”是角动量守恒。

位形参数 $\mathbf{q} = (\Psi, l, \theta)$ 包括腿的转角，腿的伸缩量及机器人本体的转角。将本体的惯性矩记为 I ，并认为腿的质量 m 集中在脚上。设上腿长度为 d ，腿的伸长量用 l 表示。机器人总的角动量为

$$I\dot{\theta} + m(l+d)^2(\dot{\theta} + \dot{\Psi}) \quad (7.11)$$

假设机器人的角动量开始时为零，则式 (7.11) 是一个以三个速度 $\dot{\phi}$ 、 $\dot{l}$ 和 $\dot{\theta}$ 表示的 Pfaffian 约束。因此，相应的控制系统有两个输入，即三个位形变量减去一个约束。作为约束的二维零空间的一个基，取一个矢量场对应于腿的转角 Ψ ，另一个矢量场对应于腿的伸长量 l ，即令 $\dot{\Psi} = u_1$ ， $\dot{l} = u_2$ 。因此有

$$g_1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{m(l+d)^2}{I+m(l+d)^2} \end{bmatrix} \quad g_2(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

等价的控制系统为

$$\dot{\mathbf{q}} = g_1(\mathbf{q})u_1 + g_2(\mathbf{q})u_2$$

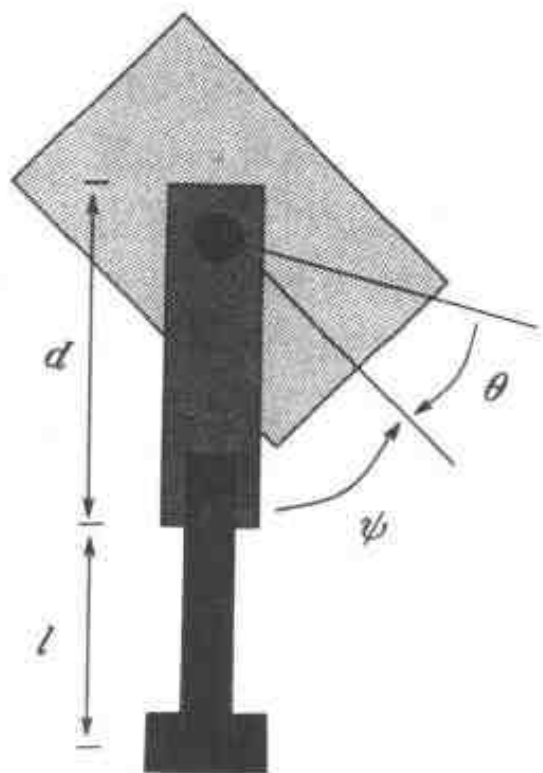


图 7.5 一个简单的跳跃机器人

例 7.3 平面型太空机器人

图 7.6 所示为一个平面机器人的简单模型，其中两个手臂通过转动关节与中间的本体相联。如果机器人自由浮动于空中，那么角动量守恒定律是指通过手臂的运动能引起本体的转动。若角动量为零，则守恒定律可视为系统的一个 Pfaffian 约束。

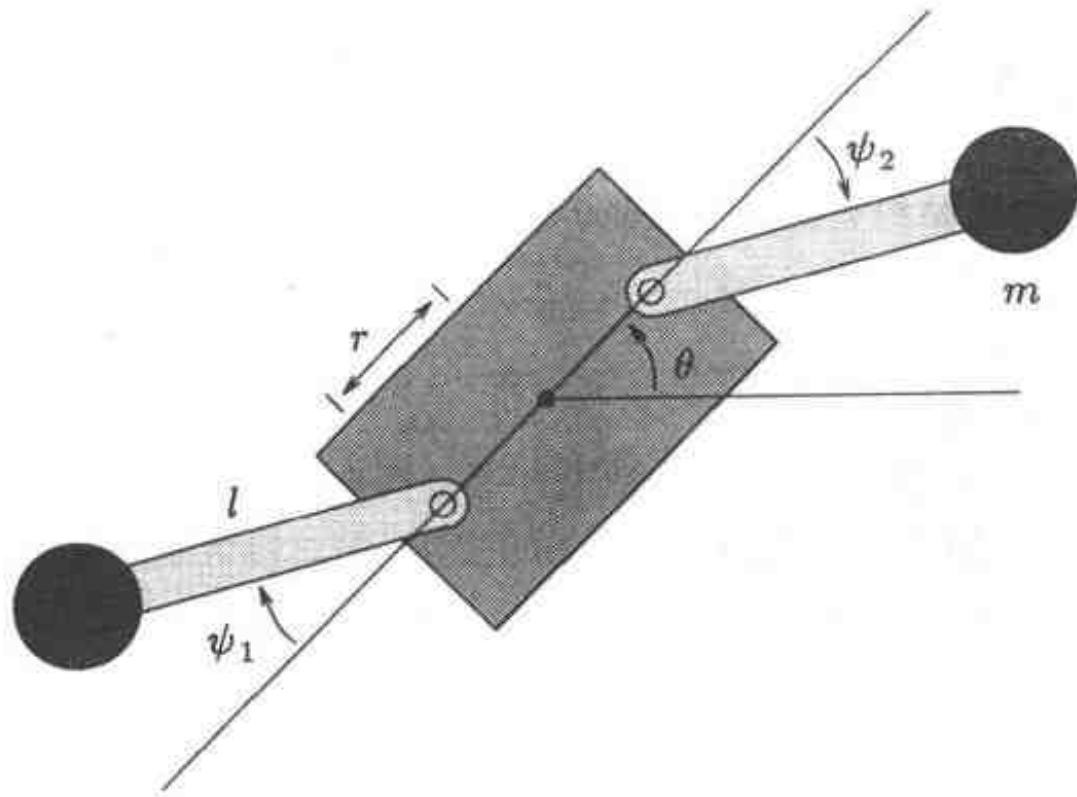


图 7.6 平面型太空机器人的简化模型

设 M 和 I 分别表示本体的质量和惯量， m 表示手臂的质量，质量集中在手臂的端部。转动关节离本体中心的距离为 r ，关节所联连杆的长度为 l 。设 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 分别表示两臂端部的位置（为 θ, Ψ_1 和 Ψ_2 的函数）。假设本体自由浮动在空中，并且摩擦力忽略不计，可以推导由于角动量守恒而产生的约束。

设 θ 为本体与水平线的夹角， Ψ_1 和 Ψ_2 分别为左臂和右臂与本体之间的夹角， $r \in \mathbb{R}^2$ 为本体上一点的位置（如质心）。系统的动能为

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} (M + 2m) \|\dot{r}\|^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \frac{1}{2} (M + 2m) \|\dot{r}\|^2 + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\Psi}_1 \\ \dot{\Psi}_2 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Psi}_1 \\ \dot{\Psi}_2 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

式中 a_{ij} 为

$$a_{11} = a_{22} = ml^2$$

$$a_{12} = 0$$

$$a_{13} = ml^2 + mr \cos \Psi_1$$

$$a_{23} = ml^2 + mr \cos \Psi_2$$

$$a_{33} = I + 2ml^2 + 2mr^2 + 2mrl \cos \Psi_1 + 2mrl \cos \Psi_2$$

注意系统的动能与变量 θ 无关。在无外力情况下，由拉格朗日方程得

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

因此 $\partial L / \partial \dot{\theta}$ 是与运动无关的常数。准确地说，这就是系统的角动量 μ

$$\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = a_{13}\dot{\Psi}_1 + a_{23}\dot{\Psi}_2 + a_{33}\dot{\theta}$$

如果初始角动量为零, 那么角动量守恒必须保证角动量始终为零, 由此得如下约束方程

$$a_{13}(\Psi)\dot{\Psi}_1 + a_{23}(\Psi)\dot{\Psi}_2 + a_{33}(\Psi)\dot{\theta} = 0 \quad (7.12)$$

由于受控变量是左、右臂的关节角, 所以可将其取为输入 $u_1 = \dot{\Psi}_1$ 和 $u_2 = \dot{\Psi}_2$ 。将它们代入式 (7.12), 并设 $\mathbf{q} = (\Psi_1, \Psi_2, \theta)$, 得

$$\dot{\mathbf{q}} = g_1(\mathbf{q})u_1 + g_2(\mathbf{q})u_2$$

式中

$$g_1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -a_{13} \\ a_{33} \end{bmatrix} \quad g_2(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$$

例 7.4 在平面上滚动的圆盘

考虑图 7.7 所示在平面上滚动的薄平圆盘的运动。系统位形空间可由圆盘与平面接触点的位置 x 、 y 、圆盘与水平线的夹角 θ 以及圆盘上一条固定线与铅垂轴的夹角 ϕ 来描述。假定圆盘作无滑动的滚动, 则有

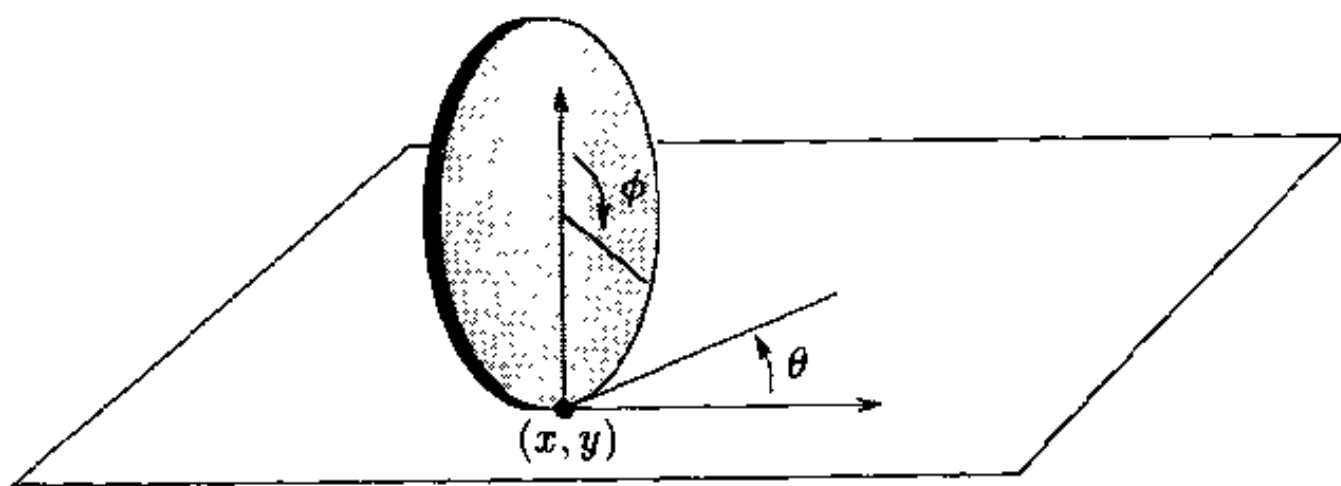


图 7.7 在平面上滚动的圆盘

$$\dot{x} - \rho \cos \theta \dot{\phi} = 0$$

$$\dot{y} - \rho \sin \theta \dot{\phi} = 0$$

式中 $\rho > 0$ 是圆盘的半径。将这些方程写成 Pfaffian 约束形式, 并设 $\mathbf{q} = (x, y, \theta, \phi)$, 可得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\rho \cos \theta \\ 0 & 1 & 0 & -\rho \sin \theta \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = 0$$

取 $\dot{\theta} = u_1$ 为滚动速度, $\dot{\phi} = u_2$ 为绕铅垂轴的旋转速度, 可得相应的控制系统为

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \rho \cos \theta \\ \rho \sin \theta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_2 \quad (7.13)$$

例 7.5 运动中的汽车

考虑图 7.8 所示有前后轮的汽车的运动学模型。后轮与车运动方向一致, 前轮允许绕铅

垂轴侧转。为简化推导,将前后轮分别当作位于轴线中点的单个轮子。施加于系统的约束是允许轮子滚动和侧转,但不滑动。

设 (x, y, θ, ϕ) 表示汽车的位形,其中参数 x, y 为后轮的位置, θ 为车体与水平线的夹角, ϕ 为车轮相对于车体的转向角。通过设车轮侧向速度为零可建立前后轮的约束。后轮在垂直于其轴线方向上的速度为 $\sin\theta\dot{x} - \cos\theta\dot{y}$, 前轮在垂直于其轴线方向上的速度为 $\sin(\theta + \phi)\dot{x} - \cos(\theta + \phi)\dot{y} - l\dot{\theta}\cos\phi$, 因此作用在汽车上的 Pfaffian 约束为

$$\begin{aligned}\sin(\theta + \phi)\dot{x} - \cos(\theta + \phi)\dot{y} - l\dot{\theta}\cos\phi &= 0 \\ \sin\theta\dot{x} - \cos\theta\dot{y} &= 0\end{aligned}$$

取输入为行进速度 u_1 和转向速度 u_2 , 则有

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ \frac{1}{l}\tan\phi \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u_2 \quad (7.14)$$

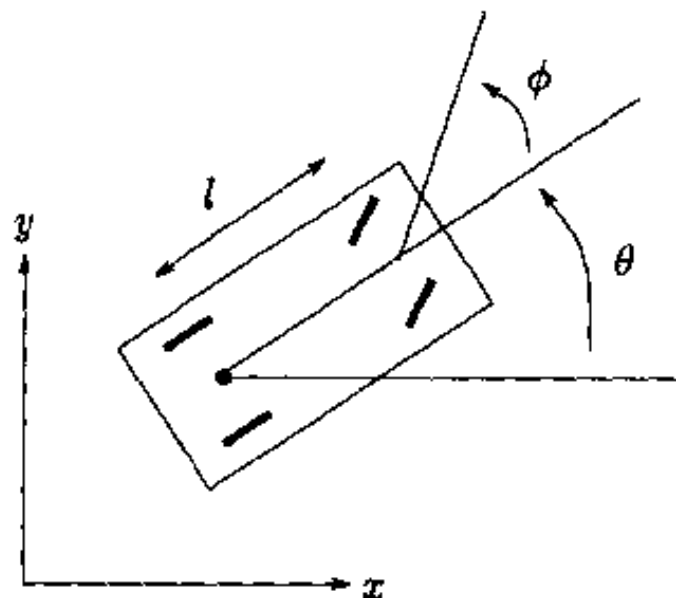


图 7.8 汽车的运动学模型

对于矢量场的这种选择, u_1 对应于汽车后轮的前进速度, u_2 对应于转向轮的侧转角速度。

例 7.6 指端在物体上的滚动

现分析曲面指端在曲面物体上的运动。如第五章第六节中的讨论, 用 $\alpha_o \in \mathbb{R}^2$ 表示物体表面, $\alpha_f \in \mathbb{R}^2$ 表示指端表面, $\Psi \in S^1$ 表示接触角, 由此得到一个 5 维位形空间。接触的运动方程可写为

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_f &= M_f^{-1}(\mathbf{K}_f + \tilde{\mathbf{K}}_o)^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} -\omega_y \\ \omega_x \end{bmatrix} - \tilde{\mathbf{K}}_o \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \right\} \\ \dot{\alpha}_o &= M_o^{-1} \mathbf{R}_\Psi (\mathbf{K}_f + \tilde{\mathbf{K}}_o)^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} -\omega_y \\ \omega_x \end{bmatrix} + \mathbf{K}_f \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \right\} \\ \dot{\Psi} &= \omega_z + \mathbf{T}_f \mathbf{M}_f \dot{\alpha}_f + \mathbf{T}_o \mathbf{M}_o \dot{\alpha}_o\end{aligned} \quad (7.15)$$

设滑动速度和绕接触法线的转动速度均为零, 可得滚动约束方程为

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = 0 \quad \omega_z = 0 \quad (7.16)$$

将式 (7.16) 代入式 (7.15) 得如下约束

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_f \dot{\alpha}_f - \mathbf{R}_\Psi \mathbf{M}_o \dot{\alpha}_o &= 0 \\ \mathbf{T}_f \mathbf{M}_f \dot{\alpha}_f + \mathbf{T}_o \mathbf{M}_o \dot{\alpha}_o - \dot{\Psi} &= 0\end{aligned} \quad (7.17)$$

若令 $q = (\alpha_f, \alpha_o, \Psi) \in \mathbb{R}^5$, 则上述三个约束具有如下形式

$$\omega_i(q) \dot{q} = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

为了获得与这些约束相适应的控制系统, 令滚动接触运动方程中的 $u_1 = \omega_x$, $u_2 = \omega_y$ 。对上述方程重新组合后可得

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_f^{-1} \\ \mathbf{M}_o^{-1} \mathbf{R}_\Psi \\ \mathbf{T}_f + \mathbf{T}_o \mathbf{R}_\Psi \end{bmatrix} (\mathbf{K}_f + \tilde{\mathbf{K}}_o)^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} u_2 \right) \quad (7.18)$$

现考虑物体是平面、指端是单位半径球面的特殊情况。例 5.7 中已推导了指端和物体的曲率、度量张量及挠率，为方便讨论，摘录如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_o &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{k}_f &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{M}_o &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{M}_f &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos q_1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{T}_o &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{T}_f &= \begin{bmatrix} 0 & -\tan q_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

将上述结果代入式 (7.17) 得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\cos q_5 & \sin q_5 & 0 \\ 0 & \cos q_1 & \sin q_5 & \cos q_5 & 0 \\ 0 & \sin q_1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = 0$$

在这种情况下，若取绕两个切线方向的滚动速度作为输入，则由式 (7.18) 可得

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sec q_1 \\ -\sin q_5 \\ -\cos q_5 \\ -\tan q_1 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -\cos q_5 \\ \sin q_5 \\ 0 \end{bmatrix} u_2 \quad (7.19)$$

4 非完整系统的结构

现回到满足如下形式线性速度约束

$$\omega_i(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad i = 1, \dots, k$$

的系统运动规划问题上。第 2 节已证明了寻找位形空间的可行轨迹问题可转变为寻找如下控制系统的轨迹问题

$$\dot{\mathbf{q}} = g_1(\mathbf{q}) u_1 + \dots + g_m(\mathbf{q}) u_m \quad (7.20)$$

其中 $m = n - k$, $\omega_i(\mathbf{q}) g_i(\mathbf{q}) = 0$ 。由可控性秩条件知，如果由 $g_1, \dots, g_m$ 构成的李代数的秩为 n ，那么能够找到一条连接任意初始点和终点的轨迹。如果 $\bar{\Delta}_q \neq T_q \mathfrak{R}^n$ ，且 $\bar{\Delta}_q$ 的秩是小于 n 的常数 $n - p$ ，由 Frobenius 定理知，存在函数 $h_i(\mathbf{q}) = c_i$, $i = 1, \dots, p$ ，使得

$$\omega_i(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad i = 1, \dots, k \quad \Leftrightarrow \quad h_j(\mathbf{q}) = c_j \quad j = 1, \dots, p$$

由于 $\bar{\Delta}$ 的维数大于等于 Δ 的维数，故 $p \leq k$ ，因此，能级集合与给定分布相切的函数数目小于分布的维数。将给定约束（认为是余分布）转变为一个等价控制系统，然后对该分布的对合封闭进行积分的过程似乎是很复杂的。事实上可以直接研究给定的余分布，并获得包含在其中的最大可积余分布，但这涉及外微分系统的方法，已超出本书的范围。当然，若对于所有的 $\mathbf{q}$ ，有 $\bar{\Delta} = T_q \mathfrak{R}^n$ ，那么 $p = 0$ ，即不存在对给定约束求积的非平凡函数。如前所

述, 这种分布是完全非完整的。

本节试图对非完整系统的处理作准确的描述, 并将其用于第 3 节的例子。本节的最后将讨论可控性李代数研究的一些其他方法。

4.1 非完整分布的分类

运动规划问题的复杂性与可控性李代数中李括号的阶数有关。下面给出非完整系统分类的一些概念。设 $\Delta = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\}$ 为控制系统 (7.20) 的分布, 定义 $\Delta_1 = \Delta$ 和

$$\Delta_i = \Delta_{i-1} + [\Delta_1, \Delta_{i-1}]$$

式中

$$[\Delta_1, \Delta_{i-1}] = \text{span}\{[g, h] : g \in \Delta_1, h \in \Delta_{i-1}\}$$

显然 $\Delta_i \subset \Delta_{i+1}$ 。分布 Δ_i 的链定义为与分布 $\Delta = \Delta_i$ 有关的过滤 (filtration)。输入矢量场和最多 $i-1$ 个李括号构成的矢量场共同张成了 Δ_i 。雅可比恒等式 (见定理 7.1) 是指 $[\Delta_i, \Delta_j] \subset [\Delta_1, \Delta_{i+j-1}] \subset \Delta_{i+j}$, 此结论的证明留作习题。

如果

$$\text{rank} \Delta_i(q) = \text{rank} \Delta_i(q_0) \quad \forall q \in U$$

则认为过滤在 q_0 的邻域 U 中是规则的。若相应的过滤是规则的, 那么控制系统 (7.20) 是规则的。如果一个过滤是规则的, 则在其构造的每一步, Δ_i 或增加维数, 或 $\Delta_{i+1} = \Delta_i$, 从而使构造结束。如果 $\text{rank} \Delta_{i+1} = \text{rank} \Delta_i$, 那么 Δ_i 是对合的, 因此对于所有的 $j \geq 0$, 有 $\Delta_{i+j} = \Delta_i$ 。显然 $\text{rank} \Delta_i \leq n$, 并且如果过滤是规则的, 则存在一个整数 $k < n$, 使得对所有的 $i \geq k$, 有 $\Delta_i = \Delta_k$ 。

定义 7.2 非完整度

考虑分布 Δ 的规则过滤 $\{\Delta_i\}$, 使 Δ_k 的秩等于 Δ_{k+1} 的秩的最小整数称为分布的非完整度 (degree of nonholonomy)。

已知 $\text{rank} \Delta_k \leq n$ 。一般令 $\text{rank} \Delta_k = n - p$, 由 Frobenius 定理知, 存在 p 个函数 h_i , $i = 1, \dots, p$, 其能级曲面是 Δ_k 的积分流。因此, 控制系统的状态 q 必须限制在 h_i 的能级集合上。这样也就全面解决了本章开始时所提出的问题。由 Frobenius 定理知, 使

$$\text{span}\left\{\frac{\partial h_1}{\partial q}, \dots, \frac{\partial h_p}{\partial q}\right\} \subset \text{span}\{\omega_1, \dots, \omega_k\}$$

的函数 h_i 的最大数目, 就是使

$$\text{span}\left\{\frac{\partial h_1}{\partial q}, \dots, \frac{\partial h_p}{\partial q}\right\} = (\overline{\Delta})^\perp$$

的函数集。若 $p=0$, 即 Δ_k 的秩等于 n , 那么不存在非平凡函数 h_i , 并能实现任意给定初始点和终点之间的运动。这就是上一节所讨论的 Chow 定理。实际上在过滤 Δ_i 为不规则时该定理也是有效的, 只要 Δ 是光滑的且其秩为定值即可。

下面给出用于对过滤的增长进行分类的定义。

定义 7.3 增长矢量, 相对增长矢量

考虑一个与给定分布 Δ 有关的、非完整度为 k 的规则过滤。对于这样的系统, 定义增长矢量 (growth vector) $r \in \mathbb{Z}^k$ 为

$$r_i = \text{rank} \Delta_i$$

定义相对增长矢量 (relative growth vector) $\sigma \in Z^k$ 为 $\sigma_i = r_i - r_{i-1}$, 且 $r_0 := 0$ 。

规则过滤的增长矢量可以方便地表示可控性李代数的复杂信息。

4.2 非完整系统实例 (续)

本小节将针对第3节给出的实例来说明非完整系统的分类。

例 7.7 跳跃机器人

由第3节已知处于运动状态的跳跃机器人的位形空间由参数 (ψ, l, θ) 确定, 这三个参数分别表示腿的转角、腿的伸缩量及机器人本体的转角。因为腿转角和伸长量是直接控制的, 所以可取其速度作为输入, 则跳跃机器人的控制系统可描述为

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= u_1 \\ \dot{l} &= u_2 \\ \dot{\theta} &= -\frac{m(l+d)^2}{I+(l+d)^2}u_1\end{aligned}$$

可控性李代数

$$g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{m(l+d)^2}{I+(l+d)^2} \end{bmatrix} \quad g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad g_3 = [g_1, g_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2ml(l+d)}{(I+m(l+d)^2)^2} \end{bmatrix}$$

在 $l=0$ 的邻域, $\text{span}\{g_1, g_2, g_3\}$ 是满秩的, 因此跳跃机器人的非完整度为 2, 增长矢量为 $(2, 3)$, 相对增长矢量为 $(2, 1)$ 。

例 7.8 平面型太空机器人

由例 7.3 知, 角动量守恒约束为

$$\alpha_{13}(\Psi)\dot{\Psi}_1 + \alpha_{23}(\Psi)\dot{\Psi}_2 + \alpha_{33}(\Psi)\dot{\theta} = 0$$

式中位形变量的矢量为 $q = (\Psi_1, \Psi_2, \theta)$ 。利用例 7.3 推导的控制方程, 可得

$$g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{ml^2 + mrcos\Psi_1}{I + 2ml^2 + 2mr^2 + 2mrlcos\Psi_1 + 2mrlcos\Psi_2} \end{bmatrix}$$

$$g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{ml^2 + mrcos\Psi_2}{I + 2ml^2 + 2mr^2 + 2mrlcos\Psi_1 + 2mrlcos\Psi_2} \end{bmatrix}$$

李括号为

$$g_3 = [g_1, g_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2m^2l^2r(-l\sin\Psi_1 - r\sin(\Psi_1 - \Psi_2) + l\sin\Psi_2)}{(I + 2ml^2 + 2mr^2 + 2mrlcos\Psi_1 + 2mrlcos\Psi_2)^2} \end{bmatrix}$$

当 $\Psi_1 = \Psi_2$ 时, 矢量场 g_3 为零。因此, 过滤 $\{\Delta_i\}$ 是不规则的。然而, 通过计算更高阶的李括号, 可以证明在 $q=0$ 的一个邻域, 有 $\bar{\Delta}_q = T_q\mathfrak{R}^3$, 并且系统是可控的。

例 7.9 在平面上滚动的圆盘

由例 7.4 知, 在平面上滚动的圆盘的控制系统可用由 g_1 、 g_2 张成的分布来描述

$$g_1 = \begin{bmatrix} \rho \cos \theta \\ \rho \sin \theta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

控制李代数可通过计算如下矢量场来构造

$$g_3 = [g_1, g_2] = \begin{bmatrix} -\rho \sin \theta \\ \rho \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad g_4 = [g_2, g_3] = \begin{bmatrix} \rho \cos \theta \\ \rho \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

对于所有的 q , $\text{span}\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ 是满秩的, 因此滚动圆盘的非完整度为 3, 增长矢量为 $(2, 3, 4)$, 相对增长矢量为 $(2, 1, 1)$ 。

例 7.10 运动中的汽车

用参数 (x, y, θ, ϕ) 表示汽车的位形, 这四个参数分别对应于后轮的位置、车体与水平线的夹角, 车轮相对于车体的转向角。前后轮作无滑动的滚动所对应的约束可表示为

$$\begin{aligned} \sin(\theta + \phi)\dot{x} - \cos(\theta + \phi)\dot{y} - l\cos\phi\dot{\theta} &= 0 \\ \sin\theta\dot{x} - \cos\theta\dot{y} &= 0 \end{aligned}$$

取输入为行进速度和转向速度, 则得式 (7.14) 的控制系统。

为计算增长矢量, 构造过流

$$g_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ \frac{1}{l} \tan \phi \\ 0 \end{bmatrix} \quad g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$g_3 = [g_1, g_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{l \cos^2 \phi} \\ 0 \end{bmatrix} \quad g_4 = [g_1, g_3] = \begin{bmatrix} -\frac{\sin \theta}{l \cos^2 \phi} \\ \frac{\cos \theta}{\cos^2 \phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

当 $\phi \neq \pm \pi$ 时, 矢量场 $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ 是线性无关的。因此系统的非完整度为 3, 增长矢量为 $r = (2, 3, 4)$, 相对增长矢量为 $\sigma = (2, 1, 1)$ 。当系统不在 g_1 未作定义的点 $\phi = \pm \pi/2$ 位置时, 系统都是规则的。

例 7.11 球指在平面上的滚动

设输入是滚动速度的两个分量, 即 $u_1 = \omega_x$ 和 $u_2 = \omega_y$ 。相应的控制系统见式 (7.19), 以矢量场的形式, 该式可写为

$$g_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sec q_1 \\ -\sin q_5 \\ -\cos q_5 \\ -\tan q_1 \end{bmatrix} \quad g_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -\cos q_5 \\ \sin q_5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

构造过滤, 可得

$$g_3 = [g_1, g_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ \tan q_1 \sec q_1 \\ -\tan q_1 \sin q_5 \\ -\tan q_1 \cos q_5 \\ -\sec^2 q_1 \end{bmatrix} \quad g_4 = [g_1, g_3] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\cos q_5 \\ \sin q_5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$g_5 = [g_2, g_3] = \begin{bmatrix} 0 \\ -(1 + \sin^2 q_1) \sec^3 q_1 \\ 2 \sin q_5 \sec^2 q_1 \\ 2 \cos q_5 \sec^2 q_1 \\ 2 \tan q_1 \sec^2 q_1 \end{bmatrix}$$

在 $q=0$ 的一个邻域 (特别在不包括 $q_1 = \frac{\pi}{2}$ 的邻域), 矢量场 $\{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}$ 是线性独立的, 因此非完整度为 3, 增长矢量为 $(2, 3, 5)$, 相对增长矢量为 $(2, 1, 2)$ 。

4.3 Philip Hall 基

设 $L(g_1, \dots, g_m)$ 为由一组矢量场 $g_1, \dots, g_m$ 构成的李代数。给 $L(g_1, \dots, g_m)$ 取基的方法之一是列出所有生成元和所有李积。问题是由于反对称性和雅可比恒等式的存在, 使得并非所有李积都是线性独立的。Philip Hall 基是一个特殊的基, 它考虑了反对称性和雅可比恒等式。

给定一组生成元 $\{g_1, \dots, g_m\}$, 依次定义李积的长度为

$$l(g_i) = 1 \quad i = 1, \dots, m$$

$$l([A, B]) = l(A) + l(B)$$

式中 A 和 B 为其自身的李积。另外, $l(A)$ 是 A 扩展的生成元数目。如果存在一个整数 k , 使得所有长度大于 k 的李积为零, 则该李代数是幂零的 (nilpotent)。整数 k 称为幂零的阶。

Philip Hall 基是李积 $H = \{B_i\}$ 的有序集合, 它满足:

1. $g_i \in H, i = 1, \dots, m$

2. 若 $l(B_i) < l(B_j)$, 则 $B_i < B_j$

3. $[B_i, B_j] \in H$ 当且仅当

(a) $B_i, B_j \in H, B_i < B_j$, 且

(b) 或对某个 k , 有 $B_j = g_k$; 或对于 $B_l, B_r \in H$, 有 $B_j = [B_l, B_r]$, 且 $B_l \leq B_r$ 。

关于 Philip Hall 基确实是由 $\{g_1, \dots, g_m\}$ 生成的李代数的一个基的证明已超出本书的范围, 读者可查阅文献 [38] 和 [105]。根据定义, 一个 k 阶幂零的 Philip Hall 基可通过

一组生成元来构造。最简单的方法是构造长度小于 k 的所有可能的李积, 然后用定义来消去不满足上述性质的元。实际上, 构造基时只需检查条件 3 就可以了。

例 7.12 3 阶 Philip Hall 基

由 g_1, g_2, g_3 生成的 3 阶幂零李代数的一个基为

$$\begin{array}{llll} g_1 & g_2 & g_3 & \\ [g_1, g_2] & [g_2, g_3] & [g_3, g_1] & \\ [g_1, [g_1, g_2]] & [g_1, [g_1, g_3]] & [g_2, [g_1, g_2]] & [g_2, [g_1, g_3]] \\ [g_2, [g_2, g_3]] & [g_3, [g_1, g_2]] & [g_3, [g_1, g_3]] & [g_3, [g_2, g_3]] \end{array}$$

注意式中没有出现 $[g_1, [g_2, g_3]]$, 这是因为根据雅可比恒等式知

$$[g_1, [g_2, g_3]] + [g_2, [g_3, g_1]] + [g_3, [g_1, g_2]] = 0$$

上式中的后两项已存在。

5 小结

本章涉及的主要概念如下:

1. 非完整约束是具有如下形式的线性速度约束

$$\omega_i(q)\dot{q} = 0 \quad i = 1, \dots, k$$

上式是不可积的, 不能变成以位形变量 q 表示的约束。取 $g_j(q)$, $j = 1, \dots, n - k =: m$ 为线性速度约束零空间的一个基, 可得相应的控制系统

$$\dot{q} = g_1(q)u_1 + \dots + g_m(q)u_m$$

非完整运动规划问题, 即是给定 $q(0) = q_0$ 和 $q(T) = q_f$, 寻找一条轨迹 $q(\cdot): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 。

2. 空间 $\mathbb{R}^n$ 内两个矢量场 f 和 g 的李氏括号是一个新的矢量 $[f, g]$, 定义为

$$[f, g](q) = \frac{\partial g}{\partial q} f(q) - \frac{\partial f}{\partial q} g(q)$$

3. 分布 Δ 是将切空间的一个子空间光滑地赋给每个点 $q \in \mathbb{R}^n$ 。生成分布的重要方法是将其看作由一组矢量场张成:

$$\Delta = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\}$$

如果 Δ_q 的维数不随 q 变化, 则称分布 Δ 是规则的。如果分布在李括号下是封闭的, 则称其为是对合的, 也即如果对于所有的 $f, g \in \Delta$, 有 $[f, g] \in \Delta$ 。

4. 如果存在 $n - k$ 独立函数, 其微分零化了分布 Δ , 则认为此分布是可积的。Frobenius 定理强调, 规则分布是可积的当且仅当它是对合的。对于 Pfaffian 系统或余分布 Ω

$$\Omega = \text{span}\{\omega_1, \dots, \omega_k\}$$

如果对于所有的 q , 分布 $\Delta = \Omega^\perp$ 的对合封闭张成空间 $\mathbb{R}^n$, 则此 Pfaffian 系统或余分布 Ω 是完全非完整的。

5. 考虑系统

$$\dot{q} = g_1(q)u_1 + \dots + g_m(q)u_m$$

可控性李代数是由矢量场 $g_1, \dots, g_m$ 生成的李代数, 它是包含 $g_1, \dots, g_m$ 的最小李代数。Chow 定理强调, 如果可控性李代数是满秩的, 则系统可从任意初始点运动到任意终点。

6. 对于给定的分布 Δ , 与 Δ 关联的过滤定义为 $\Delta_1 = \Delta$ 及

$$\Delta_i = \Delta_{i-1} + [\Delta_1, \Delta_{i-1}]$$

式中

$$[\Delta_1, \Delta_{i-1}] = \text{span}\{[g, h] : g \in \Delta_1, h \in \Delta_{i-1}\}$$

如果所有 Δ_i 都是规则的, 则认为过滤是规则的。对于一个规则过滤, Δ_k 的秩等于 Δ_{k+1} , Δ_{k+2} , ... 的秩的最小整数 k 称为分布的非完整度。规则过滤的增长矢量 $r \in \mathbb{Z}^k$ 定义为 $r_i := \text{rank} \Delta_i$, 相对增长矢量 $\sigma \in \mathbb{Z}^k$ 定义为 $\sigma_i = r_i - r_{i-1}$, 且 $r_0 = 0$ 。

7. 对于给定的 $\Delta = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\}$, 李积是生成元 g_i 的任意一组嵌套李括号。如果存在一个整数 k , 使得所有长度大于 k 的李积为零, 则由 Δ 构成的李代数是幂零的。Philip Hall 基是李积的有序集合, 可按一组规则来选取, 以满足李括号特性 (即反对称性和雅可比恒等式) 的限制。

6 文献说明

Pfaffian 约束的完整性和非完整性吸引了许多早期撰写经典力学的著作者。文献 [82] 从力学的观点对此作了精僻的阐述。Rosenberg^[100] 第一章介绍了不同种类的约束: 完整的, 定常的, 非定常的。本章手指在物体表面上滚动的例子选自文献 [61, 77], 移动机器人和泊车问题选自文献 [79, 113], 太空机器人例子选自文献 [119, 32]。文献 [62] 是一本关于非完整运动规划的最新论文集。

非线性可控性的研究也已有很久的历史, 其中 Hermann 和 Krener^[40] 建立了 Chow 定理与可控性之间的联系。关于非线性控制方面的内容可参阅著作 [44, 84]。本章介绍的非完整分布理论最早由 Vershik 和 Gershkovic^[117] 提出, 本章所采用的表示方法也参考了此文, 并发表于作者的论文 [79] 中。

本章的方法也可用于冗余度机器人控制算法的分析, 如可建立由末端执行器的封闭轨迹生成机器人关节空间内的封闭路径的算法, 该问题与一组约束的可积性紧密相关, Shamir 和 Yomdin^[106], Ballieul 和 Martin^[5], Chiacchio 和 Siciliano^[17] 以及 De Luca 和 Oriolo^[23] 对此均作了很好的描述。

7 习题

1. 证明可控性秩条件也是一般光滑性和规则性假设下局部可控性的必要条件。
2. 证明下列 $\mathbb{R}^5$ 中的微分约束是非完整的

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \rho \sin q_5 & \rho \cos q_3 & \cos q_5 \end{bmatrix} \dot{q} = 0.$$

3. 利用李括号的定义证明定理 7.1 的性质。
4. 考虑系统 Σ ,

$$\dot{q} = g_1(q)u_1 + \dots + g_m(q)u_m$$

设 $u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为控制 Σ 在 T 个单位时间内从 q_0 运动到 q_f 的输入。

(a) 证明由

$$\bar{u}(t) = u(t/T)$$

定义的输入 $\bar{u}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ 控制 σ 在 1 个单位时间内从 q_0 运动到 q_f ;

(b) 证明由

$$\bar{u}(t) = -\bar{u}(1-t)$$

定义的输入 $\bar{u}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ 控制 σ 在 1 个单位时间内从 q_0 运动到 q_f 。

5. 球在球面上的滚动

试推导单位球与另一半径为 ρ 的球构成滚动接触时的控制方程, 其输入与例 7.6 相同。并证明系统是可控的当且仅当 $\rho \neq 1$ 。

6. 带有 N 个拖厢的汽车

图 7.9 所示为一带有 N 个拖厢的汽车, 每个拖厢通过铰链联接于前一拖厢的后轴中心, 各拖厢的轮子与厢体方向一致。约束仅允许车轮滚动和侧转, 而不允许滑动。状态空间的维数为 $N+4$, 其中两个是可控量。

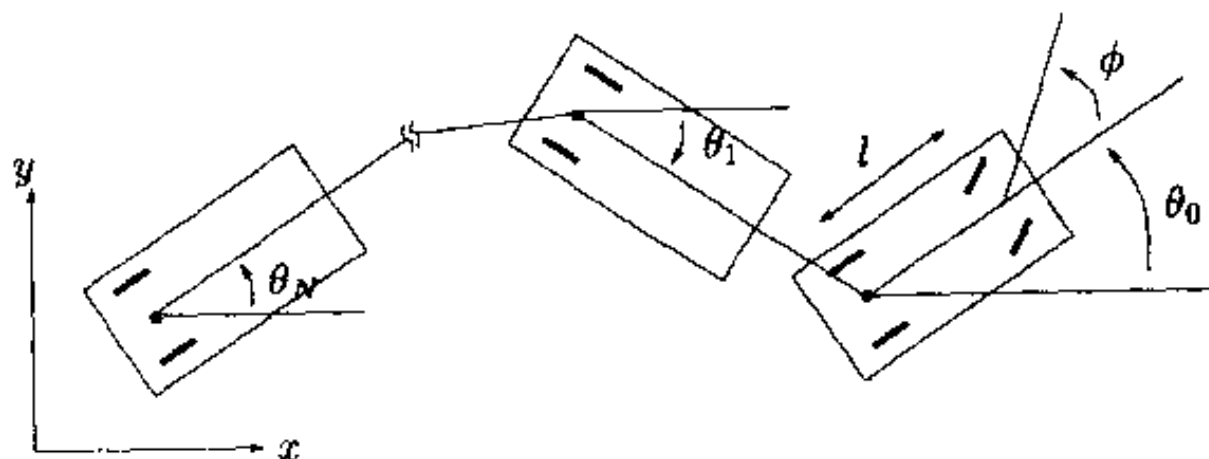


图 7.9 带有 N 个拖厢的汽车

试用汽车的状态参数和各拖厢与水平线的夹角来表示系统的位形, 并证明系统的控制方程具有如下形式:

$$\dot{x} = \cos \theta_0 u_1$$

$$\dot{y} = \sin \theta_0 u_1$$

$$\dot{\phi} = u_2$$

$$\dot{\theta}_0 = \frac{1}{l} \tan \phi u_1$$

$$\dot{\theta}_i = \frac{1}{d_i} \left(\prod_{j=1}^{i-1} \cos(\theta_{j-1} - \theta_j) \right) \sin(\theta_{i-1} - \theta_i) u_1$$

7. 消防车

如图 7.10 所示, 消防车可看作为带有一个拖厢的汽车, 但其拖厢是可侧转的。系统的约束与第三节中汽车例子的约束类似, 区别仅在于后轮是可侧转的。试推导消防车的非线性控制系统, 对应的控制输入为主车的行进参数以及主车和拖厢两者的侧转参数, 并证明它是一个可控系统。

8. 证明一维分布 $\Delta_q = \text{span}\{f(q)\}$ 是对合的。进一步证明对于任意两个光滑函数 α 和 β , 有

$$[\alpha f, \beta f] \in \Delta$$

9. 证明本章李括号的两个定义, 即

$$[f, g] = \frac{\partial g}{\partial q} f - \frac{\partial f}{\partial q} g$$

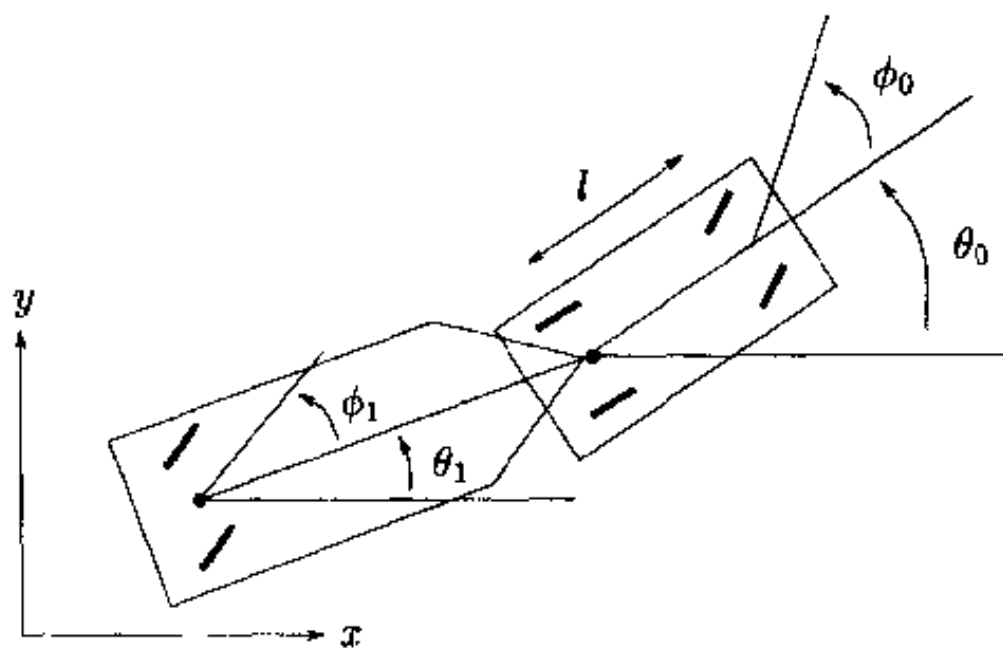


图 7.10 消防车

和

$$L_{[f, g]} \alpha = L_f(L_g \alpha) - L_g(L_f \alpha) \quad \forall \alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

是等价的。

10. 用归纳法和雅可比恒等式证明

$$[\Delta_i, \Delta_j] \subset [\Delta_1, \Delta_{i+j-1}] \subset \Delta_{i+j}$$

式中 $\Delta = \Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \dots$ 为与分布 Δ 关联的过滤。

11. 设 $\Delta_i, i=1, \dots, k$ 是与分布关联的一个规则过滤。试证明如果 $\text{rank}(\Delta_{i+1}) = \text{rank}(\Delta_i)$, 那么 Δ_i 是对合的。(提示: 利用习题 10 的结论)。

12. 具有两个转子的卫星

图 7.11 所示为带有两个对称分布转子的卫星本体, 两转子的转动轴线汇交于一点。系统的约束是角动量守恒。

(a) 假设系统的初始角动量为零, 试证明卫星本体的角速度 ω_1 与转子速度 (u_1, u_2) 之间有如下关系

$$\omega_1 = b_1 u_1 + b_2 u_2 \quad (7.21)$$

式中 $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^3$ 为定常矢量。

式 (7.21) 引出了卫星本体在旋转群 $SO(3)$ 中的一个微分方程

$$\dot{R}(t) = R(t)(\hat{b}_1 u_1 + \hat{b}_2 u_2) \quad (7.22)$$

(b) 用 $SO(3)$ 的欧拉参数 (见第二章) 给出式 (7.22) 的局部坐标描述, 并证明所得系统是可控的。

13. 图 7.12 所示为自由下落锚的简化模型, 它由通过球铰联结在一起的两个单摆组成。系统的位形空间为 $Q = S^2 \times S^2$, 其中 S^2 是 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面。

(a) 建立角动量守恒的 Pfaffian 约束, 并对其进行处理以获得非完整运动规划的控制系

统。

(b) 所得系统可控吗?

14. 对于 m 个生成元 $g_1, \dots, g_m$, 试编写生成给定阶 Philip Hall 基的计算机程序, 并用所编程序来生成具有 2 个生成元系统的一个 5 阶 Philip Hall 基。

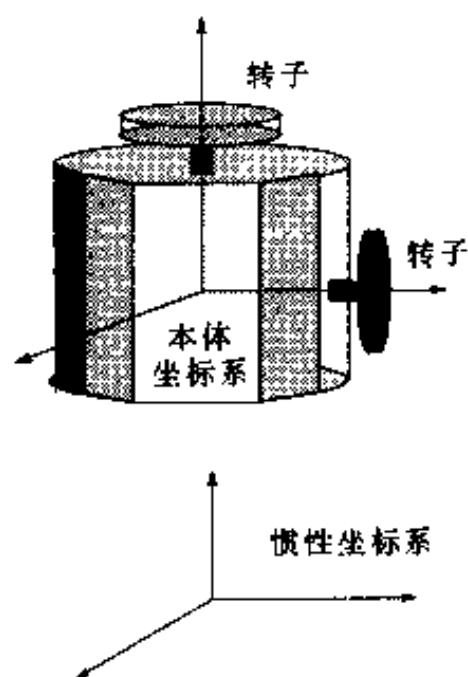


图 7.11 具有两个转子的卫星模型

[卫星可通过对转子速度的控制进行重新定位]

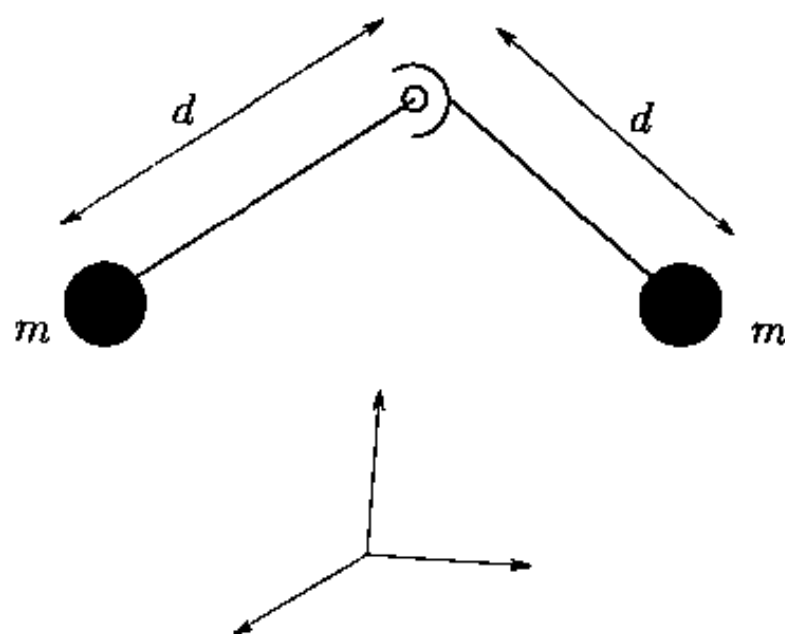


图 7.12 自由下落锚的简化模型

15. 考虑习题 6 的系统, 试编写一个程序来计算系统的过滤 (也可用 Mathematica 或其他符号运算软件包进行计算)。证明系统是可控的, 非完整度为 $N+2$, 相对增长矢量为 $(2, 1, \dots, 1)$ 。

16. 本章所讨论的约束仅限于如下形式

$$\omega_i(q)\dot{q} = 0 \quad i = 1, \dots, k$$

如果约束的形式改为

$$\omega_i(q)\dot{q} = c_i \quad i = 1, \dots, k$$

式中 c_i 为常数, 那么结果将会怎样? 经对约束的处理, 得如下形式的控制系统

$$\dot{q} = f(q) + \sum_{i=1}^k g_i(q)u_i$$

那么 $f(q)$ 的计算公式是怎样的? 试将上述方法用于非零角动量的太空机器人。在对上述各种情况进行轨迹规划时将会遇到什么困难? 上述系统称为有漂移的系统。

17. (难) 试证明对于一个规则系统, 增长矢量的上界为

$$\bar{\sigma}_i = \frac{1}{i} \left((\bar{\sigma}_1)^i - \sum_{j|i, j < i} j \bar{\sigma}_j \right) \quad i > 1$$

式中 $\bar{\sigma}_i$ 是第 i 阶的最大相对增长量, $j|i$ 是指 j 能除尽 i 的所有整数 j 。如果对所有的 i , 有 $\sigma_i = \bar{\sigma}_i$, 则认为系统具有最大增长量。

第八章 非完整运动规划

本章介绍非完整系统路径规划的一些方法。目前此方面的研究较为活跃，本章仅介绍一些实用的最新技术。除了规划满足约束

$$\omega_i(q)\dot{q}=0 \quad i=1, \dots, k$$

的路径外，还需确保轨迹 $q(\cdot)$ 不与障碍物（可看作是状态空间内的不可达区域）相交。例如，对于多个手指在被抓物体表面上滚动的情况，避障包括手指相互之间不能碰撞以及手指与被抓物体之间不能相碰。一般的（完整的）路径规划器都默认，只要避开障碍，位形空间内的任意运动都是许可的。如果一个系统含有非完整约束，许多路径规划器就不能直接应用，因为其生成的路径不能满足约束要求。为此，有必要解决非完整系统路径的有效计算方法。

1 概述

本节介绍非完整系统运动规划的一般方法，并对本章内容作一概要介绍。

最优控制

获得一般控制系统运动轨迹的最规范化方法也许就是最优控制（optimal control）方法。给每个轨迹建立一个评价函数（cost function），这样问题就可归结为寻找使评价函数最小的轨迹。典型的评价函数可以是路径的长度、控制成本或实现轨迹所需的时间。

如果系统的输入大小是有界的，则可用最少时间来解决运动规划问题，众所周知，对于许多问题，当允许输入的集合是凸集时，时间最优路径（time-optimal paths）将使输入始终为最大（常称为开关式控制（bang-bang control）。输入值在一个取值集合与另一个取值集合之间进行无限次切换。因此，选择最优轨迹就等价于选择切换次数（switching times）和两次切换之间的输入值。

分段定常输入

对于最优控制的开关轨迹，也可用分段定常输入（piecewise constant inputs）来控制非完整系统。定常输入的最直接方法是设置一个时间间隔，并用所有可能的有序输入（离散值）生成一个图形，图形上的每一个结点对应于一个位形，分支表示在该时间间隔内的一个固定控制。图形的大小随 m^d 增长，其中 m 为每一步输入的组合数， d 为步数。由于不知道要搜索多少步，所以这种算法所需的计算机内存将会是非常大的。同时，有可能不能精确地达到目标。如要精确控制的话，还需进行一些后处理。

最近，Lafferriere 和 Sussmann^[55]提出了使用分段定常输入的一种很好的通用运动规划方法，他们考虑的是幂零（nilpotent）系统情况。由第七章已知，如果所有大于 k 的李积项为零，则由 $g_1, \dots, g_m$ 张成的分布 Δ 是 k 阶幂零的。在本章第三节还将看到，幂零李分布

的优点在于可大大简化计算。他们的方法中所用的工具是 Baker - Campbell - Hausdorff 公式。如果系统不是零势的, 可以证明当起点和终点较接近时, Lafferriere 和 Sussmann 的算法将使原系统更加接近目标, 接近程度至少一半。将路径分成许多小段, 重复运用该算法, 就可任意接近目标。

标准路径

解决非完整系统路径规划的第三种方法, 是选择一组路径来生成所期望的运动。例如, 考虑汽车仅旋转某一角度或向前行进一段距离的路径, 通过对汽车重新定向、向前行进和再重新定向, 就可使汽车抵达任意位形。旋转对应的路径 (canonical paths) 可由一组参数化的分段定常输入或一个渐进轨迹组成。对应于某一问题的一组标准路径通常只适合于该问题。在某些情况下, 可用某种统一的方法来建立路径。例如, 如果能获得最优控制问题的封闭解, 则这些最优路径就构成了一组标准路径。对于时间最优控制问题, 可将最大输入所对应的路径作为标准路径, 但由于不知道如何组合这些路径以得到特定运动, 所以应将这些低级路径从标准路径中区分出来。Li 和 Canny^[61] 曾用标准路径来研究球面指端在物体上的运动。这种方法将在第四节中讨论。

本章概要

本章以下几节将详细介绍非完整运动规则的一些方法, 各节内容不是按方法, 而是从便于施教的角度来组织的。第二节研究如下典型非完整系统的控制:

$$\dot{q} = g_1(q)u_1 + \cdots + g_m(q)u_m \quad (8.1)$$

所谓典型系统是指一定意义上的标准系统。用最优控制的一些结果来生成一些典型系统的显式最优输入, 此类系统称为一阶控制系统, 其中最优控制输入为正弦波。由此, 进而探讨用正弦输入信号来控制二阶和更高阶标准控制系统。通过这一研究, 可以得到一种非常重要的标准系统, 称为链式系统 (chained form systems)。

第三节首先将正弦输入用于非标准系统的控制, 对于一些与链式系统类似的系统, 采用基本的傅里叶分析方法。同时, 也研究了何时能将一个给定系统转化为链式系统的问题。然后将 Ritz 近似技术用于研究最优输入的近似。最后, 讨论分段定常输入在一般运动规则问题中的应用。

第四节将本章所建立的理论以及标准轨迹中的一些几何推理技术, 用于研究手指在被抓物体表面上的重新定位问题。

2 典型控制系统的正弦控制

本节研究典型控制系统 (也就是某种意义上的标准系统) 的控制技术。这些系统表面上似乎与第七章所讨论的例子毫无关系, 但很快就会发现, 事实上它们是有着密切联系的。受 Brockett 在典型系统最优控制方面所得结果的启发, 采用以频率表示的正弦作为输入。本节首先回顾一下 Brockett 对非完整度为 2、增长矢量为 $(m, m(m+1)/2)$ 的典型系统的研究结果, 然后将其推广应用于其他典型控制系统, 特别是一类所谓的链式系统。关于非正弦方法和本节涉及的非典型系统的控制技术, 将在第三节讨论。

2.1 一阶可控系统: Brockett 系统

一阶可控系统是指如下形式的控制系统:

$$\dot{\mathbf{q}} = g_1(\mathbf{q})u_1 + \cdots + g_m(\mathbf{q})u_m$$

其中矢量场 $g_i(\mathbf{q})$ $i=1, \dots, m$ 及其一阶李括号 $[g_j, g_k]$, $j < k$, $k=1, \dots, m$ 是线性独立的, 而且有

$$T_q \mathcal{R}^n = \text{span}\{g_i, [g_j, g_k] : i, j, k=1, \dots, m\}$$

这意味着 $n = m + m(m-1)/2 = m(m+1)/2$ 。Brockett^[11]提出了满足此条件的一类非常重要的典型控制系统。下面首先讨论 $m=2$ 和 $n = m(m+1)/2 = 3$ 的情况

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= u_1 \\ \dot{q}_2 &= u_2 \\ \dot{q}_3 &= q_1 u_2 - q_2 u_1\end{aligned}\tag{8.2}$$

对于该系统, 有

$$g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -q_2 \end{bmatrix} \quad g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ q_1 \end{bmatrix} \quad [g_1, g_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

因此, 该系统是最大非完整的, 非完整度为 2, 增长矢量为 (2, 3)。下面考虑由式 (8.2) 表示的系统从 $t=0$ 时的 $\mathbf{q}_0 \in \mathcal{R}^3$ 到 $t=1$ 时的 $\mathbf{q}_f \in \mathcal{R}^3$ 的控制问题, 事实上只要使下列最小二乘控制评价函数

$$\int_0^1 \|\mathbf{u}\|^2 dt$$

达到最小即可。式 (8.2) 中的最后一个等式等价于如下约束

$$\dot{q}_3 = q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1$$

同样, 拉格朗日函数可写为 $\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2$ 。利用约束的拉格朗日乘子 $\lambda(t)$, 可将拉格朗日函数扩展为

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \lambda(\dot{q}_3 - q_1 \dot{q}_2 + q_2 \dot{q}_1)$$

求有约束拉格朗日函数最小的方法, 就是针对以拉格朗日乘子为约束的控制系统, 对上述拉格朗日函数 $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 进行一般的变分计算 (希望对最优控制有更多了解的读者可参阅此方面的书籍, 如 [123])。可以证明其稳态解满足欧拉-拉格朗日方程。拉格朗日乘子 $\lambda(t)$ 由约束形式确定。当用最小作用原理来推导动力学方程时, 就可发现这些方程就是欧拉-拉格朗日动力学方程。使最优控制问题对应的拉格朗日函数最小的欧拉-拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_i} = 0$$

即等价于

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 + \lambda \dot{q}_2 &= 0 \\ \ddot{q}_2 - \lambda \dot{q}_1 &= 0 \\ \dot{\lambda} &= 0\end{aligned}\tag{8.3}$$

式 (8.3) 表示 $\lambda(t)$ 是常数, 而且事实上最优输入满足方程

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} := \mathbf{A} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

注意矩阵 $\mathbf{A}$ 是关于 λ 的反对称矩阵, 因此, 最优输入是以频率 λ 表示的正弦函数, 即

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \lambda t & -\sin \lambda t \\ \sin \lambda t & \cos \lambda t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} := e^{\Lambda t} \mathbf{u}(0)$$

由此得到了最优控制的函数表达式, 当给定 $\mathbf{q}_0$ 和 $\mathbf{q}_f$ 值时, 就可解得最优控制系统的 $\mathbf{u}(0)$ 和 λ 。但由控制系统式 (8.2) 的形式可知, 状态 q_1 和 q_2 可以直接得到控制。因此, 最感兴趣的是从 $\mathbf{q}(0) = (0, 0, 0)$ 至 $\mathbf{q}(1) = (0, 0, a)$ 的控制。通过对 q_1 和 q_2 直接积分, 可得

$$\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} = (e^{\Lambda t} - \mathbf{I}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}(0)$$

由于 $q_1(1) = q_2(1) = 0$, 所以 $e^{\Lambda} = \mathbf{I}$, $\lambda = 2n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。对 $\dot{q}_3$ 积分得

$$q_3(1) = \int_0^1 (q_1 u_2 - q_2 u_1) dt = -\frac{1}{\lambda} (u_1^2(0) + u_2^2(0)) = a$$

因此, 总的评价函数为

$$\int_0^1 \|\mathbf{u}\|^2 dt = \|\mathbf{u}(0)\|^2 = -\lambda a$$

由于 $\lambda = 2n\pi$, 因此当 $n = -1$ 时, 即得到最小评价函数, 且 $\|\mathbf{u}(0)\|^2 = 2\pi a$ 。但除其大小外, $\mathbf{u}(0) \in \mathbb{R}^2$ 的方向则是任意的。因此, 控制系统从点 $(0, 0, 0)$ 运动到点 $(0, 0, a)$ 的最优输入是频率为 2π (对于一般情况, 如果控制时间周期为 T , 则频率为 $2\pi/T$) 的正弦和余弦之和。

当系统有 m 个输入时, 式 (8.2) 可推广为

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= u_i & i &= 1, \dots, m \\ \dot{q}_{ij} &= q_i u_j - q_j u_i & i < j &= 1, \dots, m \end{aligned} \quad (8.4)$$

通过构造反对称矩阵 $\mathbf{Y} \in so(m)$, 其对角线以下的元素为 $-q_{ij}$, 可得 $\mathbb{R}^m \times so(m)$ 中的控制系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{Y}} &= \mathbf{q}\mathbf{u}^T - \mathbf{u}\mathbf{q}^T \end{aligned} \quad (8.5)$$

该系统的欧拉-拉格朗日方程是两个输入情况的扩展, 亦即

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{\Lambda} \dot{\mathbf{q}} &= 0 \\ \dot{\mathbf{\Lambda}} &= 0 \end{aligned}$$

式中 $\mathbf{\Lambda} \in so(m)$ 是与 $\mathbf{Y}$ 有关的拉格朗日乘子的反对称矩阵。与前类似, $\mathbf{\Lambda}$ 是定常矩阵, 最优输入满足

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{u}$$

即

$$\mathbf{u}(t) = e^{\Lambda t} \mathbf{u}(0)$$

由此得 $e^{\Lambda t} \in SO(m)$ 。当 $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}(1) = 0$, $\mathbf{Y}(0) = 0$, 且 $\mathbf{Y}(1)$ 为 $so(m)$ 内的给定矩阵时, 输入特性的确定就有特别的意义。Brockett^[11]已证明当 m 为偶数且 $\mathbf{Y}$ 为非奇异时, 输入就是频率为

$$2\pi, 2 \times 2\pi, \dots, m/2 \times 2\pi$$

的 $m/2$ 个正弦函数: 而当 m 为奇数时, 则 Y 必奇异, 但如果 Y 的秩为 $m-1$, 那么输入就是频率为

$$2\pi, 2 \cdot 2\pi, \dots, (m-1)/2 \cdot 2\pi$$

的 $(m-1)/2$ 个正弦函数。根据上面的结论, 可得式 (8.4) 系统的下列控制算法。

算法 1 一阶标准系统的控制

1. 用任意输入控制 q_i 至其期望值, 且不考虑 q_{ij} 的变化。
2. 利用以频率表示的正弦函数求 u_0 , 使得输入能控制 q_{ij} 至其期望值。通过输入的选择, 可使 q_i 保持不变。

该算法是一步一步控制系统的状态的, 首先控制可被直接控制 (零阶) 的状态, 然后控制一阶李括号方向。

2.2 二阶可控系统

一阶李括号系统是不足以张成 $T_q \mathbb{R}^n$ 的。现将上面的标准形式扩展到更高一阶李括号

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= u_i & i &= 1, \dots, m \\ \dot{q}_{ij} &= q_i u_j & 1 \leq i < j \leq m \\ \dot{q}_{ijk} &= q_{ij} u_k & 1 \leq i, j, k \leq m \end{aligned} \quad (8.6) \quad (\text{修正的雅可比恒等式})$$

由于雅可比恒等式是指李括号对于所有的 i, j, k 都具有如下关系

$$[g_i, [g_j, g_k]] + [g_k, [g_i, g_j]] + [g_j, [g_k, g_i]] = 0$$

因此, 并不是 q_{ijk} 所有的状态变量都是可控的。由于这个原因, 将上式中的最后一个等式称为修正的雅可比恒等式 (mod Jacobi identity)。事实上, 通过直接计算可发现

$$q_{231} - q_{132} = q_1 q_{23} - q_2 q_{13}$$

由第七章习题 17, 可以证明可控 q_{ijk} 的最大数目为

$$\frac{(m+1)m(m-1)}{3}$$

通常, 通过对评价标准与前相同的拉格朗日函数的构造, 以及欧拉-拉格朗日方程的推导, 并不能得到一组不变的拉格朗日乘子。对于 $m=2$ 情况, Brockett 和 Dai^[14] 已经证明, 最优输入为椭圆函数 (见下一节)。但算法 1 经扩展后可用于该种情况, 具体如下。

算法 2 二阶标准系统的控制

1. 控制 q_i 至其期望值。这将使所有其他状态发生偏移。
2. 利用正弦输入来控制 q_{ij} 至其期望值。如果第 i 个输入的频率为 ω_i , 那么 q_{ij} 的频率为 $\omega_i \pm \omega_j$ 。通过选择零频率输入, 可生成期望状态的运动。

3. 再次采用正弦输入, 以闭环方式改变已控状态, 并产生 q_{ijk} 方向的运动。为此应合理选择输入频率, 使得 $\omega_i \pm \omega_j \neq 0$, 但 $\omega_i + \omega_j + \omega_k$ 应具有零频率分量。

上述第二步的计算与算法 1 完全相同。但第三步的计算则相当复杂, 虽然对于特定的实际系统, 其计算是非常直接的。例如, 如果 $m=2$, 则式 (8.6) 变为

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= u_1 \\ \dot{q}_2 &= u_2 \end{aligned}$$

$$\dot{q}_{12} = q_1 u_2$$

$$\dot{q}_{121} = q_{12} u_1$$

$$\dot{q}_{122} = q_{12} u_2$$

为控制 q_1 、 q_2 和 q_{12} 至其期望值，可利用算法 1。为使 q_{121} 独立于其他状态，取 $u_1 = a \sin 2\pi t$ ， $u_2 = b \cos 4\pi t$ ，得

$$q_{121}(1) = q_{121}(0) - \frac{a^2 b}{16\pi^2}$$

同样，取 $u_1 = b \cos 4\pi t$ ， $u_2 = a \sin 2\pi t$ ，得

$$q_{122}(1) = q_{122}(0) + \frac{a^2 b}{32\pi^2}$$

而所有其他的状态参数都恢复到它们的原始值。

上面给出的两个算法要求沿每一个 q_{ijk} 方向进行分步控制。通过正弦函数的线性组合，并解得多项式方程的系数，也能同时生成多个坐标的运动（见习题 4）。

2.3 高阶系统：链式系统

下面讨论更为一般的非完整系统，并研究如何用正弦函数来控制此类系统。如上一节所述，可生成标准的高阶系统，也就是需要用一阶以上的李括号来张成位形空间的切空间。Grayson 和 Grossmann^[37]在这方面已做了一些工作。文献 [79] 已证明这样的系统是很难用正弦函数来控制的。为此，仅研究一类称为链式系统的高阶系统，它们可用以频率表示的正弦函数来控制。这些系统本身也是很有意义的，它们在微分形式（称为 Goursat 标准形）下具有结构的对偶性。另外，可以将许多其他非线性系统转变为链式系统，这在下一节讨论。

考虑如下形式的具有两个输入的系统

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= u_1 \\ \dot{q}_2 &= u_2 \\ \dot{q}_3 &= q_2 u_1 \\ \dot{q}_4 &= q_3 u_1 \\ &\vdots \\ \dot{q}_n &= q_{n-1} u_1\end{aligned}\tag{8.7}$$

式 (8.7) 可表示为矢量场形式

$$\dot{q} = g_1 u_1 + g_2 u_2$$

其中

$$g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_{n-1} \end{bmatrix} \quad g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\tag{8.8}$$

定义系统式 (8.7) 为单链系统 (one-chain system)，式中第一项用来检查系统的可控性。为

此, 定义递推的李积 $\text{ad}_{g_1}^k g_2$ 为

$$\text{ad}_{g_1} g_2 = [g_1, g_2] \quad \text{ad}_{g_1}^k g_2 = [g_1, \text{ad}_{g_1}^{k-1} g_2] = [g_1, [g_1, \dots, [g_1, g_2] \dots]]$$

引理 8.1 李括号计算

对于以式 (8.8) 表示的矢量场, 当 $k \geq 1$ 时, 有

$$\text{ad}_{g_1}^k g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ (-1)^k \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

(只有第 $(k+2)$ 个元素不为零)。

证明: 采用归纳法。因一阶李括号是不规则的, 先将 $[g_1, g_2]$ 和 $[g_1, [g_1, g_2]]$ 展开得

$$[g_1, g_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad [g_1, [g_1, g_2]] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

假设上式对 k 阶也成立, 则

$$\text{ad}_{g_1}^{k+1} g_2 = [g_1, \text{ad}_{g_1}^k g_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (-1)^{k+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

定理 8.2 单链系统的可控性

单链系统(8.7)是完全非完整的(可控的)。

证明: 式(8.7)中共有 n 个坐标, 由引理 8.1 知, n 个李积

$$\{g_1, g_2, \text{ad}_{g_1}^i g_2\} \quad 1 \leq i \leq n-2$$

是独立的。

为控制此系统, 可用以频率表示的正弦函数。因此, 如果取 $u_1 = \sin 2\pi t$, $u_2 = \cos 2\pi t$, 那么 $\dot{q}_3$ 的频率为 $2\pi(k-1)$, $\dot{q}_4$ 的频率为 $2\pi(k-2)$, 等等。 $\dot{q}_{k+2}$ 的频率为零, 当对其积分, 即得 q_{k+2} 的运动, 而所有前面的变量都恢复到它们的初值。

算法 3 链式系统的控制

- 1) 控制 q_1 和 q_2 至其期望值。
- 2) 对于每一个 q_{k+2} , $k \geq 1$, 利用 $u_1 = a \sin 2\pi t$ 和 $u_2 = b \cos 2\pi kt$ 控制 q_k 至其终值, 其

中 a 和 b 满足

$$q_{k+2}(1) - q_{k+2}(0) = \left[\frac{a}{4\pi} \right]^k \frac{b}{k!}$$

定理 8.3 链式算法

算法 3 可控制式 (8.7) 至任一位形。

证明：本证明是构造性的。首先证明通过直接积分，由 $u_1 = a \sin 2\pi t$, $u_2 = b \cos 2\pi kt$ 仅产生 q_{k+2} 方向的运动，而不产生 q_j , $j < k+2$ 方向的运动。如果 q_{k-1} 具有频率为 $2\pi n_i$ 的项，那么 q_k 与频率为 $2\pi(n_i \pm 1)$ 的项对应（通过将正弦函数的积展开为正弦函数的和）。由于使 $q_i(1) \neq q_i(0)$ 的唯一途径是使 q_i 的频率为零，这仅足以跟踪每个变量中的最低频率分量；高阶分量的积分为零。从原点开始计算得

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{a}{2\pi}(1 - \cos 2\pi t) \\ q_2 &= \frac{b}{2\pi k} \sin 2\pi kt \\ q_3 &= \int \frac{ab}{2\pi k} \sin 2\pi kt \sin 2\pi t dt = \\ &\quad \frac{1}{2} \frac{ab}{2\pi k} \left[\frac{\sin 2\pi(k-1)t}{2\pi(k-1)} - \frac{\sin 2\pi(k+1)t}{2\pi(k+1)} \right] \\ q_4 &= \frac{1}{2} \frac{a^2 b}{2\pi k \times 2\pi(k-1)} \int \sin 2\pi(k-1)t \sin 2\pi t dt + \dots = \\ &\quad \frac{1}{2^2} \frac{a^2 b}{2\pi k \times 2\pi(k-1) \times 2\pi(k-2)} \sin 2\pi(k-2)t + \dots \\ &\quad \vdots \\ q_{k+2} &= \int \frac{1}{2^{k-1}} \frac{a^k b}{2\pi k \times 2\pi(k-1) \dots 2\pi} \sin^2 2\pi t dt + \dots = \\ &\quad \frac{1}{2^{k-1}} \frac{a^k b}{(2\pi)^k k!} \frac{t}{2} + \dots \end{aligned}$$

由此得 $q_{k+2}(1) = q_{k+2}(0) + (a/4\pi)^k b/k!$ ，并且所有前面的 q_i 都是周期性的，因此 $q_i(1) = q_i(0)$, $i < k$ 。如果系统不是从原点开始运动的，初始条件将在第 i 阶微分中产生附加项 $q_{i-1}(0)u_1$ ，并且其积分为零。

对于输入多于两个的系统，称为多链系统 (multi-chained form system)，读者可参阅文献 [79]。

3 一般控制方法

上一节所讨论的典型控制系统，很少不经修改就能直接应用的。本节将讨论更为一般的非完整系统的运动规划方法。

3.1 傅里叶技术

利用基本的傅里叶分析对以频率表示的正弦输入方法进行修正，即可用于控制非典型系统。下面针对第七章所讨论的两个例题，来说明该技术。

例 8.1 跳跃机器人的控制

由第七章可知, Ψ 为处于运动状态的跳跃机器人腿的转角, l 为腿的伸缩量, θ 为机器人本体的转角。控制方程为

$$\begin{aligned}\dot{\Psi} &= u_1 \\ \dot{l} &= u_2 \\ \dot{\theta} &= -\frac{m(l+d)^2}{I+m(l+d)^2}u_1\end{aligned}\quad (8.9)$$

将上式中最后一个等式的右边关于 $l=0$ 展开成泰勒级数, 得

$$\dot{\theta} = -\frac{md^2}{md^2+I}\dot{\Psi} - \frac{2mdI}{(md^2+I)^2}lu_1 + O(l^2)u_1$$

式中 $O(l^2)$ 代表 l 的二阶和更高阶项。通过坐标变换 $\alpha = \theta + \frac{md^2}{md^2+I}\Psi$, 式 (8.9) 变为

$$\begin{aligned}\dot{\Psi} &= u_1 \\ \dot{l} &= u_2 \\ \dot{\alpha} &= -\frac{2mdI}{(md^2+I)^2}lu_1 + O(l^2)u_1 := f(l)u_1\end{aligned}$$

如果忽略最后一个等式中的高阶项, 则上述方程就是三状态链式系统的形式。以此为依据, 可用链式系统的控制算法来精确控制该系统。先控制变量 Ψ 和 l 至其期望值, 然后用正弦输入

$$\begin{aligned}u_1 &= a_1 \sin 2\pi t \\ u_2 &= a_1 \cos 2\pi t\end{aligned}$$

来控制 α 。通过选择, 一个周期 (1s) 后系统的运动不会影响 Ψ 和 l 的终值。由于在这段运动过程中, $l = \frac{a_2}{2\pi}$, 因此可将 $f(l)$ 展开成如下的傅里叶级数

$$f\left(\frac{a_2}{2\pi}\sin 2\pi t\right) = \beta_1 \sin 2\pi t + \beta_2 \sin 4\pi t + \cdots$$

对 $\dot{\alpha}$ 在一个周期进行积分, 并注意到只有第一项对纯运动有贡献, 得

$$\alpha(l) - \alpha(0) = \int_0^l (\alpha_1 \beta_1 \sin^2 2\pi t + \alpha_1 \beta_2 \sin 2\pi t \sin 4\pi t + \cdots) dt = \frac{1}{2} \alpha_1 \beta_1$$

因 β_1 是 a_2 的函数, 所以用数值法可求 a_1 和 a_2 , 以得 α 的纯变化。处于半空中的车轮就存在着状态为 2π 的纯变化。

例 8.2 汽车的控制

前轮驱动汽车的运动学模型可用式 (7.14) 描述

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos \theta u_1 \\ \dot{y} &= \sin \theta u_1 \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{l} \tan \phi u_1 \\ \dot{\phi} &= u_2\end{aligned}$$

在这种形式下, u_1 并不能直接控制任何状态。利用坐标变换 $z_1 = x$, $z_2 = \phi$, $z_3 = \sin \theta$, $z_4 = y$ 和输入变换 $v_1 = \cos \theta u_1$, $v_2 = u_2$, 从而将方程转换为如下形式

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= v_1 \\ \dot{z}_2 &= v_2 \\ \dot{z}_3 &= \frac{1}{l} \tan z_2 v_1 \\ \dot{z}_4 &= \frac{z_3}{\sqrt{1-z_3^2}} v_1\end{aligned}$$

与上一例一样, 如果将上式最后两个等式中的非线性项展开成泰勒级数, 所得的线性项与单链系统的对应项相匹配。现用傅里叶分析研究非线性项的影响。

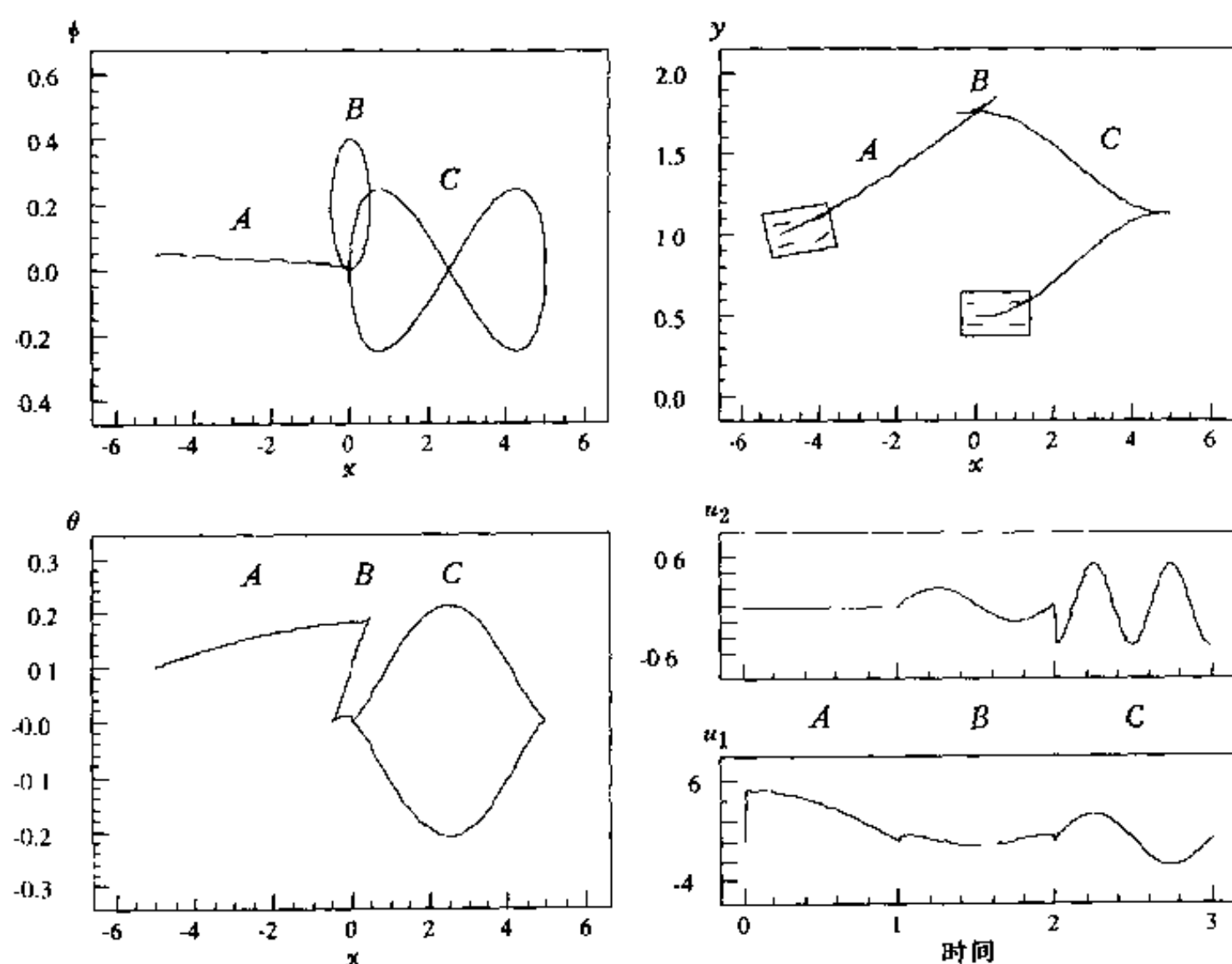


图 8.1 汽车运动的模拟轨迹

[图中轨迹为将汽车由 $(x, y, \theta, \phi) = (-5, 1, 0.05, 1)$ 运动至 $(0, 0.5, 0, 0)$ 的模拟路径。前三个图表示作为 x 函数的状态, 右下图表示输入为时间的函数]

图 8.1 所示为算法 2 用于汽车的一个例子。路径的第一部分, 记为 A, 用定常输入来驱动 x 和 ϕ 至其期望值。标记为 B 的第二部分路径, 用正弦和余弦输入驱动 θ , 同时将其它两个状态返回到期望值。最后一部分路径标为 C, 用输入

$$u_1 = a_1 \sin 4\pi t \quad u_2 = a_2 \sin 2\pi t$$

将 y 控制到其期望值, 并将其它状态返回到它们的正确值。由不同变量的相位图所得到的 Lissajous 图是很有启发性的。考察标有 C 的曲线部分, 左上图为一个关于 x, ϕ 的 Lissajous 图 (两环); 左下图为 x, θ 对应的 Lissajous 图 (一个环); x, y 方向的开口曲线表示在 y 变量方向的增量。这意味着李括号运动对应于驱动矢量场简谐周期运动的校正, 简谐关系由期望运动方向所对应的李括号的阶数来确定。

3.2 链式转换

一个有趣的问题是, 是否可利用输入变换和非线性坐标变换, 将给定的非完整控制系统转换为上一节所讨论的典型系统的一种。更确切地说, 对于给定的系统:

$$\dot{q} = g_1(q)u_1 + \cdots + g_m(q)u_m$$

是否存在一个矩阵 $\beta(q) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 和一个微分同胚 $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, 使得具有如下关系

$$v = \beta(q)u \quad z = \phi(q)$$

的系统成为输入为 v 、以 z 坐标表示的链式系统? 文献 [75] 给出了该问题的必要和充分条件, 详细的讨论已超出本节的范围。文献 [79] 给出了两个输入情况下的充分条件, 这种系统可转换为单链系统, 前提条件是假设 g_1, g_2 为线性独立。如果下列分布

$$\Delta_0 = \text{span} \{g_1, g_2, \text{ad}_{g_1}g_2, \cdots, \text{ad}_{g_1}^{n-2}g_2\}$$

$$\Delta_1 = \text{span} \{g_2, \text{ad}_{g_1}g_2, \cdots, \text{ad}_{g_1}^{n-2}g_2\}$$

$$\Delta_2 = \text{span} \{g_1, \text{ad}_{g_1}g_2, \cdots, \text{ad}_{g_1}^{n-3}g_2\}$$

的秩都是常数, 并且分布是对合的, 同时存在函数 $h_1(q)$, 使得

$$dh_1\Delta_1 = 0 \quad dh_1g_1 = 1$$

那么系统就可转换为单链系统。如果上述条件都满足, 则可取一个与 h_1 无关的函数 h_2 , 使得

$$dh_2\Delta_2 = 0$$

由于 $\Delta_2 \subset \Delta_1$ 都是对合分布, 所以独立的 h_1 和 h_2 (满足 $dh_1\Delta_1 = 0, dh_2\Delta_2 = 0$) 的存在性可由 Frobenius 定理得到保证。但对于 h_1 还有一个附加条件, 即 $dh_1 \cdot g_1 = 1$ 。如果能找到函数 h_1 和 h_2 , 那么由映射 $\phi: q \mapsto z$ 和下列输入变换

$$\begin{aligned} z_1 &= h_1 & v_1 &= u_1 \\ z_2 &= L_{g_1}^{n-2}h_2 & v_2 &= (L_{g_1}^{n-1}h_2)u_1 + (L_{g_2}L_{g_1}^{n-2}h_2)u_2 \\ &\vdots & & \\ z_{n-1} &= L_{g_1}h_2 \\ z_n &= h_2 \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= v_1 \\ \dot{z}_2 &= v_2 \\ \dot{z}_3 &= z_2v_1 \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= z_{n-1}v_1 \end{aligned}$$

下面通过汽车的运动学模型来说明上述链式转换的过程。

例 8.3 将汽车转换为链式系统

首先, 将运动方程改写为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u_1 \\ \dot{y} &= u_1 \tan \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{1}{l} u_1 \tan \phi \\ \dot{\phi} &= u_2\end{aligned}$$

那么有 $h_1 = x$, $h_2 = y$, 因此很容易证明该系统满足链式转换条件, 并且通过下列变量和输入变换成为单链系统:

$$\begin{aligned}z_1 &= x & u_1 &= v_1 \\ z_2 &= \frac{1}{l} \sec^2 \theta \tan \phi & u_2 &= -\frac{2}{l} \sin^2 \phi \tan \theta v_1 + l \cos^2 \theta \cos^2 \phi v_2 \\ z_3 &= \tan \theta \\ z_4 &= y\end{aligned}$$

3.3 非完整系统的最优控制

本节讨论下列控制系统

$$\dot{\mathbf{q}} = g_1(\mathbf{q})u_1 + \cdots + g_m(\mathbf{q})u_m$$

在一秒内从 $\mathbf{q}_0$ 运动到 $\mathbf{q}_f$ 的最小二乘最优控制问题, 要求使得如下评价函数最小

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \|\mathbf{u}(t)\|^2 dt$$

假设该控制问题有解 (根据 Chow 定理, 当由 $g_1, \cdots, g_m$ 生成的可控性李代数对所有的 $\mathbf{q}$ 都具有秩 n 时, 可保证此问题有解)。现从最优时必要条件的变分计算开始进行推导, 首先用拉格朗日乘子函数 $\mathbf{p}(t) \in \mathbb{R}^n$, 将约束与评价函数加以组合, 即

$$J(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{u}) = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{u}(t) - \mathbf{p}^T(\dot{\mathbf{q}}) - \sum_{i=1}^m g_i(\mathbf{q}) u_i \right\} dt \quad (8.10)$$

引入哈密尔顿函数

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{u} + \mathbf{p}^T \sum_{i=1}^m g_i(\mathbf{q}) u_i \quad (8.11)$$

并对式 (8.10) 的第二项进行分部积分, 得

$$J(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{u}) = -\mathbf{p}^T(t) \mathbf{q}(t) \Big|_0^1 + \int_0^1 (H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{u}) + \dot{\mathbf{p}}^T \mathbf{q}) dt$$

考虑由控制输入 $\mathbf{u}$ 的变分而产生的 J 的变分

$$\delta J = -\mathbf{p}^T(t) \delta \mathbf{q}(t) \Big|_0^1 + \int_0^1 \left[\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \dot{\mathbf{p}}^T \delta \mathbf{q} \right] dt$$

如果已确定了最优输入, 那么稳态的必要条件就是对所有变分 $\delta \mathbf{u}$ 和 $\delta \mathbf{q}$, 上式中的第一项变分应为零

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad (8.12)$$

由第二式得最优输入为

$$u_i = -\mathbf{p}^T g_i(\mathbf{q}), i = 1, \cdots, m \quad (8.13)$$

将式 (8.13) 代入式 (8.11) 得最优哈密尔顿函数

$$H^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (\mathbf{p}^T g_i(\mathbf{q}))^2 \quad (8.14)$$

因此, 最优控制系统满足哈密尔顿方程

$$\dot{q} = \frac{\partial H^*}{\partial p}(q, p) \quad (8.15)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H^*}{\partial q}(q, p)$$

其中边界条件为 $q(0) = q_0$ 和 $q(1) = q_f$ 。利用上述结果, 即可得如下关于最优控制结构的定理。

定理 8.4 最优控制的定常范数

对于满足可控性秩条件的控制系统

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^m g_i(q) u_i$$

的最小二乘最优控制问题, 最优输入的范数为常数, 即

$$\|u(t)\|^2 = \|u(0)\|^2 \quad \forall t \in [0, 1]$$

证明: 最优输入由式 (8.13) 给出, 对其微分得

$$\dot{u}_i = -\dot{p}^T g_i(q) - p^T \frac{\partial g_i}{\partial q} \dot{q}$$

进一步利用哈密尔顿方程

$$\dot{p}_k = -\sum_{i=1}^m p^T \frac{\partial g_i}{\partial q_k} u_i$$

可证明 $\dot{u}_i$ 为

$$\dot{u}_i = \sum_{j=1}^m p^T [g_i, g_j] u_j$$

写成矩阵为

$$\dot{u} = \Omega(q, p) u \quad (8.16)$$

其中 $\Omega(q, p)$ 是反对称矩阵 (即属于 $SO(m)$), 表达式为

$$\Omega(q, p) = \begin{bmatrix} 0 & p^T [g_1, g_2] & \cdots & p^T [g_1, g_m] \\ -p^T [g_1, g_2] & 0 & \cdots & p^T [g_2, g_m] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p^T [g_1, g_m] & -p^T [g_2, g_m] & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

对于某个 $U(t) \in SO(m)$, 线性时变方程 (8.16) 的解为 (见习题 8)

$$u(t) = U(t) u(0) \quad (8.17)$$

至此定理得证。

上述定理给出了最优输入的微分式 (8.16), 证明了最优输入的范数为常数。利用该结论可证明, 同样的最优输入也可解决含有被积函数单调变换的其他最优问题, 如

$$\int_0^1 \sqrt{u^T u} dt$$

以及一些最小时间问题 (习题 8)。该定理还可用来求解其他一些最优问题, 如所谓的 Engel 系统。

例 8.4 Engel 系统的最优输入

该系统具有如下形式

$$\dot{q}_1 = u_1$$

$$\begin{aligned}\dot{q}_2 &= u_2 \\ \dot{q}_3 &= q_1 u_2 - q_2 u_1 \\ \dot{q}_4 &= q_1^2 u_2\end{aligned}$$

系统的增长矢量为 (2, 3, 4)。可以证明

$$[g_1, g_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2q_1 \end{bmatrix}$$

并且最优输入满足式 (8.16) 规定的微分方程, 即

$$\begin{aligned}\dot{u}_1 &= 2(p_3 + q_1 p_4)u_2 \\ \dot{u}_2 &= -2(p_3 + q_1 p_4)u_1\end{aligned}\quad (8.18)$$

此方程的解为

$$\begin{aligned}u_1(t) &= r \sin \alpha(t) \\ u_2(t) &= r \cos \alpha(t)\end{aligned}$$

其中 $r^2 = u_1^2(0) + u_2^2(0)$ 。此外, 由于最优哈密尔顿函数

$$H^*(q, p) = -\frac{1}{2}(p_1 - q_2 p_3)^2 - \frac{1}{2}(p_2 + q_1 p_3 + q_1^2 p_4)^2$$

与 q_3 和 q_4 无关, 因此 $\dot{p}_3 = \dot{p}_4 = 0$, 即 p_3 和 p_4 为常数。将 u_1 、 u_2 的函数关系代入式 (8.18) 中可得

$$\dot{\alpha} = 2p_4 r \sin \alpha$$

为对上式进行积分, 等式两边同乘 $2\dot{\alpha}$ 。定义 $\delta = 2p_4 r$, 经积分得

$$(\dot{\alpha})^2 = b - 2\delta \cos \alpha$$

式中 b 为积分常数。如果 $b - 2|\delta| > 0$, 则上式可写为

$$\dot{\alpha} = \pm \sqrt{b - 2\delta \cos \alpha} = c \sqrt{1 - k \sin^2(\alpha/2)}$$

其中 c, k 为常数。上式可利用椭圆积分进行求积 (参阅 Lawden^[57]的实例), 即对于 α , 有

$$\int_0^{\alpha/2} \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \sigma}} = \frac{ct}{2} + d \quad (8.19)$$

上式左侧为椭圆积分。因此, Engel 系统的最优输入为椭圆函数。

通常, 要获得将系统从初始点驱动到终点的最小二乘最优控制问题的解是很困难的。但可用 Ritz 近似方法获得此问题的近似解。为说明这一点, 首先为 $L^2[0, 1]$ ($[0, 1]$ 上平方可积函数的集合) 取一组正交基。一个基为由 $\Psi_0(t) \equiv 1$ 确定的一组三角函数 $\{\Psi_0(t), \Psi_1(t), \dots\}$, 并且对于 $k \geq 1$, 有

$$\Psi_{2k-1}(t) = \sqrt{2} \cos 2k\pi t, \quad \Psi_{2k}(t) = \sqrt{2} \sin 2k\pi t \quad t \in [0, 1]$$

选定一个整数 N , 假设第 i 个最优输入的 Ritz 近似具有如下形式

$$u_i(t) = \sum_{k=0}^N \alpha_{ik} \Psi_k(t)$$

因此运动规划就是以此为输入来控制如下系统

$$\dot{q} = g_1(q)u_1 + \dots + g_m(q)u_m \quad (8.20)$$

从 $q(0) = q_0$ 运动到 $q(1) = q_f$, 并确定系数矢量 $\alpha_i = (\alpha_{i0}, \alpha_{i1}, \dots, \alpha_{iN}) \in \mathfrak{R}^{N+1}$, $i = 1, \dots, m$, 使得下列评价函数为最小

$$J = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^m \|\alpha_i\|^2 + \gamma \|q(1) - q_f\|^2 \right) \quad (8.21)$$

式 (8.21) 中的系数 $\gamma > 0$ 为抵达最终状态的惩罚项。当 γ 较大时, 表示评价函数对抵达终点的权重较大。Ritz 近似方法的核心, 是希望对于较大的 N 和 γ , 寻找到一个 u , 以较小的评价函数将系统驱动到终点。

至此, 已经讨论了求解有限维优化问题的一些方法。文献 [32] 和 [33] 对牛顿迭代法进行了修正, 以用于求解 J 的最小值, 并介绍了相应的软件包 NMPack。建议读者阅读一下这两篇文献, 了解在不同问题中的应用。

3.4 分段定常输入控制

本节介绍由 Lafferriere 和 Sussmann^[55]提出的一般非完整系统运动规划的基本方法。对于可控性李代数系统, 该方法是 k 阶幂零的, 也就是对于如下系统

$$\dot{x} = g_1 u_1 + \dots + g_m u_m$$

阶数大于 k 的控制矢量场之间的李积为零, 即当 $p > k$ 时, $[g_{i_1}, \dots, [g_{i_{p-1}}, g_{i_p}] \dots]$ 为零。文 [55] 提出的方法在概念上是很直观的, 而且给出了详细过程。首先是推导与给定控制系统对应的标准系统方程。所涉及到的主要新概念是矢量场的正则幂级数。

回忆一下第七章第二节, 矢量场 g_i 的流记为 $\phi_t^{g_i}(q)$, 它表示微分方程 $\dot{q} = g_i(q)$ 从 0 时刻的 q 开始到时刻 t 的解。此流称为 g_i 的正则指数, 记为

$$e^{tg_i}(q) := \phi_t^{g_i}(q)$$

正则指数的用法在于如下的恒等式

$$e^{tg_i} = (I + tg_i + \frac{t^2}{2!} g_i^2 + \dots)$$

式中关于 g_i^2 和 g_i^3 等的多项式要小心确定。这里先不讨论此方程, 而将 $e^{tg_i}(q)$ 的正则性看作是从 $\mathfrak{R}^n$ 到 $\mathfrak{R}^n$ 的微分同胚。现考虑由矢量场 $g_1, \dots, g_m$ 生成的 k 阶幂零李代数。由第七章第四节知, Philip Hall 基是通过李括号的反对称性和雅可比恒等式来构造的可控性李代数的一个基。由 $g_1, \dots, g_m$ 生成的可控性李代数的 Philip Hall 基定义为

$$B_1, B_2, \dots, B_s$$

因此, 基元是阶数小于等于 k 的李积, 用正则幂级数的方法来表示, 基元即为

$$[g_1, g_2] := g_1 g_2 - g_2 g_1$$

$$[g_1, [g_2, g_3]] := g_1 g_2 g_3 - g_1 g_3 g_2 - g_2 g_3 g_1 - g_3 g_2 g_1$$

这就是非线性控制的基本结论, 称为 Chen - Fliess 级数公式。非线性控制系统式 (8.1) 的所有流

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^m g_i(q) u_i \quad q(0) = q$$

对一些经适当挑选的函数 $h_1, h_2, \dots, h_s$ (称为 Philip Hall 坐标), 具有如下的形式,

$$S_t(q) = e^{h_s(t)B_s} e^{h_{s-1}(t)B_{s-1}} \dots e^{h_2(t)B_2} e^{h_1(t)B_1}(q) \quad (8.22)$$

式 (8.22) 的意义在于, 由式 (8.1) 控制系统生成的所有流可以通过沿 Philip Hall 基元

$B_1, \dots, B_s$ 的流的组合来获得。该结果类似于机器人运动学的指数积公式, 这里并不具体讨论它们之间的联系。此外, $S_t(q)$ 满足包含基元的微分方程, 即

$$\dot{S}(t) = S(t)(B_1 v_1 + \dots + B_s v_s) \quad S(0) = 1 \quad (8.23)$$

式中已用 $S(t)$ 替代 $S_t(q)$, 输入 $v_1, \dots, v_s$ 为与 Philip Hall 基元 $B_1, \dots, B_s$ 之方向对应的“虚拟输入”。之所以说是虚拟的, 是因为仅有前 m 个 Philip Hall 基元与 $g_1, \dots, g_m$ 对应。其他输入对应于李括号元, 最终可以删去。对式 (8.22) 微分得

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= \sum_{j=1}^s e^{h_j B_s} \dots e^{h_j B_1} \dot{h}_j B_j e^{h_{j-1} B_{s-1}} \dots e^{h_1 B_1} \\ &= \sum_{j=1}^s S(t) e^{-h_1 B_1} \dots e^{-h_{j-1} B_{j-1}} \dot{h}_j B_j e^{h_{j-1} B_{j-1}} \dots e^{h_1 B_1} \\ &:= \sum_{j=1}^s S(t) \text{Ad}_{e^{-h_1 B_1} \dots e^{-h_{j-1} B_{j-1}}} \dot{h}_j B_j \end{aligned} \quad (8.24)$$

类似于第二章的公式, 引入符号

$$\text{Ad}_{e^{-h_j B_j}} B_j = e^{-h_j B_j} B_j e^{h_j B_j}$$

由于可控性李代数是 k 阶幂零的, 所以可将右边的每个元用 $B_1, \dots, B_s$ 基元来表示。进而可证明

$$\text{Ad}_{e^{-h_1 B_1} \dots e^{-h_{j-1} B_{j-1}}} B_j = \text{Ad}_{e^{-h_1 B_1}} \dots \text{Ad}_{e^{-h_{j-1} B_{j-1}}} B_j \quad (8.25)$$

因此, 式 (8.24) 右侧的每个元都是 $B_1, \dots, B_s$ 的线性组合。所以对某个多项式 $p_{j,k}(h)$ 有

$$\text{Ad}_{e^{-h_1 B_1} \dots e^{-h_{j-1} B_{j-1}}} \dot{h}_j B_j = \left[\sum_{k=1}^s p_{j,k}(h) B_k \right] \dot{h}_j$$

将此代入式 (8.23), 并令基元 B_j 的系数相等, 得

$$\sum_{j=1}^s p_{j,k}(h) \dot{h}_j = v_k \quad k = 1, \dots, s$$

解上式得微分方程

$$\dot{h} = Q(h)v \quad h(0) = 0 \quad (8.26)$$

这是 $\mathbb{R}^s$ 中的一个控制系统, 称为 Chen - Fliess - Sussmann 方程, 它反映了 Philip Hall 坐标与虚拟输入 $v_1, \dots, v_s$ 的对应关系。应注意, Philip Hall 坐标的维数 s 通常大于控制系统状态空间的维数 n 。初始条件为 $h_i(0) = 0$, 它对应于 $t = 0$ 时的单位微分同胚。式 (8.26) 是给定系统幂零可控性李代数的标准形式。

例 8.5 三阶两输入幂零系统

考虑 $\mathbb{R}^4$ 上的三阶幂零两输入系统。假设 $g_1, g_2, [g_1, g_2], [g_1, [g_1, g_2]]$ 是线性独立的。作为 Philip Hall 基, 有

$$\begin{aligned} B_1 &= g_1 \quad B_2 = g_2 \quad B_3 = [g_1, g_2] \\ B_4 &= [g_1, [g_1, g_2]] \quad B_5 = [g_2, [g_1, g_2]] \end{aligned}$$

根据假设, $[g_2, [g_1, g_2]] = B_5$ 依赖于 B_1, B_2, B_3, B_4 , 所以在式 (8.23) 中有 $v_5 \equiv 0$ 。经简单计算知, 式 (8.24) 右侧 $\dot{h}_j$ 的系数为

$$\begin{aligned} \dot{h}_1: & \quad B_1 \\ \dot{h}_2: & \quad B_2 - h_1 B_3 + \frac{1}{2} h_1^2 B_4 \\ \dot{h}_3: & \quad B_3 - h_2 B_5 - h_1 B_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{h}_4: & B_4 \\ \dot{h}_5: & B_5\end{aligned}$$

例如, $\dot{h}_2$ 的系数推导为

$$\begin{aligned}\text{Ad}_e^{-h_1 B_1} B_2 &= B_2 - h_1 [B_1, B_2] + \frac{1}{2} h_1^2 [B_1, [B_1, B_2]] \\ &= B_2 - h_1 B_3 + \frac{1}{2} h_1^2 B_4\end{aligned}$$

令 B_i 的系数与 v_i 相等, 并考虑到 $v_5 = 0$, 得 Chen - Fliess - Sussmann 方程为

$$\begin{aligned}\dot{h}_1 &= v_1 \\ \dot{h}_2 &= v_2 \\ \dot{h}_3 &= h_1 v_2 + v_3 \\ \dot{h}_4 &= \frac{1}{2} h_1^2 v_2 + h_1 v_3 + v_4 \\ \dot{h}_5 &= h_2 v_3 + h_1 h_2 v_2\end{aligned}\tag{8.27}$$

注意, 这是一个 $\mathfrak{R}^5$ 内的系统, 尽管状态空间方程是在 $\mathfrak{R}^4$ 中。

例 8.6 两输入、五状态链式系统

考虑一个两输入、五状态的链式系统, 其中输入矢量场为

$$g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

此系统是 $k=4$ 阶幂零的, Philip Hall 基矢量为

$$\begin{aligned}B_1, B_2: & g_1 \quad g_2 \\ B_3: & [g_1, g_2] \\ B_4, B_5: & [g_1, [g_1, g_2]] \quad [g_2, [g_1, g_2]] \\ B_6, B_7: & [g_1, [g_1, [g_1, g_2]]] \quad [g_2, [g_1, [g_1, g_2]]] \\ B_8: & [g_2, [g_2, [g_1, g_2]]]\end{aligned}$$

矢量场 $g_1, g_2, g_3 := \text{ad}_{g_1} g_2, g_4 := \text{ad}_{g_1}^2 g_2$ 和 $g_6 := \text{ad}_{g_1}^3 g_2$ 张成 $\mathfrak{R}^5$ 的切空间。

因此, 对于 Chen - Fliess - Sussmann 方程, 有 $v_5 = v_7 = v_8 = 0$, $\dot{h}_j$ 的系数为

$$\text{Ad}_e^{-h_1 B_1} \cdots \text{Ad}_e^{-h_{j-1} B_{j-1}} B_j, \quad j = 1, \cdots, 8$$

现就 $\dot{h}_3$ 进行具体计算

$$\begin{aligned}\text{Ad}_e^{-h_1 B_1} \text{Ad}_e^{-h_2 B_2} B_3 &= \text{Ad}_e^{-h_1 B_1} (B_3 - h_2 B_5 + \frac{1}{2} h_2^2 B_8) \\ &= B_3 - h_1 B_4 - h_2 B_5 + \frac{1}{2} h_1^2 B_6 + h_1 h_2 B_7 + \frac{1}{2} h_2^2 B_8\end{aligned}$$

用同样的方法可求得其他项, 结果如下 (建议读者自己进行推导)

$$\begin{aligned}\dot{h}_1: & B_1 \\ \dot{h}_2: & B_2 - h_1 B_3 + \frac{1}{2} h_1^2 B_4 - \frac{1}{6} h_1^3 B_6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{h}_3: & B_3 - h_1 B_4 - h_2 B_5 + \frac{1}{2} h_1^2 B_6 + h_1 h_2 B_7 + \frac{1}{2} h_2^2 B_8 \\
\dot{h}_4: & B_4 - h_1 B_6 - h_2 B_7 \\
\dot{h}_5: & B_5 - h_1 B_7 - h_2 B_8 \\
\dot{h}_6: & B_6 \\
\dot{h}_7: & B_7 \\
\dot{h}_8: & B_8
\end{aligned}$$

最后, 由于 $v_5 = v_7 = v_8 = 0$, 故 $h \in \mathfrak{R}^8$ 的微分方程为

$$\begin{aligned}
\dot{h}_1 &= v_1 \\
\dot{h}_2 &= v_2 \\
\dot{h}_3 &= h_1 v_2 + v_3 \\
\dot{h}_4 &= \frac{1}{2} h_1^2 v_2 + h_1 v_3 + v_4 \\
\dot{h}_5 &= h_1 h_2 v_2 + h_2 v_3 \\
\dot{h}_6 &= \frac{1}{6} h_1^3 v_2 + \frac{1}{2} h_1^2 v_3 + h_1 v_4 + v_6 \\
\dot{h}_7 &= \frac{1}{2} h_1^2 h_2 v_2 + h_1 h_2 v_3 + h_2 v_4 \\
\dot{h}_8 &= \frac{1}{2} h_1 h_2^2 v_2 + \frac{1}{2} h_2^2 v_3
\end{aligned}$$

其中初始条件为 $h(0) = 0$ 。

控制系统由 q_0 运动至 q_f 的任务, 可以通过选择连接 q_0 至 q_f 的任意轨迹来完成。将轨迹代入式 (8.23), 得虚拟输入 $v_1, \dots, v_n$, 它们对应于控制系统的 Philip Hall 基的前 n 个线性独立的矢量场。输入 v_i 称为是虚拟的, 是因为它们须由实输入 $u_i, i = 1, \dots, m$ 生成。为此将第七章第二节的李括号定义加以推广。例如, 为生成与上一实例中 $[g_1, g_2]$ 相对应的输入 v_3 , 利用定义将如下四段加以联接, 每段对应 $\sqrt{\epsilon}$ 秒: $u_1 = 1, u_2 = 0; u_1 = 0, u_2 = 1; u_1 = -1, u_2 = 0; u_1 = 0, u_2 = -1$ 。合成的流为

$$e^{\sqrt{\epsilon}g_1}e^{\sqrt{\epsilon}g_2}e^{-\sqrt{\epsilon}g_1}e^{-\sqrt{\epsilon}g_2} \quad (8.28)$$

Campbell-Baker-Hausdorff 公式以 Philip Hall 基元的形式描述了该合成流。由于该公式本身很重要, 下面对此作一简单介绍 (其证明及系数的递推关系见 [116])。

定理 8.5 Campbell-Baker-Hausdorff 公式

对于给定的两个光滑矢量场 g_1, g_2 , 其指数的组合为

$$e^{g_1}e^{g_2} = e^{g_1 + g_2 + \frac{1}{2}[g_1, g_2] + \frac{1}{12}([g_1, [g_1, g_2]] - [g_2, [g_1, g_2]]) + \dots} \quad (8.29)$$

式中其余项可通过令左右两侧 (非交叉) 正则幂级数的对应项相等而获得。

将 Campbell-Baker-Hausdorff 公式用于式 (8.28) 中的流, 可得 Philip Hall 坐标为

$$h = (0, 0, \epsilon, h_4(\epsilon))$$

式中 $h_4(\epsilon)$ 为 ϵ 的高阶项 (一阶以上)。因此, u_1 和 u_2 之间的循环策略不仅可产生沿 $[g_1, g_2]$ 方向的运动, 而且可产生沿 $[g_1, [g_1, g_2]]$ 方向的运动, 所以 $v_3, v_4 \neq 0$ 。但 h_1 和 h_2 是不受影响的。为产生沿 v_4 方向的运动, 可将八段输入加以联接, 以构成 u_1, u_2

之间 $\sqrt[3]{\epsilon}$ 秒的循环。由于可控性李代数是幂零的,该运动不产生任何其他括号方向的任意运动(对于上述 Campbell-Baker-Hausdorff 公式,式(8.29)右侧的级数是有限的)。该算法经推广后,可用于生成分段定常输入的结构化方法,以控制幂零可控性李代数系统。

若可控性李代数不是幂零的,上述算法需作修正,才能用来近似地控制系统。但此时存在两个难点:

1) Philip Hall 基不是有限的。

2) Campbell-Baker-Hausdorff 公式不能在有限项内终止。

解决的方法之一是通过输入变换来改变输入 g_i , 即选择一个矩阵 $\beta \in \mathfrak{R}^{m \times m}$, 使得由下式定义的经变换后的输入 $\tilde{g}_i$

$$[\tilde{g}_1 \quad \tilde{g}_2 \quad \cdots \quad \tilde{g}_m] = \beta [g_1 \quad g_2 \quad \cdots \quad g_m]$$

为幂零控制系统。其他方法包括对给定控制系统进行幂零近似。用分段定常输入来控制非完整系统的更详细算法,可阅参 Lafferriere 和 Sussmann^[62]的论文。

4 动态手指重定位

现回到手指不脱离物体表面情况下的重新定位问题。如第七章第四节的例子所知,如果球面指端与一个平面相接触,那么可通过纯滚动方式来改变接触点位置。本节详细讨论该问题,给出动态手指重定位问题的几种不同解法。

4.1 问题的描述

考虑图 8.2 所示系统的滚动接触抓取控制问题。第五章已推导了一组手指同时与一个物体相接触时的运动学方程。在局部坐标系内,系统总的约束可写为

$$J_h(\theta, x)\dot{\theta} = G^T(\theta, x)x \quad (8.30)$$

式中 θ 为手指关节转角矢量, x 为被抓物体的位置与姿态。

如果由约束方程式(8.30)所描述的抓取是可操作的,那么物体的任意速度 $\dot{x}$ 都可通过手指的某个速度矢量 $\dot{\theta}$ 来实现。但是,在 J_h 的零空间为非常态情况下,矢量 $\dot{\theta}$ 可能不是唯一的,这表明手指存在不影响物体运动的内部运动。设 u_1 为控制物体速度的一个输入; u_2 表示内部运动,则式(8.30)可写为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u_1 \\ \dot{\theta} &= J_h^+ G^T u_1 + K u_2 \end{aligned} \quad (8.31)$$

式中 K 的列张成 J_h 的零空间。

式(8.31)将抓取运动学描述为一个控制系统。动态手指重定位问题就是控制系统由初始位形 (θ_0, x_0) 运动到最终位形 (θ_f, x_f) 。初始位形和最终位形所对应的指端在物体上的位置可通过系统的运动学正解得到。

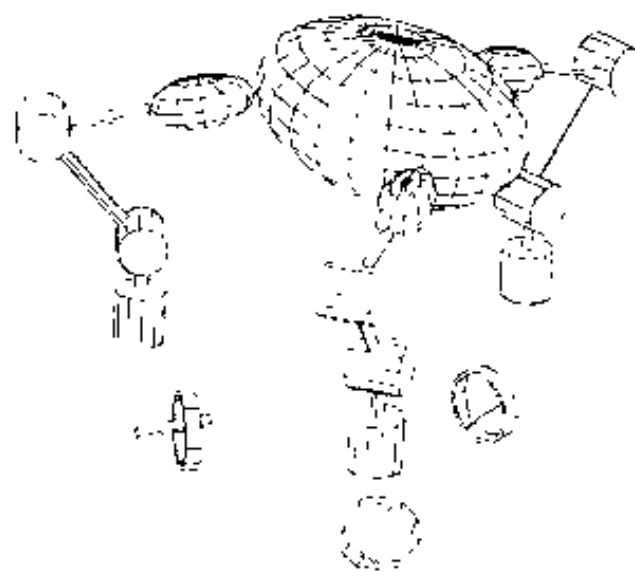


图 8.2 三指手抓取一个物体
[每一手指下的小圆圈
表示其施加的内力]

要获得物体和手指由初始位置运动到最终位置（始终保持接触）时 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 的一般解是非常困难的。下面给出两个特殊情况：

1) 如果手不存在冗余自由度（即 K 不存在），那么仅由 u_1 即可将系统运动至一个任意位置（抓持状态）。接触点位置的改变需要仔细选择一个位于 x 的封闭路径。

2) 如果手存在冗余自由度，那么手指可沿着物体运动，并使物体位置保持不变（ $\dot{x} = u_1 = 0$ ）。在这个情况下，仅用 K 中的矢量场即可使手指运动。

第二种情况对于单个手指的控制研究已足够，因为如果物体位置固定，各手指间是解耦的。为此，下面主要讨论较为简单的第二种情况。

4.2 用正弦输入进行控制

考虑单个球面手指在平面上滚动的情况，运动方程已在第七章给出，相应的控制系统如下

$$\dot{\eta} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sec q_1 \\ -\sin q_5 \\ -\cos q_5 \\ -\tan q_1 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -\cos q_5 \\ \sin q_5 \\ 0 \end{bmatrix} u_2 \quad (8.32)$$

如前面讨论，对变量进行变换，并将非线性项展开成泰勒级数，可得一个双链系统。如取状态变换为

$$z_1 = q_1 \quad z_2 = q_2 \quad z_3 = -q_5 \quad z_4 = q_3 - q_1 \quad z_5 = q_4 + q_2$$

输入变换为

$$v_1 = -u_2 \quad v_2 = \sec q_1 u_1$$

则可得

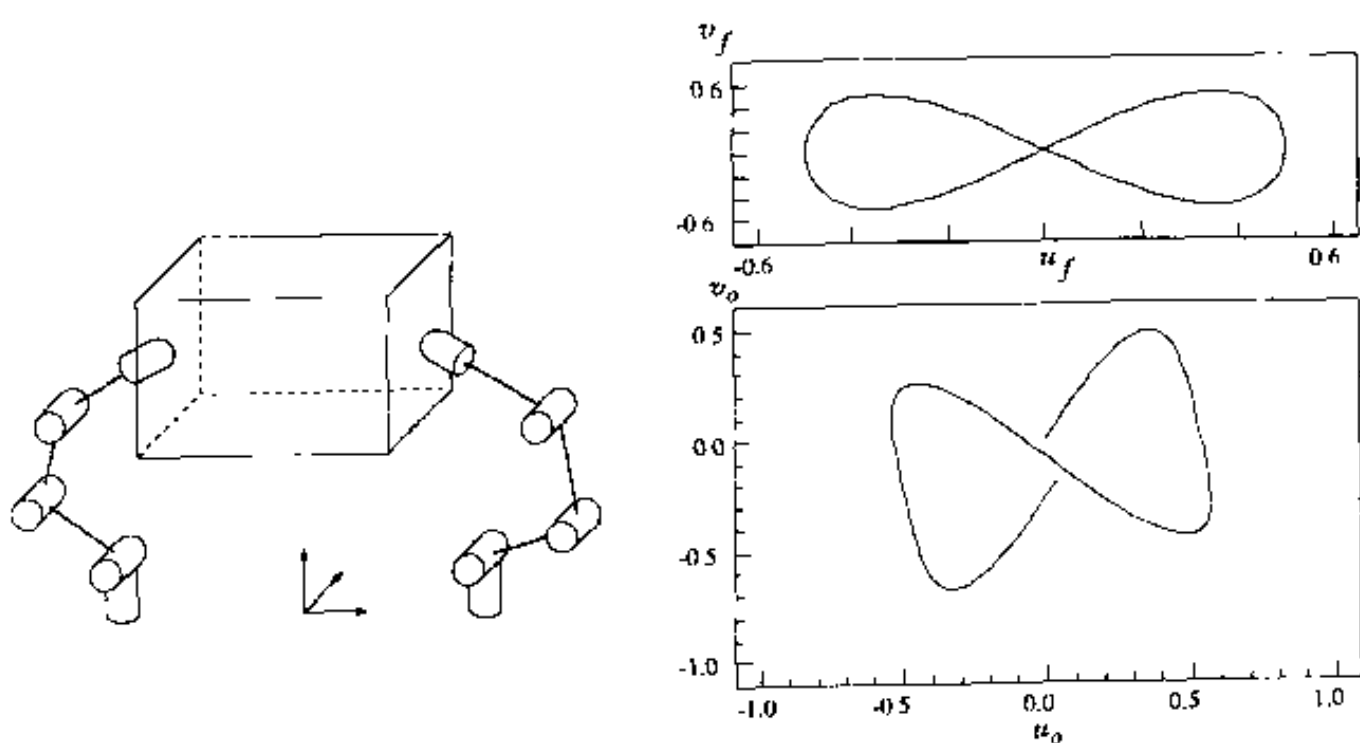


图 8.3 多指手的控制

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= v_1 \\
\dot{z}_2 &= v_2 \\
\dot{z}_3 &= z_1 v_2 + \Psi_1(z_1) v_2 \\
\dot{z}_4 &= z_3 v_2 + \Psi_2(z_3) v_1 + \Psi_3(z_1, z_3) v_2 \\
\dot{z}_5 &= z_3 v_1 + \Psi_4(z_3) v_1 + \Psi_5(z_1, z_3) v_2
\end{aligned} \tag{8.33}$$

式中 Ψ_i 为二阶以上的幅角。如果函数 Ψ_i 忽略不计, 那么可得一个可用正弦输入进行控制的双链系统。与跳跃机器人或汽车的情况不同, z_4 和 z_5 的傅里叶级数的系数是很难计算的。但可用基于频率的正弦和余弦的数值方法, 来控制手指在物体表面的运动。图 8.3 所示为球面指端沿平面物体的侧面运动的例子, 左图表示具有球面指端的手指在矩形物体上的运动, 右图表示手指沿物体侧面运动的轨迹, 右上图为手指接触位置固定不变时的手指接触位形 $(q_1, q_2) = (u_f, v_f)$, 而物体表面上的接触位置 $(q_3, q_4) = (u_o, v_o)$ 发生了沿 v_o 方向的位移。

4.3 几何状态算法

本小节介绍经典微分几何的一些方法, 并将其用于球面手指在平面上滚动问题的处理。

如第五章所述, 设 Q 为接触位形空间, S_f 和 S_o 分别为指端曲面和物体表面。在局部坐标系内, Q 可表示为 $\eta = (\alpha_f, \alpha_o, \Psi)$, 其中 $\alpha_f = (u_f, v_f)$, $\alpha_o = (u_o, v_o) \in \mathbb{R}^2$ 分别为 S_f 和 S_o 上的局部坐标, Ψ 为接触角。由第五章知, 滚动接触的运动方程为

$$\begin{aligned}
M_f \dot{\alpha}_f - R_\Psi M_o \dot{\alpha}_o &= 0 \\
T_f M_f \dot{\alpha}_f + T_o M_o \dot{\alpha}_o - \dot{\Psi} &= 0
\end{aligned} \tag{8.34}$$

对于球面手指在平面上滚动的情况, 有 $M_o = I$, $T_o = 0$, 并且

$$T_f = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\rho} \tan u_f \end{bmatrix} \quad M_f = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \cos u_f \end{bmatrix}$$

式中 ρ 为手指球面半径。由于 M_f 和 $R_\Psi M_o$ 是非奇异的, 在给定 $\alpha_f(t) \in \mathbb{R}^2$ 或 $\alpha_o(t) \in \mathbb{R}^2$ 情况下, 存在满足无滑动滚动约束的唯一路径 $\eta(t) \in Q$ 。进一步设 $\alpha_f(t) t \in [0, 1]$ 为 S_f 上的一条路径, 并记 $u = \dot{\alpha}_f$ 。那么通过对下列微分方程

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}_f &= u \\
\dot{\alpha}_o &= M_o^{-1} R_\Psi M_f u \\
\dot{\Psi} &= (T_f + T_o R_\Psi) M_f u
\end{aligned} \tag{8.35}$$

进行积分, 即可得路径 $\eta(t) \in Q$ 。也就是说存在一个提升映射 $\rho^{-1}: S_f \rightarrow Q$, 将 S_f 上的每一条路径变换为 Q 上的一条路径。下列经典定理说明了 S_f 上的一个封闭路径如何产生以接触角 Ψ 表示的一个变换。利用上述 T_f , M_f 和 T_o 的表达式, 可得

$$\dot{\Psi} = -\sin u_f u_2 \tag{8.36}$$

注意, 式 (8.36) 与球面半径 ρ 无关。因此, 下列定理尽管是针对单位半径球面的, 但实际上适合于任意半径的球面。

定理 8.6 Gauss-Bonnet 定理

设 $\alpha_f: [0, 1] \rightarrow S_f$ 为单位球面上的一条封闭路径, 它围成了一个帽形区域 Ω , 如图 8.4 所示。设 $\Delta\Psi$ 为球面在平面上沿给定路径 $\alpha_f(\cdot)$ 滚动时接触角的变化量, 那么

$$\Delta\Psi = -\Omega \text{ 的面积} \quad (8.37)$$

式中 Ω 的面积在单位球面上度量。

证明：由式 (8.36) 知

$$\dot{\Psi} = T_f M_f \dot{\alpha}_f = -\sin u_f \dot{v}_f$$

沿曲线 $\alpha_f(\cdot)$ 对 $\dot{\Psi}$ 积分，并将 Green 定理用于该线积分，可得

$$\begin{aligned} \Delta\Psi &= \int_0^1 \dot{\Psi} dt = \oint -\sin u_f dv_f = \\ &= -\iint_{\Omega} \cos u_f dv_f du_f = -\Omega \text{ 的面积} \end{aligned}$$

其中 $\cos u_f dv_f du_f$ 为在局部坐标系中表示的单位球面上的微面积。

由上一定理可知，接触角的变化量 $\Delta\Psi$ 取决于单位球面上曲线 $\alpha_f(\cdot)$ 所围成的面积，而与球面的实际半径无关。 $\Delta\Psi$ 称为路径 $\alpha_f(\cdot)$ 的几何状态或非完整度，它给出了产生接触角变化 $\Delta\Psi$ 所需的运动，即为手指封闭路径覆盖的面积。

下一定理将说明如何利用平面物体上的封闭路径 α_0 生成球面手指上的运动，该运动确定了对手指进行重新定位所需的物体表面运动。利用该方法可产生封闭的手指运动，形成状态变化 $\Delta\Psi$ 。该过程完全是建立在几何意义上的，不涉及到滚动方程式 (8.35)。

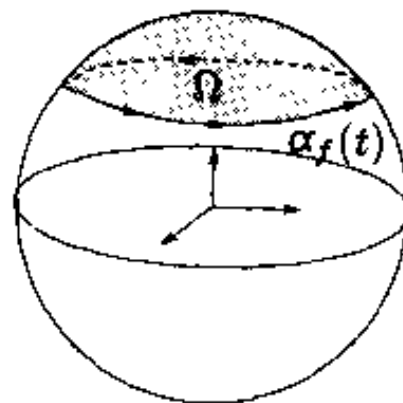


图 8.4 球面上一条路径的几何状态

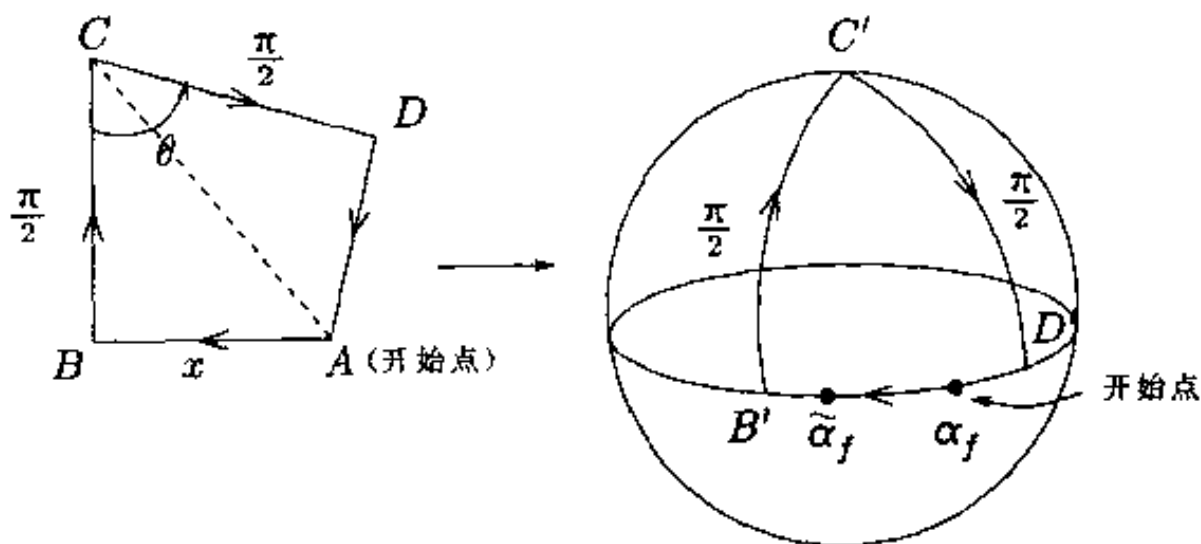


图 8.5 平面上的封闭路径产生的球面上的运动

定理 8.7 球在平面上的滚动

设 α_f 和 $\tilde{\alpha}_f$ 为球面上距离为 l 的两点。假设 $l < \pi/2$ ，那么如果线段 AB 、 DA 的长度为 x ，线段 BC 、 CD 的长度为 $\pi/2$ ，并且 x 满足方程

$$2\left(x - \arctan \frac{x}{\pi/2}\right) = l$$

则球可在平面上沿封闭曲线 $ABCD A$ 从 α_f 滚动到 $\tilde{\alpha}_f$

证明：用一个大圆弧连接 α_f 和 $\tilde{\alpha}_f$ ，并将平面上的起始点记为 A 。在平面上从 A 到 B ，再到 C 的直线，对应于在球面上从 α_f 开始、经过 B' 再到北极点 C' 的曲线，如图 8.5 所示。由于指端在物体表面上所走过的距离与在球面上所走过的距离相等，所以 α_f 和 B' 之间的距离为 x ，并且 $\angle(\alpha_f B' C') = \pi/2$ 。从 C 到夹角为 θ 、距离为 $\pi/2$ 的 D ，对应于从 C' 向下到赤

道上的某一点 D' ，并且 $d(B', D') = \theta$ 。在平面上从 D 到 A 的直线，对应于从 D' 到某点 $\tilde{a}_f$ 的赤道，其中 $d(\tilde{a}_f, D') = x$ 。由图知，

$$d(a_f, \tilde{a}_f) = 2x - \theta = 2x - 2\arctan \frac{x}{\pi/2} := f(x)$$

进一步，对于每一个 $l < \pi/2$ ，由于 $f(0) = 0$, $f(\pi/2) = \pi/2 > l$ 和 $f'(x) > 0$ ，所以下列方程

$$f(x) = l$$

具有唯一解 $x \in [0, \pi/2]$ 。

概括地说，利用几何学方法和 Green 定理，可得到通过滚动平面物体产生球面指端和接触角期望运动的策略。这一方法似乎是针对某一特定情况，包括特定的手指和物体几何形状而建立的，但实际上可推广用于其他几何形状。该方法称为几何状态法，不仅可处理手指在物体上的滚动问题，还可用于其他情况，例如，该方法可用于调整太空 (method of geometric phase) 中卫星的姿态，也可解释草履虫是如何利用其纤毛的周期运动产生向前运动的。

5 小结

本章涉及的主要概念如下：

1. 增长矢量为

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= u_1 \\ \dot{q}_2 &= u_2 \\ \dot{q}_3 &= q_1 u_2 - q_2 u_1\end{aligned}$$

的系统之最优控制（使最小二乘评价函数的积分为最小）为正弦输入。并且当 $q_1(0) = q_2(0) = q_1(1) = q_2(1) = 0$ 时，最优输入是频率为 2π 的正弦函数。

2. 对于如下系统

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{Y}} &= \mathbf{q}\mathbf{u}^T - \mathbf{u}\mathbf{q}^T\end{aligned}$$

最优控制输入（即使最小二乘评价函数的积分为最小）为正弦。当 $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}(1) = 0$ 时，最优输入为以频率表示的正弦。

3. 利用频率表示的正弦作为（次优）输入，可控制链式系统。单链系统为如下形式一般多链系统之一

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= u_1 \\ \dot{q}_2 &= u_2 \\ \dot{q}_3 &= q_2 u_1 \\ \dot{q}_4 &= q_3 u_1 \\ &\vdots \\ \dot{q}_n &= q_{n-1} u_1\end{aligned}$$

利用对合条件可将给定系统转换为链式系统。

4. 在解决非完整控制系统的最小二乘控制问题时，虽然很难给出最优控制的封闭解，但可建立最优输入时间导数的表达式。利用数值技术，如 Ritz 近似算法，可得最优控制的

近似算法。

5. 当可控性李代数为幂零时, 可用分段定常输入来控制以 Philip Hall 基坐标表示的非完整控制系统。

6. 动态手指在物体表面上的重新定位可由正弦输入来完成。对于球面手指在平面物体上的滚动情况, 可用 Gauss-Bonnet 定理对手指在物体表面上进行定位和调整接触角。

6 文献说明

对机械系统的非完整特性研究已有很久的历史, 但对非完整系统的控制和规划研究则是近几年的事。非完整度与结构可控性之间的联系首先由 Laumond^[56] 在移动机器人的研究中和 Li^[59,61] 关于手指在被抓物体表面上滚动的研究中提出。关于非线性系统可控性的研究非常广泛, 如 Nijmeijer 和 vander Schaft^[84], Isidori^[44] 对此作了详细的论述。但关于结构可控性方面的重要结果首次出现在文献 [11] 和 [4] 中, 它们分别解决了 $\mathbb{R}^n$ 和 $SO(3)$ 上典型系统的最小二乘控制问题。

本章的许多原始材料来自于作者发表的最新研究论著, 如文献 [61]、[78] 讨论了手指在物体表面滚动的控制问题, 文献 [79] 将正弦输入用于非完整系统的控制, 文献 [104] 讨论了最优控制问题的结构, 文献 [32, 33] 介绍了最优控制问题的 Ritz 近似方法, 文献 [113] 解决了带 N 个拖箱汽车的停泊问题。论文集 [62] 收集了许多关于非完整系统运动规划方面的研究文章。非完整力学和几何状态的讨论见文献 [68, 69]。

7 习题

1. 证明下列系统

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= u_1 \\ \dot{q}_2 &= u_2 \\ \dot{q}_3 &= q_1 u_2 \\ \dot{q}_4 &= \frac{1}{2} q_1^2 u_2 \\ \dot{q}_5 &= q_1 q_2 u_2 \\ \dot{q}_6 &= \frac{1}{6} q_1^3 u_1 \\ \dot{q}_7 &= \frac{1}{2} q_1^2 q_2 u_2 \\ \dot{q}_8 &= \frac{1}{2} q_1 q_2^2 u_2\end{aligned}$$

是可控的, 并且是四阶幂零的。能找到一个非线性坐标变换将此系统变换为单链系统吗?

2. 证明下列系统是可控且幂零的:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= u_1 \\ \dot{q}_2 &= u_2 \\ \dot{q}_3 &= q_1 u_2 - q_2 u_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{q}_4 &= q_1^2 u_2 \\ \dot{q}_5 &= q_2^2 u_1\end{aligned}$$

3. 考虑下列控制系统

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{Y}} &= \mathbf{q}\mathbf{u}^T - \mathbf{u}\mathbf{q}^T\end{aligned}$$

式中 $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^m$, $\mathbf{Y} \in so(m)$ 。

(a) 通过使积分

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \mathbf{u}^T \mathbf{u} dt$$

为最小, 建立欧拉-拉格朗日方程。

(b) 对于任一 $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^3$ 的边界条件 $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}(1) = 0$, $\mathbf{Y}(0) = 0$, $\mathbf{Y}(1) = \hat{\mathbf{y}}$, 求解欧拉-拉格朗日方程以获得最优输入 $\mathbf{u}$ 。

(c) 求出控制系统从 $(0, 0)$ 到 $(0, \hat{\mathbf{Y}}) \in \mathfrak{R}^m \times so(m)$ 的输入 $\mathbf{u}$ 。

4. 考虑下列系统

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= u_1 \\ \dot{q}_2 &= u_2 \\ \dot{q}_{12} &= q_1 u_2 \\ \dot{q}_{121} &= q_{12} u_1 \\ \dot{q}_{122} &= q_{12} u_2\end{aligned}$$

对该系统施加输入

$$\begin{aligned}u_1 &= a_1 \sin 2\pi t + a_2 \cos 2\pi t + a_3 \sin 4\pi t + a_5 \cos 4\pi t \\ u_2 &= b_1 \sin 2\pi t + b_2 \cos 2\pi t + b_3 \sin 4\pi t + b_5 \cos 4\pi t\end{aligned}$$

对 $\dot{q}_{121}$ 和 $\dot{q}_{122}$ 从 $t=0$ 到 $t=1$ 进行积分, 求以 (a_i, b_i) 表示的多项式系统。提出由给定的初始和终了状态求系数 (a_i, b_i) 的方法。

5. 两输入双链系统

下列系统称为两输入双链系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_0 &= u_1 & \dot{y}_0 &= u_2 \\ \dot{x}_1 &= y_0 u_1 & (\dot{y}_1 &= x_0 u_2) \\ \vdots & & \vdots & \\ \dot{x}_{n_x} &= x_{n_x-1} u_1 & \dot{y}_{n_y} &= y_{n_y-1} u_2\end{aligned}$$

其中 $y_1 := x_0 y_0 - x_1$ 为李括号的反对称表示。

(a) 证明系统是可控的;

(b) 证明对于任一 q_k , $k \geq 1$, 输入 $u_1 = a \sin 2\pi t$ 和 $u_2 = b \cos 2\pi k t$ 能控制系统至 q_k 的终值。给出以 (a, b) 表示的 q_k 终值表达式;

(c) 证明对于任一 y_k , $k \geq 2$, 输入 $u_1 = b \cos 2\pi k t$ 和 $u_2 = a \sin 2\pi t$ 能控制系统至 y_k 的终值;

(d) 给出控制系统由初始状态至终了状态的算法。

6. 在定理 8.4 的证明中, 认为对于某个 $\Omega \in so(m)$, 如果 $\mathbf{u}$ 满足下列微分方程

$$\dot{u} = \Omega(t)u$$

那么对于 $U(t) \in SO(m)$, u 的解为

$$u(t) = U(t)u(0)$$

试证明此结论。

7. 定理 8.4 建立了最优输入的一阶微分方程, 试利用此定理的证明方法建立 $\ddot{u}$ 的计算公式。以输入矢量场的李括号来表示此结果。如果可能的话, 试建立 $u^{(n)}$ 的计算公式。

8. 利用定理 8.4 的结论证明

$$\frac{u(t)}{\|u(0)\|}$$

的最少时间控制的最优输入可用于控制系统在满足约束 $\|u(t)\|^2 \leq 1$ (对于所有的 t) 的情况下由 $q(0) = q_0$ 到 $q(T) = q_f$ 。

9. 将定理 8.4 用于第二节典型控制系统的最优控制输入问题的求解:

$$\dot{q}_1 = u_1$$

$$\dot{q}_2 = u_2$$

$$\dot{q}_3 = q_1 u_2 - q_2 u_1$$

10. 将 Engel 系统最优输入的求解方法加以推广用于习题 2 系统最优输入的求解。

11. 对于下列具有漂移的系统

$$\dot{q} = f(q) + \sum_{i=1}^m g_i(q) u_i$$

考虑其最小二乘最优输入控制问题。

(a) 建立最优哈密尔顿函数的表达式, 并证明最优输入满足下列微分方程

$$\dot{u} = \Omega(q, p)u = \begin{bmatrix} p^T[f, g_1] \\ \vdots \\ p^T[f, g_m] \end{bmatrix} \quad (8.38)$$

其中 $\Omega(q, p)$ 由式 (8.16) 定义。

(b) 建立由式 (8.38) 给定的最优输入的二阶微分方程。

12. 考虑下列系统

$$\dot{q}_1 = u_1$$

$$\dot{q}_2 = u_2$$

$$\dot{q}_3 = q_2 u_1$$

其初始条件为 $q(0) = 0$ 。设输入为

$$u_1 = \alpha_{1,0} \alpha_{1,1} \cos 2\pi t + \alpha_{1,2} \sin 2\pi t$$

$$u_2 = \alpha_{2,0} + \alpha_{2,1} \cos 2\pi t + \alpha_{2,2} \sin 2\pi t$$

(a) 对以符号表示的控制系统从 $t=0$ 到 $t=1$ 进行积分, 求得以 α 和输入的系数矢量表示的 $q(1)$, 并计算雅可比矩阵 $A = \frac{\partial q(1)}{\partial \alpha} \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$;

(b) 证明如果 A 是满秩的, 那么系统是可控的, 并且具有上述形式的输入。

13. 考虑由式 (8.7) 表示的单链系统, 若 Philip Hall 基为 $g_1, g_2, \text{ad}_{g_1}^k g_2, k=1, \dots, n-1$, 试推导 Chen-Fliess-Sussmann 方程。

14. 考虑下列系统

$$\dot{q}_1 = u_1$$

$$\dot{q}_2 = u_2$$

$$\dot{q}_3 = q_1 u_2 - q_2 u_1$$

$$\dot{q}_4 = q_1^2 u_2$$

(a) 推导 Chen - Fliess - Sussmann 方程;

(b) 假设输入为

$$u_1 = a_0 + a_1 \cos 2\pi t + a_2 \sin 2\pi t$$

$$u_2 = b_0 + b_1 \cos 2\pi t + b_2 \sin 2\pi t$$

试建立以初始和终了状态表示的幅值参数多项式方程。

第九章 机器人操作的研究展望

本书试图使读者产生一种感觉，即机器人操作的研究需要一些分析工具。由于数学方法具有严密性，所以对于机器人技术及其未来发展而言，如果从数学的角度加以研究，就较易推动其发展和创新。目前，工业机器人已成功地应用于汽车制造和电子元件装配。在汽车制造业中，点焊和喷漆是使用机器人的两个最为广泛的作业；而对于发动机的装配作业，在使用机器人的数量方面则有所不同。还有其他一些领域，机器人的使用仅处于起步阶段。本章将简要介绍这些应用领域，并就其现状作一些评价。

在使用机器人时，常遇到这样一个问题，就是远程操作与机器人之间到底有什么差别。虽然两者的准确定义和差异是很难区分的，但大致的差异似乎在于人工干预的程度。这种人工干预即是操纵相同基本装置所需要的“人工智能”，而不是“机器智能”。由远程操作走向纯机器人或自动操作是一个技术演变的过程。从实用的观点来看，倾向于以远程操纵的形式引入新的机器人装置。历史也已表明了这个演变过程。当然，还有许多原因使得应用中的反馈控制不能有人的人工干预：

- 1) 传感信号传输和命令信号接受过程中的通讯延迟。
- 2) 人对数字和定量数据反应速度迟缓。

通常的观点是，当今的远程操作器就是未来的自动机器人。因此，本章不对它们加以区分。

在通俗科学出版物中，同时使用虚拟现实（virtual reality）和远程现实（telepresence）这两个术语。虚拟现实是指包含视觉、声音、触觉和力觉等综合环境的远程生成。远程视觉和声音较易实施，而远程触觉和力觉就不易达到了。为实现远距离操作物体（远程现实），需要有这些感觉。因此，在远程操作（或远程现实）与虚拟现实之间有一种内在的联系。事实上，目前关于虚拟现实的大量文献实际上研究的是远程现实，因为模拟远程环境的目的是允许人与之交互作用。

总之，今后几年的技术进步将集中在远程操作、虚拟现实和柔性操作等领域，本章后续内容将尽可能对此作些介绍。本章各节内容是根据机器人的大小来安排的：第一节讨论一般尺寸的机器人，第二节讨论毫米级机器人，第三节讨论微米级和纳米级机器人。

1 用于危险环境的机器人

一般尺寸机器人目前和将来的主要应用领域之一是危险环境。这一节概要介绍机器人应用的一些环境和场合。

太空机器人

用于太空的最著名的机器人是太空穿梭机上 20m 长的远程操作手，它有六个自由度，由宇航员根据视觉反馈信息对其进行手动远程操作。当然使机器人在计算机控制下运动是完

全可以做到的。日本计划建造一种飞行远程机器人服务员，它具有两个可协调操作的机器人手臂，以在自推进平台上维修卫星和进行其他协调操作。用于太空的其他机器人包括探测火星和其他行星的机器人，它们通常是将手臂安装在履带式或轮式移动车上，用来铲掘土壤样本。由于命令信号传递滞后时间太长，远程反馈控制没有意义，所以不能期望这些装置可以由人进行遥控操作。

水下机器人

在最近的十年中，已建造了多种遥控小车，用于水下石油井架的检查和探测。人工潜水成本很高且水下作业有生命危险促使了水下机器人的开发。水下机器人主要由一个移动平台和一个或多个机器人手臂组成，通过与运载船相联的控制电缆实现对其控制，也可以是完全自主控制。大多数这种机器人是遥控导航的，而用于海洋的机器人通常是液压驱动的，以能承受高压并具有抗腐蚀性。今后，将会有大量的完全自主型机器人，用于海底探测和其他超越人类能力的复杂环境。

核、毒废物处理和采矿机器人

机器人学早期的一些工作来源于处理放射性材料的远程机器人。近几年来，使用带有操作臂的移动机器人进行检测、维护甚至于处理废弃燃料棒，已较为普遍。随着全球各地需要处置的危险物品种和数量的增多，有必要开发能处理有毒材料的机器人。采矿环境也是相当危险的，现已有一些不同种类的可遥控操纵的采矿小车和操作臂。

消防、建筑和农业用机器人

可以想象这样一个情景，将失火现场建筑物的结构地形图输入机器人，利用热和烟雾传感器作引导，带有水、化学灭火剂以及视频数据的机器人就可到失火地点进行灭火。在这种应用领域，机器人能够爬楼梯和穿过走廊（即腿式及轮式机器人）是很重要的。自动化建筑则是一个刚刚开始领域，但是正在迅速开发精确且无危险的建筑机器人和能在地下或水下环境作业的机器人。在农业方面，安装在手臂上并带有视觉系统的多指机器人手已用于摘橘子和收割庄稼。机器人也可用于播种和耕作。

在澳大利亚，机器人系统已应用于肉类包装厂的去骨工序。最近，令人惊奇的是由西澳大利亚大学研制的剪羊毛机器人系统，其中的机器人手腕在工作空间内不存在奇异位形。

2 用于医疗的多指手

最近几年，在微型手术方面已有许多令人振奋的进展，这包括通过身体上的切口或小孔（尺寸从 3mm 到 11mm）进入器官内部的许多技术。因此，使传统外科手术中对肌肉和其他组织的损伤减到最少程度，这样就短缩了病人的康复时间和住院时间，增加了手术的安全性。在这些手术中，首先将细长的探针插入一个刺孔，然后再将带有激光源、摄像机和有关仪器的探针送入体内空腔部位。在某些情况下，体腔（如腹腔）可通过气体加以扩张以形成观察空间。有源光学（CCD 摄像和高分辨率显示）和纤维光学的发展，使外科医生能够通过细孔得到高质量的体内图像，并用一些仪器来分析体内图像，如可用内窥镜观察胃的内部

组织；用腹腔镜观察腹腔；用胸腔镜观察胸腔以及用关节镜观察关节内部情况。一些手术，如用腹腔镜切除胆囊、用内窥镜切除胃息肉、用胸腔镜进行肺腔软组织修复和用关节镜刮去膝关节内的损伤组织，现已相当普遍。在美国每年 60 万例胆囊切除手术中大约有 50 万例是用腹腔镜做的。一些医生认为，今后最小创伤技术将在外科手术中占主导地位。

然而，最小创伤外科手术受到了操作手技术水平的限制，主要原因有：

1. 自由度不够 现有的针夹持器、手术刀和其他工具是通过从动机构来传递医生的手的运动，没有触觉反馈，但最主要的缺陷是当今所用的工具自由度有限。例如，针驱动器只能在体腔内作滑动、扭转和摆动（包括上下和左右运动），这样仅为医生提供了四个自由度，不能完全控制针的姿态。由于驱动器只能实现针绕其长轴的旋转，所以缝合线肯定会偏离插入点。

2. 外科手术需要精细运动 在开刀手术中，医生精神高度集中，尽量避免颤抖传递到手术装置末端。在最小创伤外科手术中，对器械的支承可减小工具回转运动的颤动，但无助于克服肩和肘的颤动实现其他方向的精确定位。

增加操作手的自由度可提高效率，增加安全性和应用范围，从而克服前述缺陷。但是，由于种种原因，自由度的增加将导致运动学关系的复杂化。为实现最小创伤外科手术，可以引入多指机器人手技术。微型操作手的设计、构造和控制与一般机器人手大不一样。由于手指的尺寸很小（毫米级），直接对转动关节或移动关节进行驱动是不现实的。现已设计了由绳索或微型液压元件控制的微型手指。操作手的制造技术可借用集成电路的制造技术。虽然在微尺度情况下，一般的金属和塑料材料能够产生生物意义上的足够大的力，但开发具有足够大运动范围的驱动器则是一项具有挑战性的工作。

在起步阶段，可用远程操作手技术来控制外科手术操作手，将手术动作传进体腔。由外科医生所戴的传感手套，提供触觉和力反馈，而手指的位置则用传感器测得后传送给微型多指手。在文献 [19] 中已提出了这样一种系统。

这方面的应用潜力是巨大的，现正在开发能用于战场和太空的远程外科手术技术。随着智能、控制以及传感技术的进一步发展及在外科操作手中的应用，在不远的将来将会出现外科工作站。

3 小型机器人——微机器人学

在许多机器人应用领域，需要处理或操作非常小的物体，如生物细胞或半导体电子元件。操作的范围要比外科手术之毫米级操作手小好几个数量级。这一节将集中讨论微米级和纳米级机器人。对此类小型物体的操作可有两种不同的方法：一是用带有非常精密控制系统的一般（大的）操作手，另一是将操作手微型化。将机器人缩小到与被操作物相同的尺度，具有如下优点：

- 1) 可施加细微的力。
- 2) 机器人的制作可更为精密。
- 3) 机器人可用硅加工技术和光刻技术来制造。

在集成电路片上制作微型机器人的想法已由 Brooks & Flynn^[16]，Pister & Fear-
ing^[92,93,94]提出。可以预言，在狭窄空间的微型远程操作和微小生物系统与机电系统的大规

模并行处理方面, 这些机器人将有广泛的应用。这里将简要介绍一下该领域在技术方面的挑战与机遇^[31]。

对于微机器人系统的制造, 需要解决一些工程上的问题, 如动力源、驱动方式 (如果可动的话)、传感集成控制以及与外界的通讯等等。实现微传感和微驱动的一个关键技术是微加工, 这是用集成电路制造技术进行微加工甚至微米级加工的能力。例如, 微加工技术可用来制作象小毛虫一样的微驱动器, 制造能对直径为 $10\mu\text{m}$ 左右的零件进行操作的夹持器, 或者几个微米大小的平面旋转电动机以及像微陀螺的传感器。在微尺度下, 力的大小完全不同于一般情况, 静电力比电磁力大。因此, 机构的驱动方式必须重新考虑。

智能传感器、驱动器和控制系统可以集成在单个芯片上。Pister 等^[93]提出了一种操作面体类零件的新型集成系统。该系统由下列部分组成: 在 1cm^2 的硅基上用空气轴承支撑 1mm^2 的平台, 平台在静电力驱动下作平面运动, 从而带动夹持器、传感头或加工工具, 再加上测量平台位置的电容位置传感器。该系统已制造出一部分, 图 9.1 即为其示意图。其设计类似于称为 Robotworld (由 Automatrix 公司制造) 的宏机器人, 可自动将光缆对准并将其绞接起来。

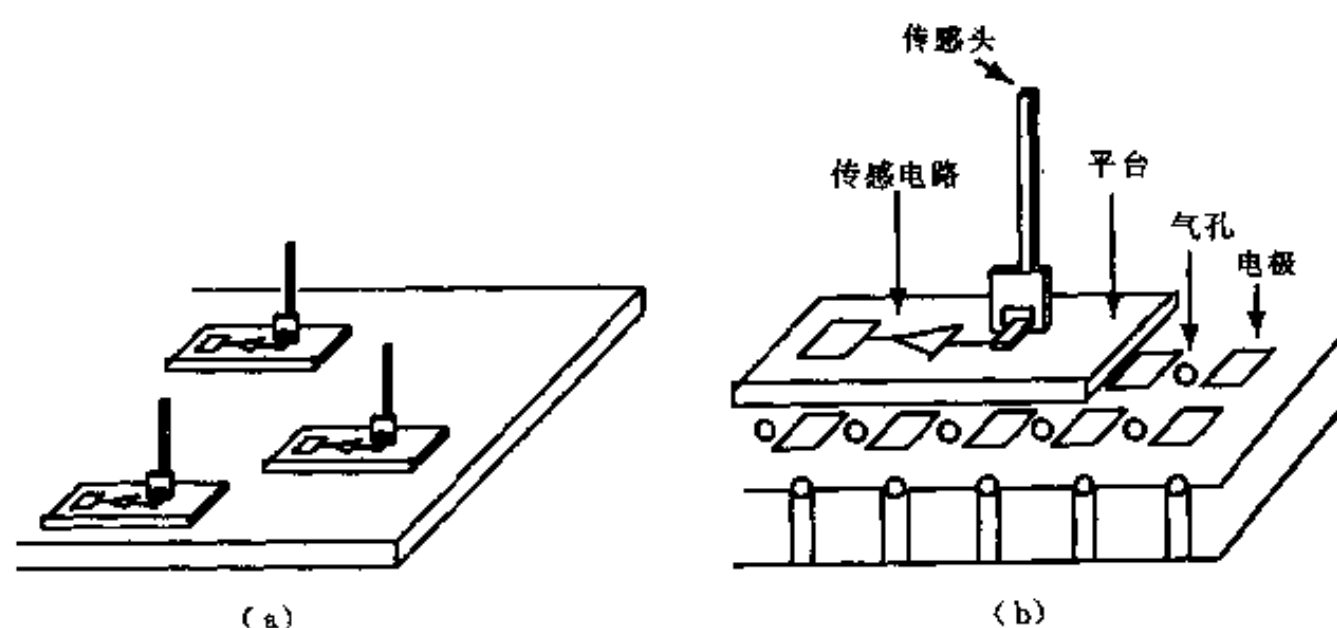


图 9.1 新型集成系统

(a) 悬浮在支撑面上的几个传感平台

(b) 单个平台的详细图

现有的微机械系统大多是平面型的。但是, 为使操作手的工作范围不限于其所安装的平面, 操作手必须采用三维结构。在这方面, 一个很有效的新方法是由 Pister 等提出的微铰链技术^[94], 即零件的制作是二维的, 但具有在适当位置相互转动或移动的能力, 从而形成一个三维结构。利用日本折纸艺术的思路, 将结构做成能通过在水槽中的搅动实现自行组装。

未来几年, 微机器人和多指机器人将有突破性的发展, 它具有在液体中行进的能力, 并能实现精细操作, 以完成生物和集成电路方面的各种任务。

附录 A 李群与机器人运动学

熟悉微分几何的读者可以看出, 本书所用的大多数分析方法来源于李群理论和黎曼几何。本附录简要介绍李群基本理论及其与刚体运动学的关系。

1 可微流形

下面首先基于文献 [9] 对微分几何作扼要概述, 主要是给出后续各节将要用到的符号表示法。

1.1 流形和映射

设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 和 $V \subset \mathbb{R}^m$ 为开集, 对于映射 $f: U \rightarrow V$, 如果 f 的各阶偏导数存在且连续, 则此映射为光滑映射。如果 $m = n$, f 为双射, 且 f 和 f^{-1} 光滑, 那么称 f 为微分同胚 (diffeomorphism), 并认为 U 和 V 是微分同胚的。

一个维数为 n 的流形就是一个与 $\mathbb{R}^n$ 局部同胚的 (homeomorphic) 集合 M , 可用一组局部坐标图 (local coordinate charts) 来表示流形。局部坐标图是一个坐标对 (ϕ, U) , 其中 ϕ 是一个将集合 $U \subset M$ 中的点映射到 $\mathbb{R}^n$ 的开子集的函数。对于两个重叠的局部坐标图 (ϕ, U) 和 (ψ, V) , 如果 $\psi^{-1} \circ \phi$ 是一个微分同胚, 则认为此两坐标图是 C^∞ 相关的。具有 U 覆盖 M 性质的坐标图的组合称为光滑图册 (smooth atlas)。一个流形 M 如果存在光滑图册, 则称其为光滑流形 (smooth manifold)。

流形之间的映射性质可根据局部坐标图来定义。设 $F: M \rightarrow N$ 为两光滑流形之间的映射, (U, ϕ) 和 (V, ψ) 分别为 M 和 N 的坐标图, 如果对于 M 和 N 上任选的坐标图均有 $\tilde{F} = \psi \circ F \circ \phi^{-1}: \phi(U) \rightarrow \psi(V)$ 是光滑的, 则映射 $F: M \rightarrow N$ 是光滑的。同样, 若对于任选的坐标图, $\tilde{F}$ 总是一个微分同胚, 则 F 是一个微分同胚。

1.2 切空间和切映射

设 M 为一个 n 维光滑流形, p 为 M 中的一点。 $C^\infty(p)$ 为 M 上光滑、实值函数的集合, 其定义域为 p 的某个开邻域。对于映射 $X_p: C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$, 如果对于所有的 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 和 $f, g \in C^\infty(p)$, 有

$$(i) \quad X_p(\alpha f + \beta g) = \alpha(X_p f) + \beta(X_p g) \quad (\text{线性性质})$$

$$(ii) \quad X_p(fg) = (X_p f)g(p) + f(p)(X_p g) \quad (\text{莱布尼茨 (Leibniz) 法则})$$

则称此映射是一个导算子 (derivation)。所有导算子 $X_p: C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$ 的集合定义了实域上具有如下运算规则的一个矢量空间

$$(X_p + Y_p)f = X_p f + Y_p f$$

$$(\alpha X_p)f = \alpha(X_p f)$$

M 在点 p 的切空间 (tangent space) 记为 $T_p M$, 它是所有导算子 $X_p: C^\infty(p) \rightarrow \mathfrak{R}$ 的集合。切空间中的元素称为切矢量 (tangent vectors)。设 (U, ϕ) 为 M 上的一个坐标图, 其局部坐标为 $(x_1, \dots, x_n)$, 导算子 $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ 的集合构成了 $T_p M$ 的一个基, 因此

$$X_p = X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

矢量 $(X_1, \dots, X_n) \in \mathfrak{R}^n$ 为 $X_p \in T_p M$ 的局部坐标表示。

设 $F: M \rightarrow N$ 是一个光滑映射, 定义 F 在 p 的切映射 (tangent map) 为线性映射 $F_{*p}: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$, 即

$$F_{*p} X_p (f) = X_p (f \circ F)$$

其中 $X_p \in T_p M$, $f \in C^\infty(F(p))$; 也可用符号 $T_p F$ 来表示 F 在 p 的切映射。切映射具有下列性质:

1. 如果 $H = F \circ G$ 为两个光滑映射 F 和 G 的组合, 则 $H_{*p} = F_{*G(p)} \circ G_{*p}$ 或 $T_p H = T_{G(p)} F \circ T_p G$ 。

2. 如果 $F: M \rightarrow N$ 是一个微分同胚, 则 $F_{*p}: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ 是切空间的一个同构 (isomorphism), 其逆为 $(F_{*p})^{-1} = (F^{-1})_{*F(p)}$ 。

如果 $c: \mathfrak{R} \rightarrow M$ 是 M 中的一条曲线, 其中 $c(0) = p$, $\dot{c}(0) := c_{*t} \left[\frac{\partial}{\partial t} \right] \Big|_{t=0} = X_p$, 则

$$T_p F(X_p) = \frac{d}{dt} F(c(t)) \Big|_{t=0}$$

设 M 为一个 n 维流形, M 的切丛 (tangent bundle) 记为 TM , 它是一个 $2n$ 维流形, 其定义如下

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

TM 的元素可写为 (p, X_p) , 或简记为 X_p , 其中 $p \in M$, $X_p \in T_p M$ 。存在由 $\pi(X_p) = p$ 确定的自然投影 $\pi: TM \rightarrow M$ 。

1.3 余切空间和余切映射

当给定流形 M 在点 p 的切空间 $T_p M$ 时, 定义 M 在 p 的余切空间 (cotangent space) 为所有线性函数 $\omega_p: T_p M \rightarrow \mathfrak{R}$ 的集合, 记为 $T_p^* M$ 。 $T_p^* M$ 是一个维数与 $T_p M$ 相同的矢量空间, $T_p^* M$ 的元素称为余切矢量 (cotangent vectors)。余切矢量 $\omega_p \in T_p^* M$ 对切矢量 $X_p \in T_p M$ 的作用记为 $\langle \omega_p, X_p \rangle$ 。若 $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ 是 $T_p M$ 与局部坐标 $(x_1, \dots, x_n)$ 相对应的一个基, $T_p^* M$ 的对偶基为 $\{dx_1, \dots, dx_n\}$, 其中

$$\left\langle dx_i, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

对于给定的函数 $f: M \rightarrow \mathfrak{R}$, 通过

$$\langle df(p), X_p \rangle = X_p(f), \quad X_p \in T_p M$$

定义余切矢量 $df(p) \in T_p^* M$, 其中 $df(p)$ 称为 f 的微分。相对于局部坐标为 $x = (x_1, \dots, x_p)$ 的坐标图 (ϕ, U) , $df(p)$ 可写为

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) dx_n$$

其中 $x = \phi(p)$ 。

设 $F: M \rightarrow N$ 为光滑映射, F 的余切映射 (cotangent map) 就是线性映射 $F_p^*: T_{F(p)}^*N \rightarrow T_p^*M$, 其定义为

$$\langle F_p^* \alpha_{F(p)}, X_p \rangle = \langle \alpha_{F(p)}, F_* X_p \rangle, \alpha_{F(p)} \in T_{F(p)}^*N, X_p \in T_pM$$

也可用符号 T_p^*F 来表示 F 在 p 的余切映射。

设 M 为 n 维流形, 流形 M 的余切丛 (cotangent bundle) 记为 T^*M , 它是一个 $2n$ 维流形, 其定义如下

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M$$

TM 的元素可写为 (p, α_p) , 或简记为 $\alpha_p \in T_p^*M$ 。

1.4 向量场

流形 M 上的光滑向量场 X 定义为满足 $\pi_* X = id$ 的光滑映射 $X: M \rightarrow TM$, 其中 $\pi: TM \rightarrow M$ 为正则投影, $id: M \rightarrow M$ 为 M 上的单位映射。设 $\mathfrak{X}(M)$ 表示 M 上所有光滑向量场的集合, 相对于坐标图 (ϕ, U) , 向量场可写为

$$X(x) = X_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + X_n(x) \frac{\partial}{\partial x_n}$$

其中每一个 X_i 都是定义在 $x = \phi(p)$ 的开邻域上的光滑函数。通常将向量场写成列向量形式

$$X(x) = \begin{bmatrix} X_1(x) \\ \vdots \\ X_n(x) \end{bmatrix}$$

向量场表示流形上的微分方程。设 $c: (a, b) \rightarrow M$ 为流形上的一条曲线, 如果

$$\dot{c}(t) = X(c(t))$$

则认为曲线 c 是向量场的积分曲线。由常微分方程的存在性和唯一性可知, 对于给定的非零向量场, 其积分曲线的存在性可以局部得到保证。如果积分曲线的定义域可取为 $(-\infty, \infty)$, 则认为向量场是完备的。此时, 向量场的积分曲线定义了一个单参数微分同胚族 $\Phi_t(q): M \rightarrow M$, 其中 $\Phi_t(q)$ 可理解为起始于初始条件 $t=0$ 时 q 点的积分曲线上的点。该单参数微分同胚族称为向量场 X 的流。

设 X 为一光滑向量场, $f \in C^\infty(M)$ 为 M 上的光滑函数。 f 关于 X 的李导数 (Lie derivative) 是一个新的函数 $Xf: M \rightarrow \mathfrak{R}$, 定义为

$$Xf(p) = X_p f$$

在坐标图 (ϕ, U) 中, 如果记 $X = \sum_{i=1}^n X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$, 则

$$Xf(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i(x)$$

式中所有偏导数均在 $x = \phi(p)$ 处取值。

设 X 和 Y 为两个光滑向量场, X 和 Y 的李括号 $[X, Y]$ 是一个新的向量场, 定义为

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

不难证明 $[X, Y]$ 满足导数所有性质。以局部坐标表示, 即 $X = \sum_{i=1}^n X_i(q) \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \sum_{i=1}^n Y_i(q) \frac{\partial}{\partial x_i}$, 则李括号矢量场 $[X, Y]$ 为

$$[X, Y] = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_j} X_i - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} Y_i \right) \right] \frac{\partial}{\partial x_j}$$

设 $F: M \rightarrow N$ 为流形与光滑矢量场 $X \in \mathfrak{X}(M)$ 、 $Y \in \mathfrak{X}(N)$ 之间的光滑映射, 如果满足

$$Y_{F(p)} = F_* X_p$$

则认为 X 和 Y 是 F -相关的。如果 F 是一个微分同胚, 那么对于给定的矢量场 $X \in \mathfrak{X}(M)$, 可以通过推前映射 (push forward map) $F_*: TM \rightarrow TN$ 定义一个新的矢量场 $Y \in \mathfrak{X}(N)$, 即

$$(F_* X)_q = F_* F^{-1}(q) X_{F^{-1}(q)}$$

同样, 如果 $F: M \rightarrow N$ 是一个微分同胚, Y 是 N 上的一个矢量场, 将 M 上的新矢量场定义为

$$(F^* Y)_p = (F_*^{-1})^{-1} Y_{F(p)}$$

映射 $F^*: TN \rightarrow TM$ 称为 F 的拉回映射 (pull back map)。拉回与推前的关系通过式 $F^* = (F^{-1})_*$ 建立。

定理 A.1 设 X 和 Y 为 M 上的光滑矢量场, $F: M \rightarrow N$ 为光滑映射, 则

$$F_* [X, Y] = [F_* X, F_* Y]$$

矢量空间 V ($\mathfrak{A}$ 上) 是一李代数 (Lie algebra) 如果存在一个双线性算子 $V \times V \rightarrow V$, 记为 $[\cdot, \cdot]$, 它满足

1. 反对称性: 对于所有的 $v, w \in V$, 有 $[v, w] = -[w, v]$ 。
2. 雅可比恒等式: 对于所有的 $v, w, z \in V$, 有 $[[v, w], z] + [[z, v], w] + [[w, z], v] = 0$ 。

如果对于所有的 $v, w \in V$, 有 $[v, w] \in W$, 则子空间 $W \subset V$ 称为李子代数 (Lie subalgebra)。

1.5 微分形式

流形 M 上的光滑微分 1-形式 (differential one-form) 是一个满足 $\pi \circ \alpha = id$ 的光滑映射 $\alpha: M \rightarrow T^*M$, 其中 $\pi: T^*M \rightarrow M$ 为正则投影 (canonical projection), $id: M \rightarrow M$ 为单位映射。以局部坐标表示的微分形式可写为

$$\alpha(x) = \alpha_1(x) dx_1 + \cdots + \alpha_n(x) dx_n$$

式中每一个 α_i 都是 M 上的光滑函数。

设 $F: M \rightarrow N$ 为流形与 N 上光滑微分 1-形式 $\beta: N \rightarrow T^*N$ 之间的光滑映射, 通过下式定义一个新的 1-形式 $\alpha: M \rightarrow T^*M$

$$\langle \alpha_p, Y_p \rangle = \langle \beta_{F(p)}, F_* X_p \rangle$$

称 α 为由 F 产生的 β 的拉回, 并记为 $\alpha = F^* \beta$ 。注意 1-形式的拉回是针对任意光滑映射 F

$:M \rightarrow N$ 定义的, 而不是微分同胚。

2 李群

本节介绍用于机器人运动学与控制的李群的一些基本概念。详细内容可参阅 Spivak^[109]。Park 和 Murray^[89]给出了 $SO(3)$ 和 $SE(3)$ 的主要公式。

2.1 定义和实例

李群既是一个群 G , 又是一个光滑流形, 并且其群运算 $(g, h) \mapsto gh$ 和 $g \mapsto g^{-1}$ 是光滑映射。因对于所有的 $g, h \in G$, 有 $gh = hg$, 所以李群是可交换群 (abelian)。用符号 e 表示群中的单位元素。

对于任一 $g \in G$, 定义 g 所作成的左平移 (left translation) 为由 $h \in G$ 、 $L_g(h) = gh$ 确定的映射 $L_g: G \rightarrow G$, 同样定义 g 所作成的右平移 (right translation) 为满足 $R_g(h) = hg$ 的映射 $R_g: G \rightarrow G$ 。因 $L_g \circ L_h = L_{gh}$, $R_g \circ R_h = R_{gh}$, 有 $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$, $(R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}$, 因此对于任一 g , L_g 和 R_g 均为 G 的微分同胚。而且左平移和右平移对易: $L_g \circ R_h = R_h \circ L_g$ 。如果群是可交换的, 则有 $L_g = R_g$ 。

例 A.1 加法下的欧氏空间

具有群运算 $(x, y) \mapsto x + y$ 的欧氏空间 $\mathfrak{R}^n$ 是一个可交换李群, $x \in \mathfrak{R}^n$ 的逆记为 $-x$, 单位元素为零矢量。因 $x + y = y + x$, 所以这样的李群是可交换群。

例 A.2 一般线性群 $GL(n, \mathfrak{R})$

所有 $n \times n$ 非奇异实矩阵的群称为一般线性群, 并记为 $GL(n, \mathfrak{R})$ 。作为一个流形, $GL(n, \mathfrak{R})$ 可认为是 $\mathfrak{R}^{n^2}$ 的一个开子集。对于 $A, B \in GL(n, \mathfrak{R})$, 群运算就是矩阵乘运算

$$(A, B) \mapsto A \cdot B$$

其逆由矩阵逆给出。由于矩阵的乘和逆是光滑的, 所以群的这两种运算是光滑的。单位元素就是 $n \times n$ 单位矩阵。左平移和右平移分别定义为左乘和右乘。

例 A.3 特殊正交群 $SO(n)$

特殊正交群是一般线性群的子群, 定义为

$$SO(n) = \{R \in GL(n, \mathfrak{R}) : RR^T = I, \det R = +1\}$$

作为一个流形, $SO(n)$ 的维数为 $n(n-1)/2$ 。对于 $n=3$, 群 $SO(n)$ 也称为 $\mathfrak{R}^3$ 上的旋转群。

例 A.4 特殊欧氏群 $SE(3)$

$\mathfrak{R}^3$ 上的刚体变换群定义为具有形式 $g(x) = Rx + p$ 的映射的集合 $g: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$, 其中 $R \in SO(3)$, $p \in \mathfrak{R}^3$ 。 $SE(3)$ 的任一元素记为 $(p, R) \in SE(3)$ 。 $SE(3)$ 可以用具有如下形式的 4×4 矩阵空间表示。

$$g = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 $R \in SO(3)$, $p \in \mathfrak{R}^3$ 。 $SE(3)$ 是一个维数为 6 的李群。

2.2 李群的李代数

设 X 为 G 上的一个矢量场, 如果 $(L_g)_* X = X$, 即对于所有的 $h \in G$, 有

$$T_h L_g X(h) = X(gh)$$

则 X 为左不变的 (left invariant)。设 $\mathfrak{X}_L(G)$ 为 G 上左不变矢量场的集合, 那么对于 $X, Y \in \mathfrak{X}_L(G)$, 有

$$L_g_* [X, Y] = [L_g_* X, L_g_* Y] = [X, Y]$$

因此 $\mathfrak{X}_L(G)$ 是李代数 $\mathfrak{X}(G)$ 的一个子代数, 并是 G 上所有矢量场的集合。

对于任一 $\xi \in T_e G$, 定义 G 上的一个矢量场 X_ξ 为

$$X_\xi(g) = T_e L_g \xi$$

因

$$\begin{aligned} X_\xi(gh) &= T_e L_{gh} \cdot \xi = T_e (L_g \circ L_h) \cdot \xi \\ &= T_h L_g (T_e L_h \cdot \xi) = T_h L_g (X_\xi(h)) \end{aligned}$$

所以 X_ξ 是左不变的。由 $\rho_1(X) = X(e)$ 给出的线性映射 $\rho_1: \mathfrak{X}_L(G) \rightarrow T_e G$ 和由 $\rho_2(\xi) = X_\xi$ 给出的线性映射 $\rho_2: T_e G \rightarrow \mathfrak{X}_L(G)$ 满足 $\rho_1 \circ \rho_2 = id_{T_e G}$ 和 $\rho_2 \circ \rho_1 = id_{\mathfrak{X}_L(G)}$ 。因此 $\mathfrak{X}_L(G)$ 和 $T_e G$ 是关于矢量空间同构的。定义 $T_e G$ 中的李括号

$$[\xi_1, \xi_2] = [X_{\xi_1}, X_{\xi_2}](e), \quad \xi_1, \xi_2 \in T_e G \quad (\text{A.1})$$

将 $T_e G$ 引入李代数。具有此李代数构造的矢量空间 $T_e G$ 称为 G 的李代数, 记为 $\mathfrak{g}$ 。

$\mathfrak{g}$ 的李子代数是子空间 $\eta \subset \mathfrak{g}$, $\xi, \eta \in \eta$ 是指 $[\xi, \eta] \in \eta$ 。可以证明如果 H 是具有李代数 η 的 G 的一个李子群, 那么 η 是 $\mathfrak{g}$ 的一个李子代数。

例 A.5 $(\mathfrak{R}^n, +)$ 的李代数

对于群 $\mathfrak{R}^n$, 有 $e=0$, $T_0 \mathfrak{R}^n \cong \mathfrak{R}^n$, 并且由 $v \in T_0 \mathfrak{R}^n$ 定义的左不变矢量场是定常矢量场, 即对于所有的 $x \in \mathfrak{R}^n$, 有 $X_v(x) = v$ 。因此 $\mathfrak{R}^n$ 的李代数就是 $\mathfrak{R}^n$ 自身, 对于所有的 $v_1, v_2 \in \mathfrak{R}^n$, 有平凡李括号 $[v_1, v_2] = 0$ 。

例 A.6 $GL(n, \mathfrak{R})$ 的李代数

$GL(n, \mathfrak{R})$ 的李代数是所有 $n \times n$ 实矩阵的集合, 记为 $\mathfrak{gl}(n, \mathfrak{R})$, 其括号构造为

$$[A, B] = AB - BA \quad A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathfrak{R})$$

为推导此式, 注意到 $GL(n, \mathfrak{R})$ 是 $\mathfrak{R}^{n \times n}$ 的一个开子集, 因此 $T_e GL(n, \mathfrak{R}) \cong \mathfrak{R}^{n \times n}$ 。 $GL(n, \mathfrak{R})$ 上的矢量场可写为

$$X(x) = \sum_{i,j} X_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_{ij}}$$

式中 x_{ij} 代表 $\mathfrak{R}^{n \times n}$ 中的一个坐标。由此可以定义 $\mathfrak{R}^{n \times n}$ 上的左不变矢量场 (相对于矩阵左乘), 并可由式 (A.1) 计算李括号。详细计算过程参见 [109, pp.509-511]。

例 A.7 $SO(3)$ 的李代数

$SO(3)$ 的李代数记为 $\mathfrak{so}(3)$, 它可以用具有如下形式的 3×3 反对称矩阵表示

$$\hat{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

其括号构造为

$$[\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2] = \hat{\omega}_1 \hat{\omega}_2 - \hat{\omega}_2 \hat{\omega}_1, \quad \hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2 \in so(3)$$

可以用式 (A.2) 的映射来表示 $\mathfrak{R}^3$ 的 $so(3)$, 即将矢量 $\omega \in \mathfrak{R}^3$ 映射为矩阵 $\hat{\omega} \in so(3)$ 。可以直接证明

$$[\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2] = (\omega_1 \times \omega_2)', \quad \omega_1, \omega_2 \in \mathfrak{R}^3$$

因而 $\omega \mapsto \hat{\omega}$ 是李代数 $(\mathfrak{R}^3, \times)$ 与李代数 $(so(3), [\cdot, \cdot])$ 之间的一个李代数同构。

例 A.8 SE(3) 的李代数

SE(3) 的李代数记为 $se(3)$, 它可以用具有如下形式的 4×4 矩阵表示

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \omega, v \in \mathfrak{R}^3$$

其括号构造为 $[\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2] = \hat{\xi}_1 \hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_2 \hat{\xi}_1$ 。设

$$\hat{\xi}_1 = \begin{bmatrix} \hat{\omega}_1 & v_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\xi}_2 = \begin{bmatrix} \hat{\omega}_2 & v_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

那么

$$[\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2] = \hat{\xi}_1 \hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_2 \hat{\xi}_1 = \begin{bmatrix} (\omega_1 \times \omega_2)' & \omega_1 \times v_2 - \omega_2 \times v_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

矢量空间 $se(3)$ 通过映射 $\hat{\xi} \mapsto \xi = (v, \omega) \in \mathfrak{R}^6$ 与 $\mathfrak{R}^6$ 同构。

2.3 指数映射

对于任意 $\xi \in T_e G$, 设 $\phi_\xi: \mathfrak{R} \rightarrow G$ 表示左不变矢量场 X_ξ 的积分曲线, 它在 $t=0$ 时经过 e , 即 $\phi_\xi(0) = e$, $\frac{d}{dt}\phi_\xi(t) = X_\xi(\phi_\xi(t))$ 。由此得

$$\phi_\xi(s+t) = \phi_\xi(s) \phi_\xi(t)$$

$\phi_\xi(t)$ 是 G 的单参数子群。事实上, 作为 t 的函数, 在 $t=0$ 时上式等号两侧相等, 并均满足由 X_ξ 的左不变确定的微分方程 $\dot{\sigma}(t) = X_\xi(\sigma(t))$, 因此由积分曲线的唯一性知它们是相等的。利用左不变或 $\phi_\xi(t+s) = \phi_\xi(t) \phi_\xi(s)$ 可以证明对于所有的 $t \in \mathfrak{R}$ 存在 $\phi_\xi(t)$ 。

由 $\exp(\xi) = \phi_\xi(1)$ 定义的函数 $\exp: T_e G \rightarrow G$ 称为将李代数 $\mathfrak{g}$ 映射到 G 的指数映射 (exponential map)。指数映射将线 $\xi s \in \mathfrak{g}$, $s \in \mathfrak{R}$ 映射到 G 的单参数子群, 即

$$\exp(\xi s) = \phi_\xi(s)$$

为证明上式, 注意到对于固定的 s , 曲线 $t \mapsto \phi_\xi(ts)$ 在 $t=0$ 时经过 e , 且满足微分方程

$$\frac{d}{dt}\phi_\xi(ts) = sX_\xi(\phi_\xi(ts)) = X_{s\xi}(\phi_{s\xi}(t))$$

因 $\phi_{s\xi}(t)$ 和 $\phi_\xi(ts)$ 满足相同的微分方程, 且在 $t=0$ 时均经过 e , 所以 $\phi_{s\xi}(t) = \phi_\xi(ts)$ 。取 $t=1$ 得 $\exp(\xi s) = \phi_\xi(s)$ 。事实上所有联通的单参数子群均可按此方法获得。

将映射 $\exp(\xi s) = \phi_\xi(s)$ 在 $s=0$ 时对 s 进行微分可以证明 $T_e \exp = id_{T_e G}$ 。因此, 根据逆函数定理, $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ 是从 $\mathfrak{g}$ 中零邻域到 G 中 e 邻域的一个微分同胚。如果 G 是紧的, 那么可以证明指数映射是满射。

例 A.9 $(\mathfrak{R}^n, +)$ 上的指数映射

考虑以加法为群运算的 $\mathfrak{R}^n$ 。 $\mathfrak{R}^n$ 的李代数就是具有平凡括号的 $\mathfrak{R}^n$ ，左不变矢量场 $X_v(x) = v$ 的积分曲线由 $\phi_v(t) = vt$ 给出。因而 $\phi_v(t) \circ x = x + vt$ 和 $\exp: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ 是单位元。

例 A.10 $GL(n, \mathfrak{R})$ 上的指数映射

设 $G = GL(n, \mathfrak{R}) \subset \mathfrak{R}^{n \times n}$ 使得 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathfrak{R}) = \mathfrak{R}^{n \times n}$ ，且 $[A, B] = AB - BA$ 。对于任一 $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathfrak{R})$ ，由

$$\Phi_A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$$

给定的映射 $\Phi_A: \mathfrak{R} \rightarrow GL(n, \mathfrak{R})$ 是一个单参数子群，因为 $\Phi_A(0) = I$ ，且

$$\frac{d}{dt} \Phi_A(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} A^n}{(n-1)!} = \Phi_A(t) A$$

由此证明 Φ_A 是左不变矢量场 X_A 的一个积分曲线。因此指数映射 $\exp: \mathfrak{gl}(n, \mathfrak{R}) \rightarrow GL(n, \mathfrak{R})$ 由

$$\exp(A) = \Phi_A(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

给出。

例 A.11 $SO(3)$ 上的指数映射

设 $G = SO(3)$ 。第二章已证明 $\exp \hat{\omega}$ 对应于绕矢量 $\omega \in \mathfrak{R}^3$ 转过角 $\|\omega\|$ 的一个旋转。Rodrigues 公式给出了其表达式：

$$e^{\hat{\omega}} = I + \frac{\hat{\omega}}{\|\omega\|} \sin \|\omega\| + \frac{\hat{\omega}^2}{\|\omega\|^2} (1 - \cos \|\omega\|) \quad (\text{A.3})$$

例 A.12 $SE(3)$ 上的指数映射

对于 $G = SE(3)$ ，可以用具有如下形式的 4×4 矩阵表示

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \omega, v \in \mathfrak{R}^3$$

其中 $[\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2] = \hat{\xi}_1 \hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_2 \hat{\xi}_1$ 。指数映射为

$$\exp \hat{\xi} = \begin{bmatrix} I & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \omega = 0 \quad \text{和} \quad \exp \hat{\xi} = \begin{bmatrix} e^{\hat{\omega}} & A v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \omega \neq 0$$

其中

$$A = I + \frac{\hat{\omega}}{\|\omega\|^2} (1 - \cos \|\omega\|) + \frac{\hat{\omega}^2}{\|\omega\|^3} (\|\omega\| - \sin \|\omega\|)$$

由 $\exp(\xi) = \phi_{\xi}(1)$ 定义的指数映射 $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ 是从 $\mathfrak{g}$ 中零邻域到 G 中 e 邻域的一个微分同胚。因此，对于 e 的一个小邻域 U ，存在一个函数 $\log: U \rightarrow \mathfrak{g}$ ，使得对于所有的 $g \in U$ ，有 $\exp \circ \log(g) = g$ 。函数 $\log: U \subset G \rightarrow \mathfrak{g}$ 是 $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ 的逆。对于一般线性群，可以获得显式计算。

例 A.13 $GL(n, \mathfrak{R})$ 上的对数映射

设 $G = GL(n, \mathfrak{R})$ ， $A \in G$ ，那么对数函数可用下列矩阵多项式定义

$$\log A = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(A-I)^n}{n}$$

对于所有的 $\|A - I\| < 1$ ，上式收敛。

例 A.14 $SO(3)$ 上的对数映射

设 $G = SO(3)$ ，则对数函数由 $R = \hat{\alpha} = \theta \hat{\omega}$ 给出，其中 $\theta \in \mathfrak{R}$ 和 $\hat{\omega} \in \mathfrak{se}(3)$ 满足

$$2\cos\theta + 1 = \text{trace}(\mathbf{R}) \text{ 和 } \hat{\omega} = \frac{1}{2\sin\theta} (\mathbf{R} - \mathbf{R}^T) \quad \mathbf{R} \neq \mathbf{I}$$

当 $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ 时, $\theta = 2\pi k$ (k 为任意整数) 和 ω 可任意选择。应注意由于 θ 不唯一, 所以 $SO(3)$ 上的对数函数是多值的。

例 A.15 SE(3) 上的对数映射

SE(3) 上的对数函数由下式给出

$$\hat{\xi} = \log \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{P} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

式中 $\hat{\omega} = \log \mathbf{R}$, 且

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} - \frac{1}{2}\hat{\omega} + \frac{2\sin\|\omega\| - \|\omega\|(1 + \cos\|\omega\|)}{2\|\omega\|^2\sin\|\omega\|}\hat{\omega}^2 \quad \omega \neq 0$$

如果 $\omega = 0$, 那么 $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ 。由于 ω 不唯一, 所以 SE(3) 上的对数函数是多值的。

2.4 李群上的正则坐标

因 $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ 是一个局部微分同胚, 所以可用指数映射来定义 G 的局部坐标。设 $\{X_1, \dots, X_n\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一个基, 映射

$$g = \exp(X_1\sigma_1 + \dots + X_n\sigma_n) \quad (\text{A.4})$$

在实数 $\sigma \in \mathbb{R}^n$ 与 $g \in G$ 之间定义了一个接近单位元的局部微分同胚, 因此可认为 σ 是一个坐标映射 $\sigma: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, 其中 $U \subset G$ 是原点的任意小邻域。利用此坐标图和左平移, 可构造李群的整个图册。定义一个关于 $g \in G$ 的坐标图 (U_g, Ψ_g) , 并设

$$U_g = L_g(U) = \{L_g h \mid h \in U\}$$

定义 $\Psi_g = \sigma \circ L_{g^{-1}}: U_g \rightarrow \mathbb{R}^n$, 使得

$$\Psi_g(h) = \sigma(g^{-1}h)$$

不难证明坐标图 $\{(U_g, \Psi_g)\}$ 的集合构成了 G 的一个图册。由式 (A.4) 定义的函数 $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ 称为在单位元附近并相对于基 $\{X_1, \dots, X_n\}$ 的第一类正则坐标。

如果记

$$g = \exp X_1\theta_1 \exp X_2\theta_2 \cdots \exp X_n\theta_n \quad (\text{A.5})$$

那么函数 $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ 称为在单位元附近的第二类正则坐标。第三章研究的指数积公式就是具有此坐标的例子。

2.5 李群的作用

第二章用与 g 与 Ad_g 的矩阵相乘来变换点、矢量、运动旋量和力旋量。所有这些变换可看作是 SE(3) 对适当空间的左作用。本节将定义流形上李群的左作用, 并给出与机器人运动学有关的几个例子。与第二章内容相关的例子见下一节。

设 M 为光滑流形, G 为李群。 G 对 M 的左作用 (left action) 是一个满足下列条件的光滑映射 $\Phi: G \times M \rightarrow M$:

(1) 对于所有的 $x \in M$, 有 $\Phi(e, x) = x$

(2) 对于 $g, h \in G$ 和 $x \in M$, 有 $\Phi(g, \Phi(h, x)) = \Phi(gh, x)$

常用 $\Phi_g(x)$ 表示 $\Phi(g, x)$ 。如果 Φ 是 G 对 M 的一个作用, 并且 $x \in M$, 则 x 的轨道

(orbit) 定义为

$$Orb_x = \{ \Phi_g(x) : g \in G \}$$

例 A.16 $GL(n, \mathfrak{R})$ 对 $\mathfrak{R}^n$ 的作用

$GL(n, \mathfrak{R})$ 通过 $(A, x) \mapsto Ax$ 对 $\mathfrak{R}^n$ 作用。 $x \neq 0$ 的轨道是开集 $\mathfrak{R}^n / \{0\}$ 。

例 A.17 G 对自共轭的作用

由 $I_g(h) = R_g^{-1}L_g(h) = ghg^{-1}$ 给定的映射 $I_g: G \rightarrow G$ 称为共轭映射 (conjugation-map), 或关于 g 的内自同构 (inner automorphism)。由于 $I_e = id$ 和

$$I_g \circ I_h(x) = ghxh^{-1}g^{-1} = I_{gh}(x)$$

所以 I_g 定义了对 G 的一个左作用。此作用的轨道称为相似类 (similarity classes)。

例 A.18 G 对李代数的伴随作用

对共轭映射 I_g 在 e 进行微分, 得 G 对 $\mathfrak{g}$ 的伴随作用 $Ad: G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, 其定义如下

$$Ad_g(\xi) = (T_e I_g)\xi = T_e(R_g^{-1} \circ L_g)\xi$$

如果 G 是 $GL(n, \mathfrak{R})$ 的一个子群, 那么对于 $\xi \in \mathfrak{g}$, 有 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{R}^{n \times n}$ 和 $Ad_g \xi = g\xi g^{-1}$ 。

例 A.19 G 对李代数对偶的上伴随作用

下面定义 G 对 $\mathfrak{g}^*$ (G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的对偶) 的上伴随作用 (coadjoint action)。对于 $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ 和 $\xi \in \mathfrak{g}$, 定义

$$\langle Ad_g^* \alpha, \xi \rangle = \langle \alpha, Ad_g \xi \rangle$$

设 $Ad_g^*: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ 为由此定义的 Ad_g 的对偶, 那么由

$$\Phi^*(g, \alpha) = Ad_g^* \alpha$$

给定的映射 $\Phi^*: G \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ 是 G 对 $\mathfrak{g}^*$ 的上伴随作用。

例 A.20 由 M 到 TM 的 G 的提升作用

设 $\Phi: G \times M \rightarrow M$ 为 G 对 M 的一个作用, 其中 $\Phi_g: M \rightarrow M$ 由 $\Phi_g(x) = \Phi(g, x)$ 定义。可将此作用提升为由

$$\Phi_*(g, x, v_x) = (\Phi_g(x), T_x \Phi_g \cdot v_x)$$

定义的对 TM 的一个作用 $\Phi_*: G \times TM \rightarrow TM$, Φ_* 称为 G 对 TM 的提升作用。

3 欧氏群的几何学

本节研究欧氏群的几何性质, 并讨论其在机器人运动学和控制方面的应用。本节内容基于 Loncaric 的论文^[64]和作者的工作^[60,78,87]。

3.1 基本性质

第二章给出刚体运动理论, 并说明其与齐次矩阵和旋量理论的联系。下面证明刚体运动研究中的各种工具都是一般李群定义的通用工具的特例。

刚体运动学

刚体相对于某个参考位形的位形可用元素 $g = (p, R) \in SE(3)$ 来表示。如果 A 是固定坐标系, B 是与刚体相联的坐标系, 那么可用 $g_{ab} = (p_{ab}, R_{ab}) \in SE(3)$ 来表示 B

相对于 A 的位形。 p_{ab} 表示 B 坐标系原点的位置, R_{ab} 表示其姿态。通过中间坐标系 B , 利用 $SE(3)$ 上的群运算可确定坐标系 C 相对于 A 的位形:

$$g_{ac} = g_{ab} \cdot g_{bc} = (p_{ab} + R_{ab}p_{bc}, R_{ab}R_{bc})$$

如果将 $g \in SE(3)$ 表示为 4×4 齐次矩阵

$$g = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

那么群运算由矩阵乘运算给出, 并可将 $SE(3)$ 看作是一般线性群 $GL(4, \mathbb{R})$ 的子群。

位形 $g_{ab} \in SE(3)$ 也可理解为一个映射, 它将一点相对于 B 坐标系的坐标映射为该点相对于 A 坐标系的坐标。由此定义了 $\mathbb{R}^3$ 上 $SE(3)$ 的一个作用: $\Phi_g(q) = p + Rq$, 以齐次坐标表示此作用, 可得

$$\begin{bmatrix} q_a \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ab} & p_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_b \\ 1 \end{bmatrix}$$

由矩阵乘的结合性可知, 上式实际上定义了 $\mathbb{R}^3$ 上 $SE(3)$ 的一个作用。点的齐次坐标表示中最后一行用 1, 从而 $SE(3)$ 对点的作用可表示为矩阵与矢量之间的乘。

$SE(3)$ 对矢量的作用描述了一点的速度由一坐标系向另一坐标系的映射。若将一点的速度表示为 $T_x\mathbb{R}^3$ 的元素, 那么 $SE(3)$ 对切矢量(速度)的作用就是 $SE(3)$ 对 $M = \mathbb{R}^3$ 的提升作用。 $SE(3)$ 对 $T_x\mathbb{R}^3$ 的提升作用由 $\Phi_{g*}(v_q) = (g(q), Rv_q)$ 给出, 其中 $g(q)$ 表示 g 对点 q 的作用。以齐次坐标表示, 此作用的切空间(速度)部分可写为

$$\begin{bmatrix} v_a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ab} & p_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_b \\ 0 \end{bmatrix}$$

根据定义, 矢量的齐次坐标表示中最后一行为零, 由此可再次使用矩阵与矢量的乘积来表示此作用。

因 $SE(3)$ 是一个李群, 可用指数映射将李代数的元素映射到群。以齐次坐标表示, $SE(3)$ 的李群是一个由下列形式矩阵构成的 $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$ 的李子代数

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\omega} \in \mathfrak{so}(3), v \in \mathbb{R}^3$$

其李括号由矩阵对易算子给出。称李代数 $se(3)$ 的元素为运动旋量(twist)。矢量空间 $se(3)$ 的维数为 6, 并且通过映射 $\hat{\xi} \mapsto \xi = (\omega, v)$ 与 $\mathbb{R}^6$ 同构。

运动旋量可通过旋量理论对其作几何解释。考虑关于方向为 $\omega \in \mathbb{R}^3$ 、经过点 $q \in \mathbb{R}^3$ 的轴作瞬时转动和移动而产生的运动。设 h 表示移动量与转动量之比, 如果 h 为有限值, 那么合成刚体运动就是如下运动旋量 $\hat{\xi} \in se(3)$ 的指数

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & -q \times \omega + h\omega \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由该运动旋量产生的单参数子群 $\phi_{\hat{\xi}}(\theta) = \exp(\hat{\xi}\theta)$ 对应于绕一轴旋转然后沿同一轴平移, 从而运动旋量的指数产生一个旋量运动。

根据指数映射的一般性质, 在单位元附近, $SE(3)$ 的任一元素可表示为某个运动旋量的指数。对于 $SE(3)$, 可以证明指数映射是满射, 从而任一刚体变换均可表示为某个运动旋量的指数。这一特点可看作是 Chasles 定理的改述, Chasles 定理认为任一刚体运动均可通

过一个旋量运动实现。

虽然任一刚体运动均可表示为一个运动旋量的指数,但运动旋量的集合并不能定义 $SE(3)$ 的参数。指数映射并不是单射,因此同一刚体运动可由多个运动旋量产生。纯转动即为一例,可以是绕轴 ω 转过角 θ ,或绕轴 $-\omega$ 转过角 $2\pi - \theta$,两种不同的运动旋量给出相同的运动。

速度和力

如果 $c(t) \in M$ 是流形上的一条曲线,那么该曲线的速度就是 M 的切空间在 $c(t)$ 的元素,即 $\dot{c}(t) \in T_{c(t)}M$ 。如果 M 是一个李群,则切空间 T_gG 与 T_eG 同构。因此通过左平移,可以用相应李代数的单位元表示李群上一条轨迹的瞬时速度。

存在将 $T_gSE(3)$ 映射到 $T_eSE(3)$ 的两种方法,即左平移和右平移。先考虑左平移,由于 $SE(3)$ 可看作是一个矩阵李群(用齐次坐标),所以 $L_h: SE(3) \rightarrow SE(3)$ 的切映射由矩阵乘给出:

$$T_g L_h X_g = h X_g$$

式中 $X_g \in T_gSE(3)$ 。为证明此关系,设 $g(t) \in SE(3)$ 为在时间 $t=0$ 与 X_g 相切的一条曲线,根据切映射的定义,有

$$T_g L_h \dot{g}(0) = \left. \frac{d}{dt} (L_h \circ g(t)) \right|_{t=0} = h \dot{g}(0)$$

设 $h = g^{-1}$, 利用左平移,刚体速度可变换为单位元,并可表示为一个运动旋量

$$\hat{V}^b = g^{-1} \dot{g}$$

此即第二章定义的物体速度 (body velocity)。

如果用右平移将速度 $\dot{g} \in T_gSE(3)$ 映射到切空间,即得空间速度 (spatial velocity):

$$\hat{V}^s = \dot{g} g^{-1}$$

用 R_h 代替 L_h , 可得物体速度表示的上式的导数。

如果考虑运动旋量对点的作用,即可理解“物体”速度和“空间”速度。如图 A.1 所示,设 $q \in \mathcal{R}^3$ 为刚体上的一点, $g_{ab}(t) \in SE(3)$ 表示刚体坐标系 B 相对于固定参考坐标系 A 的轨迹。以齐次坐标表示,点 q 的轨迹作为时间的函数可写为

$$q_a(t) = g_{ab}(t) q_b$$

式中 q_a 和 q_b 为点 q 分别相对于坐标系 A 和 B 的坐标。该点相对于 A 坐标系的速度为

$$v_a(t) = \dot{q}_a(t) = \dot{g}_{ab}(t) q_b \quad (A.6)$$

上式基于点 q 相对于物体坐标系是固定的,从而 q_b 为定值。因此 $\dot{g}_{ab}(t) \in T_gSE(3)$ 可看作是一点的物体坐标与该点的空间速度之间的映射。

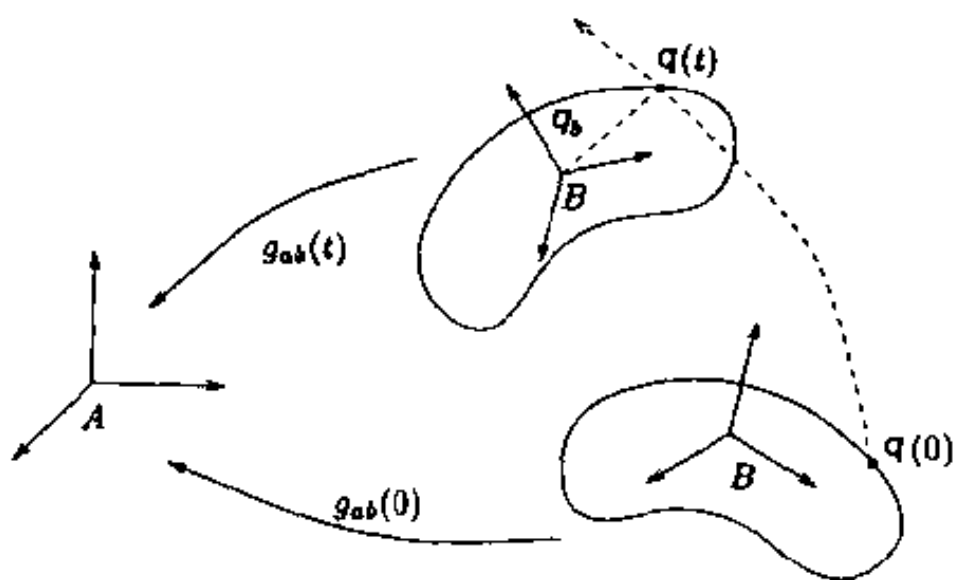


图 A.1 刚体相对于固定坐标系的运动轨迹

表示速度的一种更具吸引力的方法是无需在不同坐标系之间进行变换, 假设需建立一点的坐标与该点的速度之间的关系, 而这两个量是相对于同一坐标系表示的, 将点的坐标或速度坐标向适当的坐标系变换即可。例如, 如果已知点 q 相对于空间坐标系 A 的坐标, 那么 q 相对于 A 的速度为

$$v_a = \dot{g}q_b = (\dot{g}g^{-1}) q_a$$

此即为利用左平移将速度 $\dot{g} \in T_g SE(3)$ 拉回至 $T_e SE(3)$ 所定义的空间速度。与此类似, 可以证明物体速度 $g^{-1}\dot{g}$ 可以看作是一点的物体坐标至该点的物体速度之间的映射。

物体速度和空间速度可理解为分别相对于物体坐标系或空间坐标系的瞬时平移速度和瞬时转动速度, 它们通过 $SE(3)$ 对 $se(3)$ 的伴随作用相联系。若设 $\hat{V}^b$ 为刚体运动 $g(t)$ 的物体速度, 则空间速度为

$$\hat{V}^s = \text{Ad}_g \hat{V}^b$$

此关系可通过直接验算获得, 如第二章。

$SE(3)$ 上的广义力可看作是 $SE(3)$ 上的余矢量 (covector), 即 $T_g^* SE(3)$ 的元素。与速度量类似, 通过左平移或右平移可将余切空间 $T_g^* SE(3)$ 映射到李代数的对偶, 所得结果称为力旋量 (wrench)。左平移对应于力在物体坐标系中的表示, 而右平移对应于力在空间坐标系中的表示。力旋量对运动旋量的自然作用给出了力旋量沿运动旋量产生的微运动所作之瞬时功。

如果用 $\mathfrak{R}^6$ 表示 $se(3)^*$, 那么力旋量可写为

$$F = \begin{bmatrix} f \\ \tau \end{bmatrix}$$

式中 f 为力的平移分量, τ 为转动分量。力旋量对运动旋量的自然作用为 $F \in \mathfrak{R}^6$ 和 $V \in \mathfrak{R}^6$ 的内积。需注意, 此作用是余矢量对矢量的自然作用, 并且与 $\mathfrak{R}^6 \cong se(3)$ 上任一内积结构无关。

虽然力旋量与运动旋量对偶, 但它们的表示略有差异。通常将 $SE(3)$ 上的力旋量表示为 $\mathfrak{R}^6$ 中的矢量, 因为力旋量的矩阵表示用处不大。在表示力旋量时, 用一个角标表示所度量的坐标系。因此, 如果 A 为惯性参考坐标系, B 为固联于刚体上的坐标系, 那么施加于刚体上的力旋量的空间表示记为 F_a , 力旋量的物体表示记为 F_b 。在取力旋量对运动旋量的作用时, 必须始终确保运动旋量和力旋量是相对于同一坐标系表示的。因此由运动旋量 V 和力旋量 F 所产生的瞬时功可写为 $V_{ab}^s \cdot F_a$ 或 $V_{ab}^b \cdot F_b$ 。

变换规则

设 $V_{ab}^s \in \mathfrak{R}^6$ 为坐标系 C 相对于惯性坐标系 B 的空间速度, 并假设需要确定相对于另一惯性坐标系 A 的空间速度。利用空间速度的定义, 有

$$\begin{aligned} \hat{V}_{ac}^s &= \dot{g}_{ac} g_{ac}^{-1} = g_{ab} \dot{g}_{bc} g_{bc}^{-1} g_{ab}^{-1} = \\ &g_{ab} \hat{V}_{bc}^s g_{ab}^{-1} = \text{Ad}_{g_{ab}} \hat{V}_{bc}^s \end{aligned}$$

因此刚体的速度可根据 $SE(3)$ 对 $se(3)$ 伴随作用进行交换。如果将速度表示为 $\mathfrak{R}^6$ 中的矢量, 那么有 $V_{ac}^s = \text{Ad}_{g_{ab}} V_{bc}^s$, 其中 $\text{Ad}_g: \mathfrak{R}^6 \rightarrow \mathfrak{R}^6$ 为矩阵

$$\text{Ad}_g = \begin{bmatrix} R & \hat{p}R \\ 0 & R \end{bmatrix}$$

注意这里用符号 Ad_g 表示 $se(3) \subset \mathfrak{R}^{4 \times 4}$ 和 $\mathfrak{R}^6$ 上的伴随映射, 它与 $se(3)$ 是同构的。

假设要改变物体坐标系。设 g_{ab} 表示坐标系 B 相对于 A 的位形, g_{bc} 表示与新的物体坐标系相对应的固定变换。 C 相对于 A 的空间速度为

$$\hat{V}_{ac}^s = \dot{g}_{ac} g_{ac}^{-1} = \dot{g}_{ab} g_{bc} g_{bc}^{-1} g_{ab}^{-1} = \hat{V}_{ab}^s$$

因此物体坐标系的改变并不影响物体的空间速度。

对于物体速度可以建立类似的关系, 空间坐标系的改变并不影响刚体的物体速度。然而, 若设 g_{ab} 为刚体相对于坐标系 A 的运动, g_{bc} 为新选的一个物体坐标系, 那么

$$\hat{V}_{ac}^b = \text{Ad}_{g_{bc}}^{-1} \hat{V}_{ab}^b$$

因此 $SE(3)$ 对 $se(3)$ 的伴随作用反映了物体坐标系的改变对物体速度的影响。

上述变换均假设新、旧物体坐标系或空间坐标系具有固定的相对位形。如果已知两个刚体运动 $g_{ab}(t)$ 和 $g_{bc}(t)$, 那么为计算坐标系 C 相对于 A 的速度, 必须加上两坐标系之间的相对速度, 而且所加的量必须是相对于同一坐标系表示的。因此可用伴随映射对速度进行适当变换。例如, 坐标系 A 和 C 之间的空间速度为

$$V_{ac}^s = V_{ab}^s + \text{Ad}_{g_{ab}} V_{bc}^s$$

上式第二项中的伴随映射将相对于坐标系 B 的瞬时速度 V_{bc}^s 变换为相对于坐标系 A 的瞬时速度。

伴随作用也可用于对力旋量进行变换。设 $F_a \in \mathfrak{R}^6 \cong se(3)^*$ 为相对于固定坐标系 A 的力旋量, 则此力旋量相对于一新的固定坐标系 B 的坐标为

$$F_b = \text{Ad}_{g_{ab}}^T F_a$$

式中 g_{ab} 为坐标系 B 相对于 A 的位形。此关系也可根据上一节上伴随作用的定义直接获得。

3.2 $SE(3)$ 的度量性质

因 $SE(3)$ 的李代数可用 $\mathfrak{R}^6$ 表示, 所以根据 $\mathfrak{R}^6$ 上的内积, 可得 $se(3)$ 上的内积结构。但当坐标系改变时, 此内积是变化的, 因而会引起误解。例如, 已知两个运动旋量 $\xi_1 \in \mathfrak{R}^6$ 和 $\xi_2 \in \mathfrak{R}^6$ 满足 $\xi_1 \cdot \xi_2 = 0$, 假如变换运动旋量所描述的坐标系, 那么运动旋量变换为 $\xi'_i = \text{Ad}_g \xi_i$, 其中 $g \in SE(3)$ 表示坐标系的改变。两运动旋量在新坐标系中的内积为

$$\xi'_1 \cdot \xi'_2 = \xi_1^T \begin{bmatrix} R^T & 0 \\ -R^T \hat{p} & R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & \hat{p}R \\ 0 & R \end{bmatrix} \xi_2 = \xi_1^T \begin{bmatrix} I & R^T \hat{p}R \\ -R^T \hat{p}R & I - R^T \hat{p}^2 R \end{bmatrix} \xi_2$$

如果 $p \neq 0$, 那么点积关系不能得到保证, 从而相对于某一坐标系正交的两个运动旋量, 在相对于另一坐标系时可能是不正交的。

由于不存在坐标系的独立性, 从而在将 $\mathfrak{R}^6$ 上的内积用作为 $se(3)$ 中内积时会导致一些错误。本节证明在改变坐标系时, 不存在 $se(3)$ 上不变的内积结构, 并讨论其含义。

$\mathfrak{R}^n$ 上的不变度量

首先考虑欧氏空间 $\mathfrak{R}^n$, $\mathfrak{R}^n$ 上的度量 (metric) Ψ 是一双线性函数 $\Psi: \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, 它满足

1. Ψ 是对称的; 对于所有的 $v, w \in \mathfrak{R}^n$, 有 $\Psi(v, w) = \Psi(w, v)$ 。
2. Ψ 是正定的; $\Psi(v, v) \geq 0$ 和 $\Psi(v, v) = 0$ 当且仅当 $v = 0$ 。

设 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 为 $\mathfrak{R}^n$ 的正交基 (注意这样的基定义了一个 $\mathfrak{R}^n$ 中的笛卡尔坐标系), Ψ 相对于该基的矩阵表示为

$$\Psi_{ij} = \Psi(e_i, e_j), \quad i, j = 1, \dots, n$$

从现在起, 用 Ψ 同时表示映射及其矩阵表示, 因而 $\Psi(v, w) = v^T \Psi w$ 。

由于度量是正定的, 度量的矩阵表示总是可逆的。偶尔会对具有可逆矩阵表示、但不是正定的对称双线性映射感兴趣。如果对于所有的 $w \in \mathfrak{R}^n$, 有 $\Psi(v, w) = 0$, 也即 $v = 0$, 则双线性函数 $\Psi: \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ 是非退化的 (nondegenerate)。将对称非退化、但不必是正定的双线性映射称为伪度量 (pseudo-metric)。

设 v_a 为一个矢量在坐标系 A 中的表示, v_b 为该矢量在坐标系 B 中的表示, 它们之间的关系可通过 $SE(3)$ 对 $\mathfrak{R}^n$ 的提升作用建立, 即

$$v_a = R_{ab} v_b \quad (\text{A.7})$$

式中 $g_{ab} = (p_{ab}, R_{ab}) \in SE(n)$ 为 B 相对于 A 的位置和姿态。对于一个度量, 如果

$$\Psi(Rv_1, Rv_2) = \Psi(v_1, v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in \mathfrak{R}^n, R \in SO(n) \quad (\text{A.8})$$

则称其为对于坐标系的改变是不变的 (invariant)。由式 (A.8) 得对 Ψ 的矩阵表示的约束

$$\Psi R = R \Psi \quad \forall R \in SO(n) \quad (\text{A.9})$$

引理 A.2 设 $\Psi \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ 为对于 $R \in SO(n)$ 满足式 (A.9) 的对称矩阵 (即 Ψ 与所有 $n \times n$ 的旋转矩阵对易), 那么对于某个 $\alpha \in \mathfrak{R}$, 有

$$\Psi = \alpha I$$

证明: 设 v 为 Ψ 的一个单位特征矢量, Ψ 的特征值为 λ , 用 v 乘式 (A.9) 的两侧, 有

$$\Psi Rv = R \Psi v = \lambda Rv$$

由此得对于任意的 $R \in SO(n)$, Rv 为 Ψ 的特征矢量, 因此对于任一单位矢量 $w \in \mathfrak{R}^n$, 有 $\Psi w = \lambda w$ 。这种情况只有当 Ψ 为一标量乘以单位矩阵时才存在。

标量 α 与在 $\mathfrak{R}^n$ 上选取的长度比例尺 (length scale) 相对应。对于 $\mathfrak{R}^3$ 情况, 长度比例尺为 $\mathfrak{R}^3$ 中的单位矢量指定了一个物理单位, 如“米”或“英尺”。一旦选定了长度比例尺, 在 $\mathfrak{R}^3$ 上存在唯一的度量, 它对于坐标系的改变是不变的。

定理 A.3 $\mathfrak{R}^n$ 上的不变度量

对于选定的一个长度比例尺, 欧氏空间 $\mathfrak{R}^n$ 存在一个唯一的正定度量, 它对于坐标系的改变是不变的。

SE(3) 上的不变度量

经过上面的讨论, 自然会提出这样一个问题, 即对于坐标系的改变, $SE(3)$ 是否也存在一个不变度量? 如果是, 则可将长度度量与运动旋量联系起来, 从而将 $\mathfrak{R}^3$ 中的速度表示推广到 $se(3)$ 。因 $SE(3)$ 不是一个欧氏空间, 但是一个流形, 因此需通过流形上的度量来定义。

设 M 为一个流形, M 上的二次型 (quadratic form) Ψ 是一个双线性映射 $\Psi_x: T_x M \times T_x M \rightarrow \mathfrak{R}$, 它对于所有的 x 是对称的, 而且关于 x 光滑变化。如果 Ψ 是正定的, 则称 Ψ 为一个度量。如果 Ψ 是非退化的, 但不是正定的, 则称 Ψ 是一个伪度量。设 $F: M \rightarrow M$ 是一个光滑映射, 由 F 对二次型 Ψ 的拉回也是一个二次型, 记为 $F^* \Psi$, 其定义如下

$$F^* \Psi_r(v_x, w_x) = \Psi_{F(x)}(T_x F v_x, T_x F w_x), \quad v_x, w_x \in T_x M$$

如果 $F^* \Psi = \Psi$, 则称 Ψ 是 F -不变的。

为定义李群上的度量, 首先在其单位元处进行定义, 然后通过左平移或右平移将其平移至整个群。由此所得度量自然分别是左不变或右不变的。然而左不变的可能不是右不变的, 反之亦然。既是左不变的又是右不变的度量称为是双不变的 (biinvariant)。设 $I_h: SE(3) \rightarrow SE(3)$ 为共轭映射

$$I_h(g) = hgh^{-1}$$

因 $I_h = R_h^{-1} \circ L_h$, 所以一个度量 Ψ 是双不变的当且仅当对于所有的 $h \in SE(3)$, Ψ 是 I_h -不变的, 即要求双不变度量满足

$$I_h^* \Psi = \Psi, \quad \forall h \in SE(3)$$

对于 $SE(3)$ 上的任意二次型, 都存在与上相同的定义, 即使它不是正定的。

引理 A.4 设 Ψ 为 $SE(3)$ 上的左 (或右) 不变二次型, 则 Ψ 是 I_h -不变的当且仅当它在单位元处是 I_h -不变的, 即对于 $h \in SE(3)$ 和 $\hat{\xi}, \hat{\eta} \in se(3)$, 有

$$\Psi_e(\hat{\xi}, \hat{\eta}) = \Psi_e(Ad_h \hat{\xi}, Ad_h \hat{\eta})$$

证明: 必要性的证明是显然的。为证明充分性, 因 $I_h = R_h^{-1} \circ L_h$, 所以仅需证明 Ψ 是右不变的。为此考察对于所有的 $\hat{\xi}, \hat{\eta} \in se(3)$ 和 $h \in SE(3)$ 均成立的下列方程:

$$\begin{aligned} \Psi_e(\hat{\xi}, \hat{\eta}) &= \Psi_e(T_e I_h \hat{\xi}, T_e I_h \hat{\eta}) = \\ &= \Psi_e(T_e(L_h \circ R_h^{-1}) \hat{\xi}, T_e(L_h \circ R_h^{-1}) \hat{\eta}) = \\ &= \Psi_e(T_{h^{-1}} L_h \circ T_e R_{h^{-1}} \hat{\xi}, T_{h^{-1}} L_h \circ T_e R_{h^{-1}} \hat{\eta}) = \\ &= \Psi_{h^{-1}}(T_e R_{h^{-1}} \hat{\xi}, T_e R_{h^{-1}} \hat{\eta}) \end{aligned}$$

其中第一行的依据是 Ψ 在单位元处是 I_h -不变的, 最后一行来源于 Ψ 是左不变的。由此证明 Ψ 是右不变的, 从而是双不变的。

定理 A.5 $SE(3)$ 上的双不变二次型

设 Ψ 为 $SE(3)$ 上的左不变二次型, 其中用 $\mathfrak{R}^6$ 表示 $se(3)$, 则 Ψ 为双不变的当且仅当 Ψ 在 e 的矩阵表示具有下列形式

$$\Psi_e = \begin{bmatrix} 0 & \beta I \\ \beta I & \gamma I \end{bmatrix}, \quad \beta, \gamma \in \mathfrak{R}$$

证明: 由引理 A.4 知, Ψ 为双不变的当且仅当对于所有的 $\hat{\xi}, \hat{\eta} \in se(3)$ 和 $h \in SE(3)$, 有

$$\Psi_e(T_e I_h \hat{\xi}, T_e I_h \hat{\eta}) = \Psi_e(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \quad (A.10)$$

用 $\mathfrak{R}^6$ 表示 $se(3)$, 并用下列矩阵表示 Ψ_e

$$\Psi_e = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$$

式中 $A, B, C \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$, 且 A, C 是对称的, 由式 (A.10) 得

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} = Ad_h^T \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} Ad_h, \quad \forall h \in SE(3) \quad (A.11)$$

利用 $\mathfrak{R}^6$ 上伴随映射的定义, 有

$$Ad_h = \begin{bmatrix} R & \hat{p}R \\ 0 & R \end{bmatrix}$$

式 (A.11) 变为

$$\begin{aligned} A &= R^T A R \\ B &= R^T A \hat{p} R + R^T B R \\ C &= -R^T \hat{p} A \hat{p} R - R^T \hat{p} B R + R^T B^T \hat{p} R + R^T C R \end{aligned} \quad (A.12)$$

由引理 A.2, 式 (A.12) 中的 A 必有下列形式

$$A = \alpha I, \quad \alpha \in \mathfrak{R}$$

因式 (A.12) 对于所有的 $h \in SE(3)$ 均成立, 在第二和第三式中取 $p=0$, 得

$$B = \beta I \quad C = \gamma I \quad \beta, \gamma \in \mathfrak{R}$$

最后, 将 $B = \beta I$ 和 $C = \gamma I$ 代入 (A.12) 的第三式, 得 $\alpha=0$, 由此定理得证。

在双不变二次型的集合中, 存在下列两种特例。

例 A.21 $SE(3)$ 上的双曲度量: $(\beta=1, \gamma=0)$

具有矩阵表示

$$\left\langle \begin{bmatrix} v_1 \\ \omega_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_2 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \right\rangle_H = (v_1^T \omega_2 + v_2^T \omega_1) \quad (A.13)$$

的二次型称为 $SE(3)$ 上的双曲度量 (hyperbolic metric)。 $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ 矩阵表示的特征值总为 ± 1 , 并且是成对出现的。因此矢量相对于双曲度量具有负“长度”。

$SE(3)$ 上双曲度量的选择取决于 $\mathfrak{R}^6$ 上长度比例尺的选择。这一点由式 (A.13) 即可看出, 长度比例尺的改变将在双曲度量中产生一个线性因子。因此, 通过特定双曲度量的选择, 可固定单位平移矢量与单位旋转矢量的比值。

虽然双曲度量不是正定的, 但却是非退化的, 因此它定义了一个 $SE(3)$ 上的伪度量。事实上, $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ 与第二章定义的对偶积是一致的。双曲度量是 Klein 型的一种特例, 可在任一李群上定义。

例 A.22 $SE(3)$ 上的 Killing 型: $(\beta=0, \gamma=-4)$

具有形式

$$\left\langle \begin{bmatrix} v_1 \\ \omega_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_2 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \right\rangle_K = 4 \omega_1^T \omega_2 \quad (A.14)$$

的二次型称为 $SE(3)$ 上的 Killing 型。它是退化的, 因此既不定义度量, 也不定义伪度量。 $SE(3)$ 上的 Killing 型与长度比例尺的选取无关。

对于一般李群, $SE(3)$ 上的 Killing 型是 Klein 型的一种特例, 其定义为

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_K = \text{trace} (ad_{\xi_1} \cdot ad_{\xi_2})$$

式中 $ad_{\xi}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}: \hat{\eta} \mapsto [\xi, \hat{\eta}]$ 。式 (A.14) 中 -4 因子的选择是为了与一般定义相一致。

上述情况都不是正定二次型。事实上, 对于任何双不变度量, 均有 $\Psi((v, 0), (v, 0)) = 0$, 因此有下列结论。

推论 A.5.1 $SE(3)$ 上不存在双不变度量

$SE(3)$ 上不存在双不变 (正定) 度量。

$SE(3)$ 上不存在双不变度量的事实并不意味着不能定义 $SE(3)$ 上的长度。相反, 它

是指度量的定义不是固有的,它包含一种选择。如果近限于在单位元处定义的度量,并且通过左(或右)平移将其推广到整个群,那么就有下列性质。

定理 A.6 SE(3) 上的左不变度量

SE(3) 上所有左(或右)不变度量的集合可通过参考坐标系原点的选择和长度比例尺的选择来表示。

此定理的证明见文献 [64]。选择参考坐标系原点的原因是由于 SE(3) 上不存在双不变度量。长度比例尺的选择影响到平移运动和旋转运动在度量中如何表示。

下面通过实例讨论上述结论在机器人运动学与控制中的含义。

例 A.23 运动旋量的几何属性

设 $\xi = (v, \omega)$ 为一个运动旋量, 其中 $\omega \neq 0$, 此类运动旋量的指数称为纯旋量运动。利用 Killing 型和双曲度量, 此运动旋量的大小 M_ξ 和节距 h_ξ (见第二章的定义) 可写为

$$M_\xi = -\frac{1}{4} \langle \xi, \xi \rangle_K \quad \text{和} \quad h_\xi = -2 \frac{\langle \xi, \xi \rangle_H}{\langle \xi, \xi \rangle_K}$$

因而, 这两个量是转动分量非零的运动旋量的坐标系无关属性。

由于旋量的节距是平移运动与旋转运动的比值, 所以它取决于长度比例尺的选择。由此长度比例尺的选择为满足双曲度量的要求提供了余地。

例 A.24 SE(3) 上的约束和混合力控制

考虑机器人推一 $\mathbb{R}^3$ 曲面的混合控制问题, 曲面可用一组完整约束表示为

$$f_i(g) = 0 \quad i = 1, \dots, k$$

其中 $f_i: SE(3) \rightarrow \mathbb{R}$ 为光滑函数。将此位置约束对时间微分, 得 $\dot{g} \in T_g SE(3)$ 上的一个约束

$$df_i(g) \dot{g} = \langle df_i(g), \dot{g} \rangle = 0 \quad (\text{A. 15})$$

式中 $df_i(g) \in T_g^* SE(3)$, $\dot{g} \in T_g SE(3)$ 。利用左(或右)平移将此约束变回至单位元

$$\begin{aligned} \langle df_i(g), \dot{g} \rangle &= \langle (df_i(g), (L_g)_* (L_g^{-1})_* \dot{g}) \rangle = \\ &= \langle L_g^* df_i(g), (L_g^{-1})_* \dot{g} \rangle = \\ &= \langle L_g^* df_i(g), \hat{\xi} \rangle = 0 \end{aligned}$$

式中 $\hat{\xi} = g^{-1} \dot{g} \in se(3)$, $L_g^* df_i(g) \in se(3)^*$ 。

$L_g^* df_i(g)$ 是 $se(3)^*$ (李代数的对偶) 的元素, 可将其理解为一个力。由 $L_g^* df_1, \dots, L_g^* df_k$ 张成的 $se(3)^*$ 的子空间称为约束力空间 (space of constraint forces), 被 $L_g^* df_i, i = 1, \dots, m$ 零化的 $se(3)$ 的子空间称为自由运动空间 (space of free motions)。由于作用在自由运动上的任意约束力所作之瞬时功为零, 所以这些子空间相互零化。虽然子空间本身对于坐标系的改变不是不变的, 但这些子空间却总是相互零化, 并独立于描述问题的坐标系的选择。

机器人学文献中常见的错误是将约束方向看作是运动旋量, 从而将约束力对速度的作用定义为 $\mathbb{R}^6$ 上通常的点积, 约束用正交于自由运动空间的运动旋量来表示。但是, 这种描述不是坐标系不变的。如果改变用于描述问题的坐标系, 约束运动旋量空间不再与自由运动空间正交。这是因为 SE(3) 上不存在不变度量, 从而不存在正交的不变表示。

此问题显然是由于用矢量而不是余矢量的约束方向引起的。描述约束的合适方法是将其

作为李代数的对偶的元素, 此时如果移动坐标系, 那么运动旋量 $V \in \mathfrak{se}(3)$ 和力旋量 $F \in \mathfrak{se}(3)^*$ 将根据下式进行交换

$$V' = \text{Ad}_g V \text{ 和 } F' = \text{Ad}_g^T F$$

新力旋量对新运动旋量的作用为

$$F' \cdot V' = (F')^T \text{Ad}_{g^{-1}} \text{Ad}_g V = F \cdot V$$

注意相对于长度比例尺的改变, 力旋量对运动旋量的作用也改变了比例。因此零化运动旋量的力旋量独立于描述长度的单位。

例 A.25 左不变约束

前述例子中描述的约束生成一个相互零化的运动旋量和力旋量的子空间, 这些子空间定义于李代数与其对偶, 但当机器人沿约束曲面运动时它们将可能发生变化, 即拉回至单位元 $L_g^* df(g) \in T_e^* SE(3)$ 的约束 $df(g) \in T_g^* SE(3)$ 可能与 $g \in SE(3)$ 有关。

如果 $L_g^* df(g) = df(e)$, 则约束称为左不变的。换言之, 左不变约束给出了相对于物体固定坐标系作恒定自由运动的方向。左不变约束在应用中经常出现, 例如穿过平面的运动。根据 Loncaric^[64], 下列结论认为所有左(或右)不变约束可用 $SE(3)$ 的子群来表征。

定理 A.7 (Loncaric) 约束 $f(g) = 0$ 是左(或右)不变的当且仅当 $f^{-1}(0)$ 是 $SE(3)$ 的一个子群。

例 A.26 可操作性度量

第三章基于机器人雅可比矩阵的性质, 定义了几个可操作性度量, 其中部分度量依赖于 $\mathfrak{se}(3)$ 上的欧氏度量, 现在知道这些度量对于坐标系的改变不是不变的, 因此在将这些度量应用于机器人设计与控制时应引起注意。

为说明此观点, 在机器人的末端执行器上设置两个工具坐标系 T_1 和 T_2 , 然后写出关节处于 θ 位置时的机器人(物体)雅可比矩阵。设 $J_1(\theta)$ 和 $J_2(\theta)$ 为机器人物体雅可比矩阵分别相对于坐标系 T_1 和 T_2 的表示, 则有

$$J_1(\theta) = \text{Ad}_h J_2(\theta)$$

式中 $h \in SE(3)$ 为 T_2 相对于 T_1 的位置和姿态。因 Ad_h 并不保持欧氏度量, 所以通常有

$$\sigma_{\min}(J_1(\theta)) \neq \sigma_{\min}(J_2(\theta))$$

关节空间中 J_1 最小奇异值的点与 J_2 最小奇异值的点是不同的, 由此说明基于 J 的最小奇异值最大化的机器人设计是病态的, 它依赖于物体坐标系的位置。

对于条件数, 类似的结论也成立。

3.3 $SE(3)$ 上的体积形式

因 $SE(3)$ 上不存在双不变度量, 所以 $SE(3)$ 上一条曲线长度的定义取决于参考坐标系和长度比例尺的选择。通常需知道参考坐标系和长度比例尺的选择对 $SE(3)$ 上体积定义的影响程度, 例如当考虑机器人工作空间($SE(3)$ 的密子集)的大小时这一点即很重要。下面首先对流形上的体积定义作简要回顾。更为完整的描述参见 Boothby^[9]。

设 M 为 n 维流形, M 上的体积形式(volume form) Ω 是一反对称多线性映射

$$\Omega_p: \underbrace{T_p M \times \cdots \times T_p M}_n \rightarrow \mathfrak{R}$$

对于所有的 $p \in M$, 有 $\Omega_p \neq 0$ 。体积形式定义了由 n 个切矢量形成的一个平行管的体积。

将体积形式沿整个流形（局部坐标）积分，即可定义流形（或流形的子集）的体积。如果 $M = \mathbb{R}^n$ ，那么与积分对应的标准体积形式由行列式函数给出，即

$$\Omega(V_1, \dots, V_n) = \det[V_1 \cdots V_n] \quad V_i \in \mathbb{R}^n$$

设 $F: M \rightarrow M$ 为 M 到 M 的光滑映射， F 对 Ω 的拉回是一个体积形式 $F^*\Omega$ ，其定义为

$$F^*\Omega(v_1, \dots, v_n) = \Omega_{F(x)}(T_x F v_1, \dots, T_x F v_n)$$

以局部坐标表示，如果 J 是在 x 处取值的 F 的雅可比矩阵， $\det J$ 是 J 的行列式，那么

$$F^*\Omega = (\det J) \Omega \quad (A.16)$$

因而体积形式的拉回将通常的计算推广为变换公式的改变。对于 $SE(3)$ 上的体积形式，如果 $(L_g)^*\Omega = \Omega$ ，则称其为是左不变的；如果 $(R_g)^*\Omega = \Omega$ ，则称其为是右不变的。既是左不变的又是右不变的体积形式称为是双不变的。

定理 A.8 $SE(3)$ 上的双不变体积形式

设 Ω 为 $SE(3)$ 上的左不变体积形式，则 Ω 也是右不变的，从而是双不变的。证明概要：为证明 $I_h^*\Omega = \Omega$ ，只需证明

$$\Omega(e) = \det(T_e I_h) \Omega(e)$$

即可。然而在单位元处的 I_h 的雅可比矩阵正好就是关于 h 的伴随矩阵， Ad_h 的行列式为

$$\det Ad_h = \det \begin{bmatrix} R & \hat{p}R \\ 0 & R \end{bmatrix} = 1$$

这里 Ω 是双不变的。右不变性可根据双不变性和左不变性获得。

该定理的推论是 $SE(3)$ 支持了一个双不变体积形式，因为可以定义 $se(3) \cong \mathbb{R}^6$ 上的体积元素，然后利用左（或右）平移定义所有 $TSE(3)$ 上的体积形式。作为此体积形式的一种可能选择是用 $so(3)$ （即 $SO(3)$ 的李代数）上的体积形式乘以 $T_p\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$ 上的标准体积形式 $\Omega_{\mathbb{R}^3}$ ，由此证明 $SO(3)$ 上的体积形式可用李括号和 $SO(3)$ 上的 Killing 型进行定义：

$$\Omega_{SO(3)}(\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2, \hat{\omega}_3) = -\frac{1}{4} \langle \hat{\omega}_1, [\hat{\omega}_2, \hat{\omega}_3] \rangle_K = \omega_1 \cdot \omega_2 \times \omega_3$$

如果用 $\mathbb{R}^3$ 表示 $so(3)$ ，则由上式最后一个等号可以看出，它对应于三个量的积，事实上它等价于用 $\mathbb{R}^3$ 上的标准体积定义的体积形式。有此定义， $SO(3)$ 具有体积 $8\pi^3 \text{rad}^3$ 。

由 $\mathbb{R}^3$ 上的体积和 $SO(3)$ 上的体积组合定义的体积形式，即 $\Omega_{SE(3)} = \Omega_{\mathbb{R}^3} \times \Omega_{SO(3)}$ ，显然依赖于长度比例尺的选择。它大体描述了平移体积和转动体积之间的折中情况。然而，一旦长度比例尺固定，体积形式将与坐标系的选择无关。同时，由于长度比例尺的改变将导致相应的体积变化，所以说体积的大小与这种选择无关。

例 A.27 良态可操作性度量

第三章介绍了用 $J(\theta)$ 的行列式作为一种可操作性度量。根据 $\mathbb{R}^6 \cong se(3)$ 上的标准体积定义的 $SE(3)$ 上的体积可用作可操作性度量。利用例 A.26 的定义，此度量的坐标系无关性可由下式看出

$$\det(J_1(\theta)) = \det(Ad_h J_2(\theta)) = \det Ad_h \det J_2(\theta) = \det J_2(\theta)$$

例 A.28 最优机器人设计^[86,87]

考虑具有六个转动关节的机器人（通常称为 6R 机器人）。设

$$g(\theta) = e^{\hat{e}_1 \theta_1} \cdots e^{\hat{e}_6 \theta_6} g(0)$$

为机器人相对于某个参考位形的运动学正解映射, l_{ξ_i} 为第 i 关节的运动旋量轴。设 C_{ξ} 表示联接机器人各关节轴的所有曲线的集合, 因而 $c \in C_{\xi}$ 是一条联接各 ξ_i 轴的曲线, 不失一般性, 可表示为 $c(i) \cap l_{\xi_i} \neq 0$ 。换言之, $c: [1, 6] \rightarrow \mathcal{R}^3$ 和 $c(i)$ 是第 i 关节运动旋量轴上的一点。线段 $c_{[i, i+1]}$, $i=1, \dots, 5$ 称为机器人的连杆, c_t 表示 c 在 t 时的取值。将机器人的长度定义为

$$L_M := \min_{c \in C_{\xi}} \sum_{i=2}^6 \|c_i - c_{i-1}\|$$

L_M 与参考位形的选择无关, 其证明留作习题。

机器人的工作体积 V_M 由下列体积积分给出

$$V_M = \int_{g(Q)} \Omega$$

式中 $Q = S^1 \times \dots \times S^1 = T^6$ 为机器人关节空间, g 为运动学正解映射, Ω 为 $SE(3)$ 上的双不变体积形式。若采用体积形式 $\Omega_{SE(3)} = \Omega_{\mathcal{R}^3} \times \Omega_{SO(3)}$, 则用机器人长度 L_M 表示的机器人工作体积为

$$V_M \leq \frac{4}{3} \pi (L_M)^3 \times 8\pi^3$$

对于具有六个转动关节的机器人, 当其运动至边界时即有最大的工作体积。此边界与基础坐标系和工具坐标系的选择无关, 但却依赖于长度比例尺的选择。然而, 如前所述, 比例尺的选择并不影响体积间的比较, 因此可用这种体积选择来定义一个最优机器人。

对于 6R 机器人, 完全可以描述具有最大工作体积的此类机器人。将由一个肩、一个肘和一个腕组成、并按图 A.2 排列成一条直线的机器人定义为肘机器人, 肘机器人的腕关节和肩关节由相互正交并汇交于一点的轴线组成。肘机器人的倒置机器人是将肘机器人的腕关节和肩关节对调后的机器人 (从而腕位于机器人的基础上)。

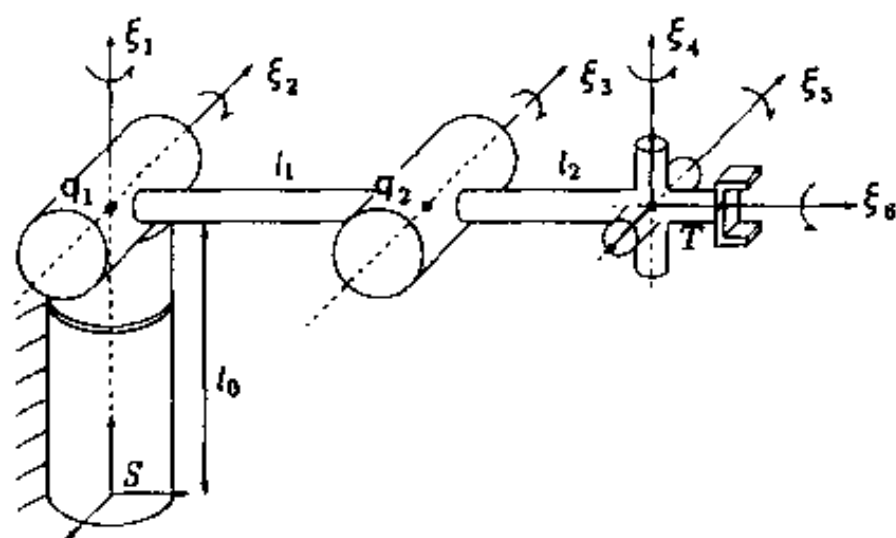


图 A.2 肘机器人

定理 A.9 最优机器人设计

对于具有给定长度 L_M 的 6R 机器人, 当且仅当它是肘机器人或肘机器人的倒置机器人、肘部位于肩和腕的中间位置时, 它具有最大的工作体积。

此结论的详细讨论和证明参见 Paden 和 Sastry^[86,87]。腕部位于机器人的一端可以保证在任意位置下获得所有的姿态, 肘位于肩和腕的中点可以保证在工作空间的中心不存在孔穴。

附录 B 旋量计算软件包

本附录简要介绍软件包 Screws.m, 该软件包便于在机器人运动学分析中采用旋量、运动旋量和力旋量。Screws 软件包提供了第二章涉及的所有计算功能, 而且当与辅助软件包 RobotLinks.m 组合使用时, 可以对开链机器人运动学进行符号和数值计算, 此外还有一些其它功能。软件包程序可参见文献 [121]。

通过匿名 ftp 方式可以从网址 avalon.caltech.edu 获取 Screws 软件包, 并且可免费使用。文件和安装说明见软件包的源代码。Screws 软件包由加州工学院的 R. Murray 和 S. Sur 编写, 有关软件事项的联络可通过电子邮件发至 murray@avalon.caltech.edu, 但作者不负责对 Screws 软件包的修改和维护。目前源代码仅能通过匿名 ftp 方式获得。

本附录简要介绍 Screws 软件包所具有的函数和相应的语句。本附录可作为以其它符号和数值计算编程语言编写的旋量计算软件包的补充。

旋量计算软件包的使用

Screws 软件包遵循三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中的旋量理论, 以齐次坐标来表示点、矢量和刚体运动, 以便统一于其它的数学软件。

Screws 软件包由两类函数组成, 第一类函数用于旋转矩阵的计算, 并提供第二章第 2 节涉及的所有数学计算功能。下列函数用于 $SO(3)$ 中的计算:

●AxisToSkew [w]

由给定的一个矢量 $w \in \mathbb{R}^3$ 生成一个反对称矩阵。

●RotationAxis [R]

计算矩阵 $R \in SO(3)$ 的旋转轴线。

●SkewExp [S, theta]

计算反对称矩阵的指数。如果 theta 未给定, 则默认为 1。如果 SkewExp 的第一个自变量是一个矢量, 则 SkewExp 首先将其转换为一个反对称矩阵, 然后再取其指数。

●SkewToAxis [S]

由给定的一个反对称矩阵生成一个矢量。

特定的输入错误检查可确保函数的自变量具有正确的形式。

第二类函数提供了 $SE(3)$ 上的计算。刚体变换可用 4×4 矩阵表示。这些函数可用于对以齐次坐标表示的点和矢量进行变换, 以及将一个平移和旋转对转换为一个 4×4 矩阵。下列函数用于 $SE(3)$ 中的计算:

●HomogeneousToTwist [xi]

将 xi 由一个 4×4 矩阵转换为一个 6 维矢量。

●PointToHomogeneous [q]

生成点 $q \in \mathbb{R}^3$ 的齐次坐标表示。

●RigidAdjoint [g]

生成与 g 对应的伴随矩阵。

●RigidOrientation [g]

由齐次矩阵 g 获取旋转矩阵 R 。

●RigidPosition [g]

由齐次矩阵 g 获取位置矢量 p 。

●RigidTwist [g]

计算生成齐次矩阵 g 的运动旋量 $xi \in \mathcal{R}^6$ 。

●RPToHomogeneous [R, p]

由旋转矩阵 R 和平移 p 构成 4×4 齐次矩阵。

●ScrewToTwist [h, q, w]

将节距为 h 、经过点 q 并沿方向 w 的旋量返回为运动旋量坐标。如果 $h = \infty$ ，则生成纯平移运动旋量。此时 q 可忽略，而 w 给出了平移的方向。

●TwistAxis [xi]

计算与运动旋量对应的旋量轴，该轴可用参数对 $\{q, w\}$ 表示，其中 q 为轴上一点， w 为表示轴线方向的单位矢量。运动旋量 xi 规定为或是一个 6 维矢量，或是一个 4×4 矩阵。

●TwistExp [xi, theta]

计算运动旋量 xi 的矩阵指数。如果 $theta$ 值出错，则默认为 1。如果 TwistExp 的第一个自变量是一个 6 维矢量，则自动将其转换为一个 4×4 矩阵。

●TwistPitch [xi]

计算运动旋量的节距。

●TwistMagnitude [xi]

计算运动旋量的大小。

●TwistToHomogeneous [xi]

将 xi 由一个 6 维矢量转换为一个 4×4 矩阵。

●VectorToHomogeneous [q]

生成一个矢量的齐次坐标表示。

特定的输入错误检查可确保函数的自变量具有正确的形式。

机器人运动学

Screws 软件包中定义的函数可用于机器人的运动学分析。本书介绍具体过程，并定义将机器人运动学分析过程联成一体的几个新函数。软件包 RobotLinks.m 包含了这些函数，而 Screws 软件包已装有 RobotLinks.m。

机器人运动学正解可写为运动旋量的指数积。下列函数专门用于构成机器人运动旋量：

●RevoluteTwist [q, w]

构成与转动关节（经过点 q 并沿方向 w ）对应的单位运动旋量。

●PrismaticTwist [q, w]

构成与移动关节（经过点 q 并沿方向 w ）对应的单位运动旋量。

上述函数使用 Screws.m 中定义的 ScrewToTwist 函数。

一旦确定运动旋量后, 即可利用由 `TwistExp` 和 `RigidAdjoint` 函数组合而成的矩阵相乘, 来计算机器人运动学正解映射和雅可比矩阵。利用下列函数即可自动进行上述计算:

● `ForwardKinematics` [$\{xi1, th1\}, \{xi2, th2\}, \dots, gst0$]

利用指数积公式计算运动学正解映射。其中 $\{xi, th\}$ 为机器人各关节的关节运动旋量和关节转角 (或位移)。

● `SpatialJacobian` [$\{xi1, th1\}, \{xi2, th2\}, \dots, gst0$]

计算机人的空间雅可比矩阵。其中 $\{xi, th\}$ 由 `ForwardKinematics` 函数给出。

下面以 SCARA 机器人的运动学计算为例, 说明 `Screws` 和 `RobotLinks` 软件包的应用。所用符号与第二章介绍的 SCARA 机器人实例相同。

```
<<Screws.m          ( *      Screws      package      * )
<<RobotLinks.m      ( *      additional  functions      * )
( *  Twist axes for SCARA robot, starting from the base  * )
xi1=RevoluteTwist [ {0, 0, 0}, {0, 0, 1}];          ( *      base      * )
xi2=RevoluteTwist [ {0, l1, 0}, {0, 0, 1}];          ( *      elbow      * )
xi3=RevoluteTwist [ {0, l1+l2, 0}, {0, 0, 1}];          ( *      wrist      * )
xi4=PrismaticTwist [ {0, 0, 0}, {0, 0, 1}];
( *  Location of the tool frame at reference configuration  * )
gst0=RPToHomogeneous [IdentityMatrix [3], {0, l1+l2, 0}];
( *  Forward kinematics map  * )
gst=Simplify [
    ForwardKinematics [
        {xi1, th1}, {xi2, th2}, {xi3, th3}, {xi4, th4}, gst0
    ]
];
( *  Spatial manipulator Jacobian  * )
Js=Simplify [
    SpatialJacobian [ {xi1, th1}, {xi2, th2}, {xi3, th3}, {xi4, th4}, gst0]
];
```

索 引

一画

一次型 (unary)
一致稳定性 (uniform stability)
1-形式 (one-form)

二画

力旋量 (wrench)
力封闭抓取 (force-closure grasp)
几何状态法 (method of geometric phase)
二次型 (quadratic form)

三画

工作空间 (workspace)
广义坐标 (generalized coordinates)
广义力 (generalized forces)
广义惯性矩阵 (generalized inertia matrix)
广义物体 (generalized object)
上伴随作用 (coadjoint action)

四画

双射 (bijective)
内部运动 (internal motions)
冗余度机器人 (redundant manipulator)
内力 (internal force)
牛顿定律 (Newton's law)
牛顿-欧拉方程 (Newton-Euler equation)
计算力矩控制规则 (computed torque control law)
无摩擦点接触 (frictionless point contact)
分离超平面 (separating hyperplane)
支撑超平面 (supporting hyperplane)
无弹性腱 (inelastic tendons)
无动力输入的被动物体 (inanimate object)

分布 (distribution)
无漂移的 (drift-free)
开关式控制 (bang-bang control)
分段定常输入 (piecewise constant inputs)
内自同构 (inner automorphism)
不变的 (invariant)
长度比例尺 (length scale)
双不变的 (bi-invariant)
双曲度量 (hyperbolic metric)

五画

正则坐标 (canonical coordinates)
四元数 (quaternion)
节距 (pitch)
对偶 (reciprocal)
对偶积 (reciprocal product)
对偶旋量系 (reciprocal screw system)
可达工作空间 (reachable workspace)
可操作性 (manipulability)
平衡点 (equilibrium point)
可操作抓取 (manipulable grasp)
正线性组合 (positive linear combinations)
正相关 (positive dependent)
凸集 (convex set)
凸包 (convex hull)
对心抓取 (antipodal grasp)
正则曲面 (regular surface)
正交坐标图 (orthogonal coordinate chart)
可抓住的 (prehensile)
代数环 (algebraic loop)
可达集合 (reachable set)
矢量场 (vector field)
矢量场的流 (flow of a vector field)
对易的 (commute)

对易算子 (commutator)
 对合的 (involutive)
 对合封闭 (involutive closure)
 叶丛 (foliation)
 正合的 (exact)
 可控性秩条件 (controllability rank condition)
 外微分系统 (exterior differential system)
 切换次数 (switching times)
 正则指数 (formal exponential)
 切空间 (tangent space)
 切矢量 (tangent vectors)
 切映射 (tangent map)
 切丛 (tangent bundle)
 正则投影 (canonical projection)
 左平移 (left translation)
 右平移 (right translation)
 左不变的 (left invariant)
 左作用 (left action)

六画

刚体 (rigid body)
 刚体运动 (rigid motion)
 刚体位移 (rigid displacement)
 自由矢量 (free vector)
 刚体变换 (rigid body transformation)
 合成法则 (composition rule)
 齐次坐标 (homogeneous coordinates)
 仿射变换 (affine transformation)
 关节空间 (joint space)
 机器人空间雅可比矩阵 (spatial manipulator Jacobian)
 机器人物体雅可比矩阵 (body manipulator Jacobian)
 自运动流形 (self-motion manifold)
 并联机器人 (parallel manipulator)
 闭链机器人 (closed-chain manipulator)
 回路方程 (loop equation)
 许可速度 (admissible velocities)

各向同性点 (isotropic points)
 全局稳定性 (global stability)
 收敛速度 (rate of convergence)
 全局指数稳定 (globally exponentially stable)
 反馈分量 (feedback component)
 阶跃响应 (step response)
 有摩擦点接触 (point contact with friction)
 异常曲面 (exceptional surface)
 同胚 (homeomorphism)
 曲率张量 (curvature tensor)
 有势力 (potential force)
 传感和驱动皮层 (sensory and motor cortex)
 过滤 (filtration)
 多链系统 (multi-chained form system)
 光滑图册 (smooth atlas)
 光滑流形 (smooth manifold)
 同构 (isomorphism)
 轨道 (orbit)
 共轭映射 (conjugation map)
 伪度量 (pseudo-metric)
 约束力空间 (space of constraint forces)
 自由运动空间 (space of free motions)

七画

远程操作手 (teleoperator)
 运动旋量 (twist)
 极化恒等式 (polarization identity)
 位形 (configuration)
 位形空间 (configuration space)
 运动旋量坐标 (twist coordinates)
 伴随变换 (adjoint transformation)
 坐标系无关性 (frame invariance)
 低副 (lower pairs)
 运动学正解 (forward kinematics)
 灵活工作空间 (dextrous workspace)
 运动学逆解 (inverse kinematics)
 运动冗余的 (kinematically redundant)
 运动奇异的 (kinematically singular)
 驱动奇异性 (actuator singularity)

连杆 (coupler)
 完整约束 (holonomic constraint)
 李括号 (Lie bracket)
 局部稳定 (locally stable)
 局部渐进稳定 (locally asymptotically stable)
 库仑摩擦模型 (Coulomb friction model)
 抓取映射 (grasp map)
 严格内力 (strictly internal force)
 局部坐标图 (local coordinate chart)
 完整约束 (holonomic constraint)
 张力 (tension)
 进动角 (heading angle)
 运动冗余度 (kinematic redundancy)
 驱动冗余度 (actuator redundancy)
 驱动器 (actuator)
 位移函数 (extension function)
 良态的 (well-posed)
 完全非完整的 (completely nonholonomic)
 局部微分同胚 (local diffeomorphism)
 李积 (Lie product)
 余矢量 (covector)
 余分布 (codistribution)
 评价函数 (cost function)
 时间最优路径 (time-optimal paths)
 远程现实 (telepresence)
 余切空间 (cotangent space)
 余切矢量 (cotangent vectors)
 余切映射 (cotangent map)
 余切丛 (cotangent bundle)
 李导数 (Lie derivative)
 李代数 (Lie algebra)
 李子代数 (Lie subalgebra)
 体积形式 (volume form)

八画

奇异性 (singularity)
 欧拉角 (Euler angles)
 单射 (injective)
 奇异位形 (singular configuration)

奇异值 (singular values)
 拉格朗日乘子 (Lagrange multipliers)
 欧拉方程 (Euler's equation)
 定常增益矩阵 (constant gain matrices)
 软指接触 (soft-finger contact)
 非平凡的 (non-trivial)
 非完整约束 (nonholonomic constraint)
 非保守力 (nonconservative force)
 拉格朗日-达朗伯方程 (Lagrange-d'Alembert equation)
 非准静态运动 (non-quasistatic motion)
 转动力矩 (driving torque)
 转向力矩 (steering torque)
 非完整度 (degree of nonholonomy)
 单链系统 (one-chain system)
 拉回映射 (pull back map)
 物体速度 (body velocity)
 空间速度 (spatial velocity)
 非退化的 (nondegenerate)

九画

指数坐标 (exponential coordinates)
 指数积公式 (product exponentials formula)
 总工作空间 (complete workspace)
 封闭解 (closed-form solutions)
 结构方程 (structure equation)
 指数稳定平衡点 (exponentially stable equilibrium point)
 前馈分量 (feedforward component)
 结构相关力 (structurally dependent forces)
 度量张量 (metric tensor)
 挠率 (torsion)
 诱导速度 (induced velocity)
 复合控制器 (complex controllers)
 测量噪声 (measurement noise)
 复合机器人 (composite robot)
 待驱动机构 (actuated mechanisms)
 复合控制规则 (complex control laws)
 复合多级控制规则 (complex hierarchical

control laws)
 相对增长矢量 (relative growth vector)
 标准路径 (canonical paths)
 修正的雅可比恒等式 (mod Jacobian identity)
 指数映射 (exponential map)
 相似类 (similarity classes)
 度量 (metric)

十画

透视变换 (perspective transformation)
 特征值 (eigenvalues)
 值域空间 (range space)
 能级集合 (level set)
 能级曲面 (level surface)
 流变约束 (rheonomic constraint)
 病态的 (ill-posed)
 积分漂移 (integrator-windup)
 脑干和小脑 (brainstem and cerebellar)
 脊髓 (spinal cord)
 脊椎反射回路 (spinal reflex loops)
 流形 (manifold)
 积分因子 (integrating factor)
 部分完整的 (partially holonomic)

十一画

旋量运动 (screw motion)
 旋转矩阵 (rotation matrix)
 旋转群 (rotation group)
 混合速度 (hybrid velocity)
 基础坐标系 (base frame)
 惯性张量 (inertia tensor)
 密集 (compact set)
 基本抓取约束 (fundamental grasping constraint)
 第一基本型 (first fundamental form)

第二基本型 (second fundamental form)
 虚位移 (virtual displacement)
 虚功 (virtual work)
 耦合矩阵 (coupling matrix)
 弹性腱 (elastic tendons)
 虚拟力 (virtual force)
 控制操作 (control operation)
 虚拟现实 (virtual reality)
 推前映射 (push forward map)

十二画

等效轴表示法 (equivalent axis representation)
 硬约束 (scleronomic constraint)
 联接操作 (attach operation)
 最少时间局部可控的 (small-time locally controllable)
 幂零的 (nilpotent)
 最优控制 (optimal control)
 幂零系统 (nilpotent system)
 链式系统 (chained form system)

十三画

群 (group)
 满射 (surjective)
 数值解 (numerical solutions)
 输入构件 (input link)
 输出构件 (output link)
 零化约束 (annihilate the constraints)
 微分同胚 (diffeomorphism)
 微分 1-形式 (differential one-form)

十四画以上

覆盖 (covering)
 摩擦锥 (friction cone)
 增长矢量 (growth vector)

参 考 文 献

1. Angeles J. Rational Kinematics. Springer-Verlag, 1988
2. Asada H and Slotine J J. Robot Analysis and Control. John Wiley, 1986
3. Aström K J and Wittenmark B. Computer Controlled Systems: Theory and Design. Prentice-Hall, 1984
4. Baillieul J. Geometric methods for nonlinear optimal control problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 1978, 25 (4): 519~548
5. Baillieul J and Martin D. Resolution of Redundancy. In Brockett R W editor, *Robotics: Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, Volume 41, pages 49~90. American Mathematical Society, 1990
6. Ball R S. A Treatise on the Theory of Screws. Cambridge University Press, 1900
7. Bichi A Salisbury J K and Brock D L. Contact sensing from force measurements. *International Journal of Robotics Research*. 1993, 12 (3): 249~262
8. Bloch A M, Reyhanoglu M and McClamroch N H. Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1992, 37 (11): 1746~1757
9. Boothby W M. An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry. Academic Press, second edition, 1986
10. Bottena O and Roth B. Theoretical Kinematics. North-Holland, 1979
11. Brockett R W. Control theory and singular Riemannian geometry. In Hinton P and Young G, editors, *New Directions in Applied Mathematics*, pages 11~27. Springer-Verlag, New York, 1981
12. Brockett R W. Robotic manipulators and the product of exponentials formula. In Fuhrman P A, editor, *Mathematical Theory of Networks and Systems*, pages 120~129. Springer-Verlag, 1981
13. Brockett R W editor. *Robotics: Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, Volume 41. American Mathematical Society, 1990
14. Brockett R W and Dai L. Nonholonomics kinematics and the role of elliptic functions in constructive controllability. In Li Z and Canny J F, editors, *Nonholonomic Motion Planning*, pages 1~22. Kluwer, 1993
15. Brockett R W, Stokes A and Park F. A geometrical formulation of the dynamical equations describing kinematic chains. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 637~642, 1993
16. Brooks R A and Flynn A M. Rover on a chip. *Aerospace America*, pages 22~26, Oct. 1989
17. Chiacchio P and Siciliano B. A closed-loop Jacobian transpose scheme for solving the inverse kinematics of nonredundant and redundant wrists. *Journal of Robotics Systems* 1989, 6(5): 601~630
18. Childress D S. Artificial hand mechanisms. In *Mechanisms Conference and International Symposium on Gearing and Transmissions*, San Francisco, CA, Oct. 1972
19. Cohn M, Deno D C, Sastry S S, and Wendlandt J. Actuating and force-sensing for cable-driven, teleoperated manipulators. In *Medicine Meets Virtual Reality*, San Diego, 1992. Alligned Management Associates
20. Coffet P et. al. Robot Technology. McGraw-Hill, 1983. Transaction from the French, *Les Robots* (8 volumes)
21. Craig J J. Introduction to Robotics: Mechanics and Control. Addison-Wesley, second edition, 1989
22. Cutkosky M R. Robotic Grasping and Fine Manipulation. Kluwer, 1985
23. De Luca A and Oriolo G. The reduced gradient method for solving redundancy in robot arms. *Robotersysteme*. 1991, 7(2): 117~122
24. Demmel J, Lafferriere G, Schwartz J, and Sharir M. Theoretical and experimental studies using a multifin-

- get planar manipulator. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 390 ~ 395, 1988
25. Denavit J and Hartenberg R S. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *Journal of Applied Mechanics*, pages 215 ~ 221, June 1955
 26. Deno D C, Murray R M, Pister K S J, and Sastry S S. Finger-like biomechanical robots. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1992
 27. Carmo M P do. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, 1976
 28. Duffy J. *Analysis of mechanisms and Robot Manipulators*. Edward Arnold Ltd., London, 1980
 29. Duffy J and Crane C. A displacement analysis of the general spatial 7R mechanism. *Mechanisms and Machine Theory*, 1980 15: 153 ~ 169
 30. Erdman A G and Sandor G N. *Mechanism Design: Analysis and Synthesis*. Prentice-Hall, 1984
 31. Fearing R S. Micro structures and micro actuators for implementing sub-millimeter robots. In Tzou H S and Fukuda T, editors, *Precision Sensor, Actuators and Systems*, Kluwer Academic Publishers, 1992
 32. Fernandes C, Gurvits L, and Li Z. Attitude control of a space platform manipulator system using internal motion. *International Journal of Robotics Research*, 1994
 33. Fernande C, Gurvits L and Li Z. Near optimal nonholonomic motion planning for a system of coupled rigid bodies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, March, 1994
 34. Franklin G F, Powell J D and Emami-Naeini A. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley, second edition, 1991
 35. Fu K, S, Gonzalez R, C, and Lee C, S, G. *Robotics: Control, Sensing, Vision and Intelligence*. McGraw Hill, 1987
 36. Gorla B, and Renaud M. *Modeles des Robots Manipulateurs: applications a leur commande*. Cepadues-Editions, 1984
 37. Grayson M. and Grossman R. Models for free nilpotent Lie algebras. *Journal of Algebra*. 1990, 135 (1): 177 ~ 191
 38. Hall M. *The Theory of Groups*. Macmillan, 1959
 39. Hanafusa H and Asada H. A robotic hand with elastic fingers and its application to assembly process. In Brady M et. al., editor, *Robot Motion: Planning and Control*, pages 337 ~ 360. MIT Press, 1982
 40. Hermann R and Krener A J. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-22: 728 ~ 740, 1977
 41. Hinton G. Some computational solutions to Bernstein's problems. In Whiting H T A, editor, *Human Motor Actions-Berstein Reassessed*, chapter 4b. Elsevier Science Publishers, B. V., 1984
 42. Hunt K. H. *Kinematic Geometry of Mechanisms*. Oxford University Press, 1978
 43. Iberall T and Venkataraman T, editor. *Dextrous Robot Hands*. Springer-Verlag, 1988
 44. Isidori A. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, 2nd edition, 1989
 45. Jacobsen S, Wood J, Bigger K, and Iverson E. The Utah/MIT hand: Work in progress. *International Journal of Robotics Research*. 1984, 4 (3): 21 ~ 50
 46. Jain A and Rodriguez G. Recursive flexible multibody system dynamics using spatial operators. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1992, 15 (6): 1453 ~ 1466
 47. Kahan W. *Lectures on computational aspects of geometry*. Department of Electrical Engineering and Computer Sciences, University of California, Berkley, Unpublished, July, 1983
 48. Kao I and Cutkosky M R. Quasi-static manipulator with compliance and sliding. *International Journal of Robotics Research*, 1992, 11 (1): 20 ~ 40

49. Kerr J. An Analysis of Multi-fingered Hands. Ph. D thesis, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, 1984
50. Khalil H K. Nonlinear Systems. Macmillan, 1992
51. Khatib O. A unified approach for motion and force control of robot manipulator; The operational space formulation. IEEE Journal on Robotics and Automation. February 1987, RA-3(1); 43~53
52. Koditschek D. Natural motion for robot arms. In IEEE control and Decision Conference, pages 733~735, 1984
53. Koivo A J. Fundamentals for control of robotic manipulators. Wiley, 1989
54. Kreutz K. On manipulator control by exact linearization. IEEE Transactions on Automatic Control 1989, 34 (7); 763~767
55. Lafferriere G and Sussmann H. J. A differential geometric approach to motion planning. In Li Z, and Canny J F, editors, Nonholonomic Motion planning, pages 235~270, Kluwer, 1993
56. Laumond J, P. Finding collision-free smooth trajectories for a nonholonomic mobile robot. In International Joint Conference on Artificial Intelligence, pages 1120~1123, 1987
57. Lawden D F. Elliptic Functions and Applications. Springer-Verlag, 1980
58. Lee H Y. and Liang C G. A new vector theory for the analysis of spatial mechanisms. Mechanisms and Machine Theory. 1988, 23 (3); 209~217
59. Li Z. Kinematics, Planning and Control of Dextrous Robot Hands. Ph. D thesis, Department of Electrical Engineering and Computer Sciences, University of California, Berkeley, 1989
60. Li Z. Geometrical considerations of robot kinematics. International Journal of Robotics and Automation. 1990, 5 (3); 139~145
61. Li Z and Canny J. Motion of two rigid bodies with rolling constraint. IEEE Transactions on Robotics and Automation. 1990, 6 (1); 62~71
62. Li Z and Canny J F, editors. Nonholonomic Motion Planning. Kluwer, 1992
63. Li Z, Hsu P, and Sastry S S. Grasping and coordinated manipulation by a multifingered robot hand. International Journal of Robotics Research. 1989, 8 (4); 33~50
64. Loncaric J. Geometric Analysis of Compliant Mechanisms in Robotics. Ph. D thesis Division of Applied Sciences, Harvard University, 1985
65. Manocha D and Canny J F. Real time inverse kinematics for general 6R manipulator. Technical Report ESKC 92-2, University of California, Berkeley, 1992
66. Manseur R and Dory K L. A robot manipulator with 16 real inverse kinematic solutions. International Journal of Robotics Research. 1989, 8 (5); 75~79
67. Markenscoff X, Ni L, and Papadimitriou C H. The geometry of grasping. International Journal of Robotics Research 1990, 9 (1); 61~74
68. Marsden J, E. Lectures on Mechanics. London Mathematical Society, 1992
69. Marsden J, E. Montgomery R and Ratiu T S. Reduction, Symmetry and Phases in Mechanics, volume 436 of Memorirs. American Mathematical Society, 1990
70. Mason M T and Salisbury J K. Robot Hands and the Mechanics of Manipulation. MIT. Press, 1985
71. McCarthy J M. An introduction to Theoretical Kinematics. MIT Press, 1990
72. Mishra J, Schwartz J T and Sharir M. On the existence and synthesis of multifingered positive grips. Algorithmica. 1987, 2 ;541~558
73. Montana D J. The kinematics of contact and grasps. International Journal of Robotics Research. 1988, 7 (3); 17~32
74. Montana D J. The kinematics of contact with compliance. In IEEE International Conference on Robotics and

- Automation, pages 770~775, 1989
75. Murray R M. Nilpotent-bases for a class of non-integrable distributions with applications to trajectory generation for nonholonomic systems. Technical Report CIT/CDS 92-002, California Institute of Technology, October 1992
 76. Murray R M, Deno D C, Pister K S J. and Sastry S S. Control primitives for robot systems. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. 1992, 22 (1): 183~193
 77. Murray R M and Sastry S S. Control experiments in planar manipulation and grasping. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 624~629, 1989
 78. Murray R, M. and Sastry S S. Grasping and manipulation using multifinger robot hands. In Brockett R W, editor, Robotics: Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Volume 41, pages 91~128, AMS, 1990
 79. Murray R M and Sastry S S. Nonholonomic motion planning: steering using sinusoids. IEEE Transactions on Automatic Control. 1993, 38 (5): 700~716
 80. Nakamura Y. Advanced Robotics: Redundancy and Optimization. Addison-Wesley, 1991
 81. Nakamura Y, Nagi K and Yoshikawa T. Dynamics and stability in coordination of multiple robotic mechanisms. International Journal of Robotics Research. 1989, 8 (2): 44~61
 82. Neimark Ju I and Fufaev N A. Dynamics of Nonholonomic Systems, volume 33 of Translations of Mathematical Monographs, American Mathematics Society, 1972
 83. Nguyen V D. Constructing force-closure grasps. International Journal of Robotics Research. 1988, 7 (3): 3~16
 84. Nijmeijer H and Schaft van der A J. Nonlinear Dynamical Control Systems. Springer Verlag, 1990
 85. Okada T. Computer control of multijointed finger system for precise object-handing. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. 1982, SMC-12 (3): 289~299
 86. Paden B. Kinematics and Control Robot Manipulators. Ph. D thesis, Department of Electrical and Computer Sciences, University of California, Berkeley, 1986
 87. Paden B and Sastry S S. Optimal kinematic design of 6R manipulators. International Journal of Robotics Research. 1988, 7 (2): 43~61
 88. Park F, C, Bobrow J. E and Poloon S R. A Lie group formulation of robot dynamics. UCI Mechanical Systems Technical Report, Department of Mechanical Engineering University of California, Irvine, April 1993
 89. Park F C and Murray A P. Computational aspects of the product-of-exponentials formula for robot kinematics. IEEE Transactions on Automatic Control, 1994
 90. Pars L A. A Treatise on Analytical Dynamics. Wiley, 1965
 91. Paul R P. Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control. MIT Press, 1981
 92. Pister K S J. Hinged Polysilicon Structures with Integrated CMOS Thin Film Transistors. PhD thesis, Department of Electrical Engineering and Computer Sciences, University of California, Berkeley, 1992
 93. Pister K S J, Fearing R S and Howe R T. A planar air levitated space electrostatic actuator system. In IEEE Workshop on Micro Electromechanical Systems, pages, 67~71, 1990
 94. Pister K S J, Judy M W Burgett S R and Fearing R S. Microfabricated hinges. Sensors and Actuators A-Physical. 1992, 33 (3): 249~256
 95. Primorose E J F. On the input-output equation of the general 7R mechanism. Mechanisms and Machine Theory. 1986, 21: 509~510
 96. Raghavan M. Manipulator kinematics. In R. W. Brockett, editor, Robotics: Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Volume 41, pages 21~48, AMS, 1990
 97. Raghavan M and Roth B. Inverse kinematics of the general 6R manipulator and related linkages. Journal of Mechanical Design. 1993, 115: 502~508



98. Rockafellar R T. Convex Analysis. Princeton University Press, 1970
99. Rodriguez G, Jain A and Kreutz-Delgado K. A spatial operator algebra for manipulator modeling and control. International Journal of Robotics Research. 1991, 10 (4): 371~384
100. Rosenberg R M. Analytical Dynamics of Discrete Systems. Plenum Press, New York, 1977
101. Roth B, Rastegar J and Scheinaman V. On the design of computer controlled manipulators. On the Theory and Practice of Robots and Manipulator, Proceedings of the First CISM-IFTOMM Symposium, pages 93 ~ 113, 1973
102. Salisbury J K. Kinematic and Force Analysis of Articulated Hands. Ph. D thesis, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, 1982
103. Sastry S S and Bodson M. Adaptive Control; Stability, Convergence and Robustness. Prentice-Hall, 1989
104. Sastry S S and Montgomery R. The structure of optimal controls for a steering problem. In IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems Design (NOLCOS), pages 385~390, 1992
105. Serre J P. Lie Algebras and Lie Groups. W. A. Benjamin, New York, 1965
106. Shamir T and Yomdin Y. Repeatability of redundant manipulators; Mathematical solution of the problem. IEEE Transactions on Automatic Control. 1988, 33 (11): 1004~1009
107. Shamir F. Designing a multiple prehension manipulator. Journal of Mechanical Engineering. 1975, 97 (9): 30~37
108. Slotine J E and Li W. On the adaptive control of robot manipulators. International Journal of Robotics Research. 1987, 6: 49~59
109. Spivak M. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, volume I. Publish or Perish, Inc., Houston, second edition, 1979
110. Spong M W, Lewis F L and Abdallah C T, editors. Robot control: Dynamics, Motion Planning and Analysis. IEEE Press, 1991
111. Spong M W and Vidyasagar M. Dynamics and control of robot manipulators. John Wiley, 1989
112. Stewart D. A platform with six degrees of freedom. Proceedings of the Institute of Mechanical Engineering, 180, part I (5): 371~386, 1954. 1965-66
113. Tilbury D, Murray R M and Sastry S S. Trajectory generation for the N-trailer Problem using goursat normal form. In IEEE Control and Decision Conference, pages 971~977, 1993
114. Tomovic R and Boni G M. An adaptive artificial hand. IRE Transactions on Automatic Control. 1962, 7 (3): 3~10
115. Trevelyan J P. Robots for Shearing Sheep; Shear Magic. Oxford University Press, York, 1992
116. Varadarajan V S. Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations. Springer Verlag, 1984
117. Vershik A M and Gershkovich V Ya. Nonholonomic problems and the theory of distribution. Acta Applicandae Mathematicae. 1988, 12: 181~209
118. Vidyasagar M. Nonlinear Systems Analysis. Prentice-Hall, second edition, 1993.
119. Walsh G and Sastry S S. On reorienting rigid linked bodies using internal motions. In IEEE Control and Decision Conference, pages 1190~1195, 1991
120. Wen J T and Bayard D S. New class of control laws for robot manipulators, Part 1: Non-adaptive case. International Journal of Control. 1988, 47 (5): 1361 ~ 1385
121. Wolfram S. Mathematica; A System for Doing Mathematics by Computer. Addison-Wesley, 1992
122. Yoshikawa T. Foundation of Robotics; Analysis and Control. MIT Press, 1990
123. Young L C. Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory. Chelsea, New York, second edition, 1980

[G e n e r a l I n f o r m a t i o n]

书名 = 机器人操作的数学导论

作者 =

页数 = 2 9 6

S S 号 = 1 0 1 9 2 0 1 6

出版日期 =

封面
书名
版权
前言
目录
正文